信号処理論第二
第1回 (10/4)

情報理工学系研究科システム情報学専攻
亀岡 弘和
kameoka@hil.t.u-tokyo.ac.jp

講義予定

- 10/04: 第1回
- 10/11: 第2回
- 10/18: 第3回
- 10/25: 第4回
- 11/01: 休講
- 11/08: 第5回
- 11/15: 第6回
- 11/22: 休講
- 11/29: 第7回
- 12/08: 第8回
- 12/13: 第9回
- 12/20: 第10回
- 01/10: 第11回
- 01/17: 第12回
- 01/24: 第13回
- 01/31: 期末試験

講義内容

- δ関数再考
- δ関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

講義資料と成績評価

- 講義資料
  - http://hil.t.u-tokyo.ac.jp/~kameoka/sp2/
- 成績評価
  - 出席点
  - 学期末試験

第1章　δ関数再考

Fourier変換

- 信号$f(t)$のFourier変換(t：時間)：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

- $F(\omega)$の逆Fourier変換(ω：角周波数)：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

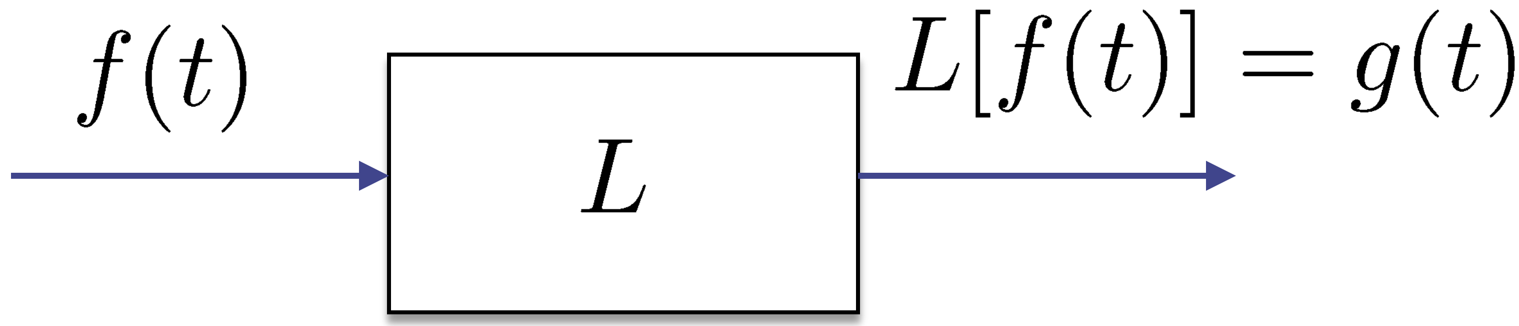
線形システム解析における基本的なツール

Fourier変換による信号の表現

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\
&\simeq \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\Delta\omega)e^{jn\Delta\omega t}\Delta\omega
\end{aligned}
$$

- 信号を複素正弦波の重ねあわせとして表現
- $F(\omega)$は複素正弦波を基底とした信号表現の係数のようなもの

線形時不変システム LTI (Linear Time Invariant) system



- 線形性
  $$L[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] = C_1 L[f_1(t)] + C_2 L[f_2(t)]$$
- 時不変性
  $$L[f(t-\tau)] = g(t-\tau)$$
- 電気回路、力学系、音響系など
  多くの物理システムのモデル

線形時不変システム LTI (Linear Time Invariant) system

- 線形時不変システムといえば
  「インパルス応答との畳み込み」

$$g(t) = L\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

- なぜ？？
  ⇒前述の線形性と時不変性の仮定から導ける

線形時不変システム ―インパルス応答、畳み込み―

- 単位インパルス $\delta(t-t_1)$ に対する線形システムの出力を $h(t;t_1)$ と表記しよう

$$L\{\delta(t-t_1)\} = h(t;t_1)$$

- 信号 $f(t)$ を無数のインパルス $f(t_1)\delta(t-t_1)\mathrm{d}t_1$ の和

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)\delta(t-t_1)\mathrm{d}t_1$$

として表せば、線形性より、$f(t)$ に対する線形システムの出力は、

$$L\{f(t)\} = L\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)\delta(t-t_1)\mathrm{d}t_1\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)\underbrace{L\{\delta(t-t_1)\}}_{h(t;t_1)}\mathrm{d}t_1$$

線形時不変システム ―インパルス応答、畳み込み―

- 単位インパルスに対する線形システムの出力

$$h(t;t_1) = L\{\delta(t-t_1)\}$$

$$\xrightarrow{t_1=0} h(t) := h(t;0) = L\{\delta(t)\}$$

- 時不変性の仮定より

$$h(t;t_1) = L\{\delta(t-t_1)\} = h(t-t_1)$$

- よって $L\{f(t)\} = L\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)\delta(t-t_1)\mathrm{d}t_1\right\}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)h(t;t_1)\}\mathrm{d}t_1$$

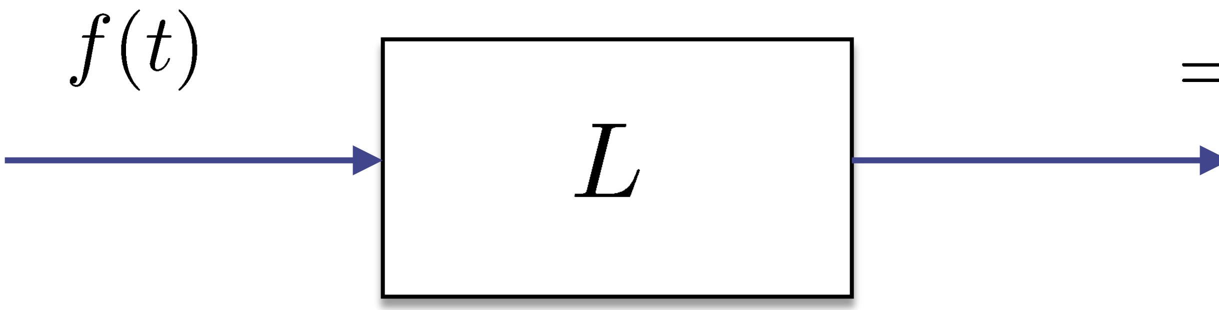
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)h(t-t_1)\}\mathrm{d}t_1$$

畳み込み

線形時不変システムの固有関数

問：$L[f(t)] = Cf(t)$ となる関数（固有関数）は？

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= g(t) \\ &= Cf(t) \end{aligned}$$



複素正弦波に対する応答1

$L[e^{j\omega t}] = y(t)$ とおくとき、$L[e^{j\omega(t+\tau)}]$ は？

- 時不変性より

$$L[e^{j\omega(t+\tau)}] = y(t+\tau)$$

- 線形性より

$$\begin{aligned} L[e^{j\omega(t+\tau)}] &= L[e^{j\omega t} \cdot e^{j\omega\tau}] \\ &= e^{j\omega\tau} y(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{y(t+\tau) = e^{j\omega\tau} y(t)}$$

複素正弦波に対する応答2

$$y(t+\tau) = e^{j\omega\tau} y(t)$$

$$y(t+\tau) - y(t) = (e^{j\omega\tau} - 1) y(t)$$

$$\frac{y(t+\tau) - y(t)}{\tau} = \frac{e^{j\omega\tau} - 1}{\tau} y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = j\omega y(t)$$

$y(t)$の微分方程式

$$y(t) = C(\omega) e^{j\omega t}$$

線形時不変システムの複素正弦波に対する応答は
同じ周波数の複素正弦波：固有関数

Fourier変換できない関数

- 正弦関数 $$\int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega_0(t) e^{-j\omega t} dt$$

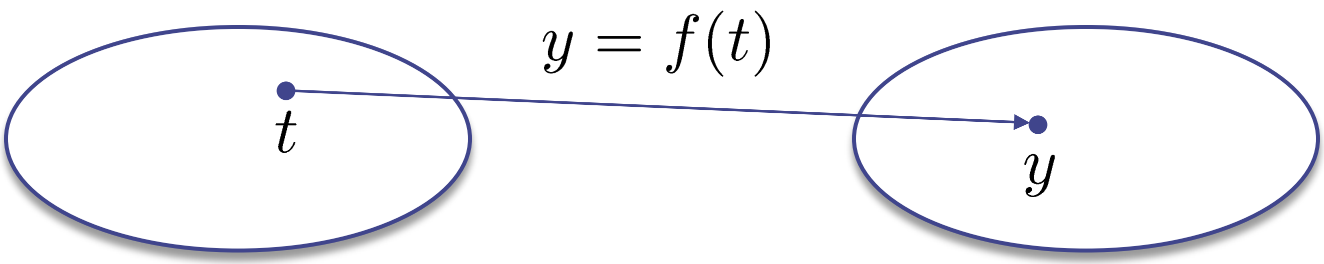
- 定数関数 $$\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt$$

- ステップ関数 $$\int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt \qquad U(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

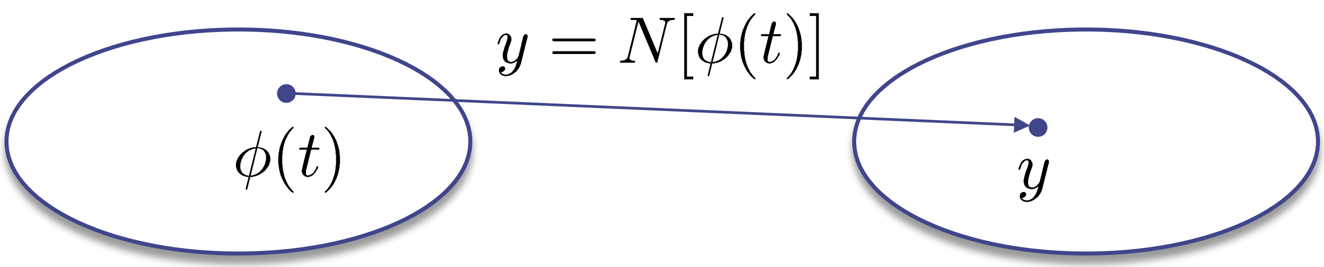
超関数の概念が必要

汎関数(functional)

- 関数：実数（または複素数）から実数（または複素数）への写像



- 汎関数：関数から実数（または複素数）への写像



例えば $y = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt$ は汎関数

超関数(distribution)

- L. Schwartzが系統的に一般化
- 超関数 $g(t)$ とは，あるクラス C の任意の関数 $\phi(t)$ に対して定義される汎関数で，線形性と連続性を満たすもの
- 以下では超関数 $g(t)$ が $\phi(t)$ に対して割り当てられる値を $N_g[\phi(t)]$ と表記する
- 線形性：$N_g[a_1\phi(t)+a_2\phi_2(t)] = a_1 N_g[\phi_1(t)] + a_2 N_g[\phi_2(t)]$
- 連続性：$\phi_m(t) \Rightarrow 0$ ならば $N_g[\phi_m(t)] \rightarrow 0$
- 超関数 $g(t)$ はここでは形式的に $g(t)$ と表記しているが，一般に実数（または複素数）t に対して値を決める必要はないことに注意

テスト関数

- 超関数 $g(t)$ が作用する関数 $\phi(t)$ はテスト関数と呼ばれる

- ここではテスト関数 $\phi(t)$ として，無限回連続微分可能で $t \to \infty$ で t の任意のべきよりもさらに速くゼロに近づくような関数を考える

$$\lim_{|t|\to\infty} |t^m| \cdot |\phi^{(n)}(t)| = 0 \quad (m, n = 0, 1, 2, \cdots)$$

超関数の形式的積分表示

- 超関数 $g(t)$ により，$\phi(t)$ に割り当てられる値を形式的に定積分の形で以下のように表記する

$$N_g[\phi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)dt$$

- 以下，超関数に対する演算を
定積分の形式的な演算により定義する

超関数の演算1

- 和： $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)\phi(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t)\phi(t)dt$$

- シフト： $g(t - t_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - t_0)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t + t_0)dt$$

- スケーリング： $g(at)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(at)\phi(t)dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi\left(\frac{t}{a}\right)dt$$

超関数の演算2

- 奇（偶）関数：全ての偶（奇）テスト関数 $\phi(t)$ に対して以下を満たすならば奇（偶）関数であるという

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)dt = 0$$

- 関数 $f(t)$ と超関数 $g(t)$ の積：

$$\int_{-\infty}^{\infty} [g(t)f(t)]\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)[f(t)\phi(t)]dt$$

結合則

超関数の演算3

- 超関数 $g_1(t)$ と超関数 $g_2(t)$ の畳みこみ：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau)g_2(t-\tau)d\tau\right]\phi(t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau)\underline{\left[\int_{-\infty}^{\infty}[g_2(t-\tau)\phi(t)dt\right]}d\tau$$

τごとにある数が決まるのでτの関数

- 積は定義されないことに注意

超関数の演算4

- 等式:
  - 超関数 $g(t)$ は，実数（または複素数） t に対して何らかの値を定義するものではない。しかし，
  - 超関数 $g(t)$ と関数（または超関数）$f(t)$ に対して

$$g(t) = f(t), \quad a \le t \le b$$

とは，区間 (a, b) 以外ではゼロとなる全てのテスト関数 $\phi(t)$ に対して下記が成り立つことと定義する

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)dt$$

超関数の演算5

- 導関数: $\dfrac{dg(t)}{dt}$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg(t)}{dt}\phi(t)dt &= [g(t)\phi(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\frac{d\phi(t)}{dt}dt \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\frac{d\phi(t)}{dt}dt\end{aligned}$$

- n次導関数: $\dfrac{d^n g(t)}{dt^n}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n g(t)}{dt^n}\phi(t)dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\frac{d^n\phi(t)}{dt^n}dt$$

δ関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1, \quad \delta(t) = 0 \quad {}^{\forall}t \neq 0$$

- 畳み込み演算の単位元
  $f(t) * \delta(t) = f(t)$
- 線形システム論で重要
- 通常の関数のように扱いたい
- しかし、通常の関数ではない
  （t=0でどんな実数値をとる関数も上記をみたさない）
- どう定義すればよい？
  （δ関数の微分は？δ関数同士の掛け算は？）

デルタ関数(Dirac’s distribution)

- 超関数による定義

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0)$$

  - テスト関数 $\phi(t)$ は，原点で連続であればよい

δ関数の性質1

- シフト

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\phi(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t + t_0)dt = \phi(t_0)$$

- 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

δ関数の性質2

- スケーリング

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

  - 略証：

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \underline{\delta(at)}\phi(t)dt &= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi\left(\frac{t}{a}\right)dt \\
&= \frac{1}{|a|}\phi(0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\frac{1}{|a|}\delta(t)}\phi(t)dt
\end{aligned}$$

δ関数の性質3

- $\delta(t)$ は偶関数
  - 略証：

◆関数 $\phi(t)$ が奇関数であれば

$\phi(t) = -\phi(-t)$ より $\phi(0) = 0$

◆よって任意の奇関数に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0) = 0$$

δ関数の性質4

- $f(t)$ が $t=0$ で連続なら, $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$
  - 略証:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) \phi(t) dt &= f(0)\phi(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(0) \phi(t) dt \end{aligned}$$

δ関数の性質5

- $\delta'(t)$ ：δ関数の微分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi'(t)dt$$
$$= -\phi'(0)$$

  - 関数 $\phi(t)$ に対し，$\phi'(0)$ を割り当てる操作

- $\delta^{(n)}(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\phi(t)dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi^{(n)}(t)dt$$
$$= (-1)^n \phi^{(n)}(0)$$

δ関数の性質6

- 畳み込み

$$\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = \delta(t-(t_1+t_2))$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_1)\delta(t - t_2 - \tau) d\tau \right] \phi(t) dt \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau - t_2) \phi(t) dt \right] d\tau \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_1) \phi(\tau + t_2) d\tau \\
= & \phi(t_1 + t_2)
\end{aligned}$$

一般の関数の超関数への拡張

- 普通の関数を超関数とみなす
  - テスト関数 $\phi(t)$ から実数 (または複素数) への写像を一般の関数 $f(t)$ を用いて

$$N_f[\phi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)dt$$

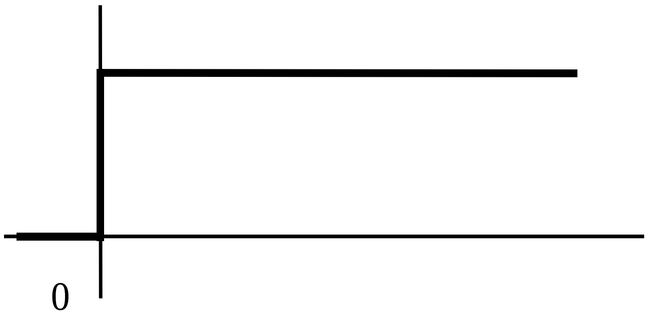
と定義すると、これは線形性と連続性を満たし、超関数とみなせる。

  - これにより, 通常の関数の枠組みでは扱えない不連続関数の微分などを扱えるようになる

ステップ関数

- ステップ関数：

$$U(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 1/2 & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$



- 超関数としてのステップ関数：

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(t)\phi(t)dt = \int_0^{\infty} \phi(t)dt$$

  - **ゼロから無限大までの $\phi(t)$ の面積に等しい数を関数 $\phi(t)$ にわりあてる操作**

一般化された導関数

- 関数 $f(t)$ が微分不可能な点を含んでいても
超関数の枠組みでそれを議論できる場合がある

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt}\phi(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{d\phi(t)}{dt}dt$$

ステップ関数の微分

- $\dfrac{dU}{dt} = \delta(t)$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \underline{U'(t)}\phi(t)dt &= -\int_{-\infty}^{\infty} U(t)\phi'(t)dt \\
&= -\int_{0}^{\infty} \phi'(t)dt \\
&= \phi(0) - \phi(\infty) \\
&= \phi(0) \quad (\because \phi(\infty) = 0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\delta(t)}\phi(t)dt
\end{aligned}
$$

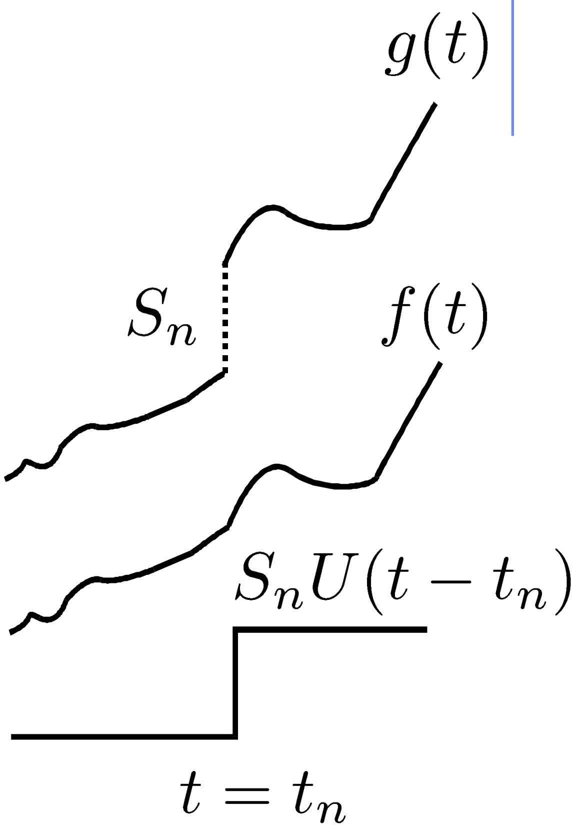
不連続関数の表現

- 不連続関数は,「連続関数＋ステップ関数」で表現できる

$$g(t) = f(t) + \sum_n S_n U(t - t_n)$$

- **不連続関数の一般化された導関数はインパルス $S_n\delta(t - t_n)$ を含む。ただし、S_n は、$t = t_n$ における飛躍値である。**

$$g'(t) = f'(t) + \sum_n S_n \delta(t - t_n)$$



一般化された極限

- 超関数列の極限 $g(t) = \lim_{n \to \infty} g_n(t)$ は以下のように定義される。

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(t)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)dt \quad {}^{\forall}\phi(t)$$

- パラメータ x に関する超関数列の極限 $g(t) = \lim_{x \to x_0} g(t;x)$ は以下のように定義される。

$$\lim_{x \to x_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t;x)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)dt \quad {}^{\forall}\phi(t)$$

- 一般化された極限の概念は、普通では存在しない
ある極限の存在を保証する

Riemann-Lebesgueの補助定理

関数 $\phi(t)$ が、ある区間 (a, b) で
絶対可積分ならば

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_a^b e^{-j\omega t}\phi(t)dt = 0$$

ただし a, b は有限の定数、あるいは無限大である。

超関数の極限としては

$$\lim_{\omega\to\infty} e^{-j\omega t} = 0 \quad (t \neq 0)$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \cos\omega t = 0 \quad (t \neq 0)$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \sin\omega t = 0 \quad (t \neq 0)$$

Riemann-Lebesgueの補助定理の証明

- 一般には複雑なので、簡単のため、
  $\phi(t)$ は有界な導関数を有するとし、
  a, b が有限である場合のみ示す。

$$\int_a^b e^{-j\omega t}\phi(t)dt = \underline{\frac{1}{j\omega}\left[\phi(a)e^{-j\omega a} - \phi(b)e^{-j\omega b}\right]}$$

$$\rightarrow 0 \quad (\omega \rightarrow \infty)$$

$$+\underline{\frac{1}{j\omega}\int_a^b \phi'(t)e^{-j\omega t}dt}$$

$$\rightarrow 0 \quad (\omega \rightarrow \infty)$$

$$\because \int_a^b \phi'(t)e^{-j\omega t}dt \leq (b-a)M$$

M は $|\phi'(t)|$ の (a, b) における最大値

一般化された極限の例2

$$\int_0^\infty \sin \omega t dt = \frac{1}{\omega} \quad (\omega \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \because \int_0^\infty \sin \omega t dt &= \lim_{T \to \infty} \int_0^T \sin \omega t dt \\ &= \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{\cos \omega T}{\omega} \right) \\ &= \frac{1}{\omega} \end{aligned}$$

$\to 0$