BURR-BROWN®

先端技術の融合と創造

Application Note

MTTF、故障率、信頼性、および寿命試験

バー・ブラウンでは、高温寿命試験によってデバイスの信頼性を評価し品質を保証しています。この試験の結果は、MTTFおよび故障率で数値化されています。この情報は比較目的に使用する場合や信頼性計算に適用するときには非常に価値があります。しかし、正確に理解しなかったり利用方法を誤ると価値が失われてしまいます。本アプリケーションノートの目的は、バー・ブラウン社が発行する寿命試験結果を完全かつ正確に利用するのに必要な基礎的詳細事項の提供および、これらの信頼性の概念の背後にある定義、考え方、そして正当化を簡潔な方法で結び付けることです。

用語の定義

信頼性とは"部品が規定試験条件下で少なくとも規定時間の間機能を維持できる確率です"[1]。

MTTF(平均故障寿命)は、規定試験条件下で最初の故障が発生するまでの平均時間です。これはデバイス総数×稼働時間の積(以下デバイス・アワーとする)を故障回数で割って計算されます。この時点では、MTTFの大きさは故障あたりの時間ではなく、故障あたりのデバイス・アワーと考えることが大切です。各部品の1時間以内の故障率が0.1%であれば、10個の部品全体の1時間以内の故障率は1%になります。MTTFはいずれの場合も同じです。1個の部品の10時間で1回の故障、または10個の部品の1時間で1回の故障は、いずれもMTTFが10デバイス・アワーになります。

故障はデバイスが単位時間で故障する条件付き確率です。この条件付き確率は、デバイスが一定期間に故障する確率であり、その期間の初期には故障が発生しないものとします[5]。予測故障発生頻度を表すのに故障率を使用するときには、単位時間は通常デバイス・アワーになります。

FITSは、単にデバイス・アワーあたりの故障から10億デバイス・アワーあたりの故障までをスケーリングした故障率です。

詳細解析

定義の章では、MTTFは寿命試験など特定の試験条件で観測される故障あたりの平均時間(デバイス・アワー)と定義されています。バー・ブラウンでは、MTTFには少し修正した式を使用しています。すなわち、デバイス・アワー(Tdh→トータル・デバイス・アワー)を2倍し、それを観測故障数の2倍＋自由度2のカイ二乗分布($\chi^2(2f+2)$)の信頼限界60%で割って計算します。バー・ブラウンの公式は以下のようになります。

$$\text{MTTF} = \frac{2T_{dh}}{\chi^2(2f+2)}$$

時間と故障の両方が2倍されるため、前者と後者での定義はほぼ同じになります。以下、これを順序だてて説明します。

同じ種類のデバイスで複数の寿命試験を行っても、すべての試験で同じデバイス・アワーに同数の故障が発生することはまずありません。むしろ、故障はある分布を示します。故障がなければ最小値は0でなければなりません。最大値は100%故障に対応させることができますが、100%故障が発生しないように多くの部品で試験を行っているものとします。分布は故障数が増加するに従って低下します。それらの間のどこかで故障が集中します。

カイ二乗計算を行うと、限定寿命試験から実際の故障数を調整するためのツールが求まり、全体として母集団から推定する値を正確に反映させることができます。たとえば、60%の信頼水準を自由度8のカイ二乗分布に適用する場合、ある値をMTTF計算の分母に代入すれば、平均が8のカイ二乗分布の値の60%以上になります。

カイ二乗計算を直観的に解釈すれば、計算された値は複数の寿命試験で得られる故障数の60%以上の故障を示すことになるはずです。60%信頼限界は、ほぼMTTFの平均推定値を表しており、半導体メーカーやユーザに広く受入れられているため、この信頼限界を選択しています。このMTTF概算方法では、以降の信頼性計算をより控え目な水準で行うことができます。

この計算に関して説明しなければならないことがもう1つあります。なぜ2(故障数)＋2を使用するのでしょうか？これに対する技術的な説明については後述します。簡単にいえば、係数2はχ2分布の理論的な有効性を得るのに必要です。係数2は、単に実際の故障数に故障数1を加算していることが分ります。加算された故障数は、計算の中では、試験の終了時に故障が1回発生したようなものです。これによって、試験は最後に1回故障が発生して終了することになり、故障が観測されなかった場合でもMTTF計算が行えるばかりでなく、理論的条件にも合致することが保証されます。

MTTF値自体は比較目的だけに使われます。部品の寿命

に関する推定を述べる前に、まだ考慮すべき要素が多数あります。信頼性および故障の統計的概念によってこのような推定を行うことができます。これらの概念を数量化する統計式を示します。ただし、この式の正当化についてはまだ行っていません。

信頼性をR(t)、そして故障率をZ(t)で表すとします。

すると、 $R(t) = e^{-\alpha t \beta}$

そして、 $Z(t) = \alpha \beta t^{\beta-1}$

となります。

信頼性とは部品が少なくとも規定時間だけ機能する確率であることを思い出して下さい。故障率は故障の発生を予測できる頻度を表します。故障率を調べることによって、製品のライフ・サイクルに関して重要事項を説明できます。

部品のライフ・サイクルには3つの異なる期間が存在すると考えることができます。つまり、初期故障期、耐用寿命期(偶発故障期)、そして摩耗故障期です。これら3つの期間は、数学的には、それぞれ故障率低下、一定故障率、そして故障率上昇という推移特性を持っています。この理論は随所で説明する"*バスタブ曲線"を基礎にしています。

(*推移する曲線の形が、洋式の風呂桶の断面の形に類似している。)

記載した式は、αとβを適切に選択することによって、これら3つの期間すべてをモデル化することができます。βは故障率と信頼性分布の形状に影響を与えます。β<1の場合、Z(t)は減少関数になります。β=1の場合は故障率が一定になります。増加故障率はβ>1でモデル化できます。したがって、βは経験的に分っている故障率(すなわち、故障率を規定するTに関する本来の確率密度関数の)形状を正確にモデル化することができます。定数αによってスケーリング・ファクタが得られます。

製品の適切な設計、デバギング(JIS-Z 8115)、そして徹底した試験を行えば、部品寿命の初期故障期は、部品が出荷される時期までに過ぎ去ってしまうはずです。したがって、ほとんどのフィールド故障は耐用寿命期に発生し、これが機構的な欠陥ではなく、故障率が一定した偶発的な原因で発生すると推定できます。

一定故障率の推定からβ=1が得られます。

したがって、次式が求まります。

$$Z(t) = \alpha$$

一定故障率の概念では、故障が等間隔で発生すると考えることができます。これらの条件の下では、最初の故障までの平均時間、故障間の平均時間、および平均寿命時間はすべて同じになります。したがって、デバイス・アワーあたりの故障率は、単に故障あたりのデバイス・アワーの逆数になります。つまり、一定故障率条件の下では次式が求まります。

$$Z(t) = \alpha \approx 1/MTTF$$

MTTFは常に故障あたりのデバイス・アワー数ですが、故障率もαも常に1/MTTFにはなりません。

式の導出と正当化

さて、これから具体的に詳しく説明します。ワイブル分布に関するすべての情報は、実質的には"Probability and Statistics for Engineers and Scientists"(Ronald E. WalpoleおよびRaymond H. Myers共著、Macmillan Publishing Companyが1985年に著作権を取得)から引用しています。また、MTTFに関する章に記載する情報の多くは、アリゾナ大学のシステム工学および産業工学部教授であるDr.Duane Dietrichの講義から引用したものです。誤りがあればDr.Dietrichにお詫び致します。

まず仮定的に、すべてのデバイスを故障に至らせるだけの長い寿命試験を実施し、各部品の故障までの時間の記録、ヒストグラムの作成、MTTFの計算などを行うものとします。故障までの時間のヒストグラムは便利です。この時点では、その形状は不明でありまた重要でもありません。実験を仮定的とすれば、分布が母集団全体の代表であると推定できます。

この分布から信頼性を以下のように表現することができます。

$$R(t) = P(T > t)$$

ただし、Tは故障までの時間、tは時間を表します。この式は前述した用語の定義を、単に正確に再表現しただけですので注意して下さい。

故障までの時間のヒストグラムから導出できるもう1つの有効な関数は、任意の時間tにおける累積故障確率を表しています。この関数をF(t)で表すとすると、次式が得られます。

$$F(t) = P(T < t)$$

または

$$F(t) = 1 - R(t)$$

これから故障率を検討していきます。故障率とはデバイスがある期間の始めまで正常であるとすれば、特定の期間中に故障する条件付き確率を時間単位で表わしたものです。故障率をZ(t)とすれば、次式で表すことができます。

$$Z(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{F(t + \delta t) - F(t)}{R(t)\,\delta t}$$

さて、

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{F(t + \delta t) - F(t)}{\delta t}$$

は、F(t)の導関数であることに注意して下さい。また、F(t) = 1 − R(t)でもあります。これによって、dF(t)/dt = −dR(t)/dtとなります。したがって、次式が求まります。

$$Z(t) = \frac{dF(t)}{R(t)dt}$$

$$= \frac{-dR(t)}{R(t)dt}$$

$$= \frac{-d\,[\ell nR(t)]}{dt}$$

両辺を積分すると次式が求まります。

$$\ell nR(t) = -\int Z(t)dt + \ell nc$$

これより次式が得られます。

$$R(t) = ce^{-\int Z(t)dt}$$

信頼性と故障率との関係は本来の定義にのみ基づいているため、定数Cは時間t = 0またはR(0) = 1ですべての部品が機能するという初期条件を満足しなければなりません。

ウォルディ・ワイブルの説明

ウォルディ・ワイブルによって1939年に導入された統計分布(ワイブル分布)からは、信頼性関数を役立てるメカニズムが得られます。$x > 0$の場合、分布は次式で与えられます。

$$f(x) = \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}}$$

ただし、$\alpha > 0$および$\beta > 0$です。

T(故障寿命)の本来の確率密度分布は、ワイブル分布を用いて表現できるものと仮定しましょう。すると、次のようになります。

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}} dx$$

$$R(t) = 1 + \int_0^t de^{-\alpha x^{\beta}}$$

$$R(t) = e^{-\alpha t^{\beta}} \text{(付録A参照)}$$

そして

$$Z(t) = \frac{-dR(t)}{R(t)dt} = \frac{\alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^{\beta}}}{e^{-\alpha t^{\beta}}}$$

$$Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$$

したがって、ワイブル分布から次のような信頼性および故障率の数学的表現が得られます。

$$R(t) = e^{-\alpha t^{\beta}}$$

$$Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$$

はたして、これらの式がワイブル分布を仮定しないで、公式と完全に一致するでしょうか？　このZ(t)の定義は前に導出した式と一致するため、仮定が正しかったことがわかります。

$$R(t) = ce^{-\int Z(t)dt}$$

$$R(t) = ce^{-\int \alpha\beta t^{\beta-1}dt}$$

$$R(t) = ce^{-\alpha t^{\beta}}$$

$R(0) = 1$を代入するとC=1となり、前と同様に

$$R(t) = e^{-\alpha t^{\beta}}$$

が求まります。したがって、ワイブル分布は我々の本来の定義と一致するため、本来の式を解くことができ、信頼性および故障率に対する有効な公式が得られます。

一定故障およびMTTFの検討

寿命試験を評価するときは故障条件が一定であると仮定しています。この条件を十分に理解しておくことが特に重要です。一定故障率条件とは何でしょうか？これらがワイブルの式にどのように影響を与えるのでしょうか？MTTFとは正確には何でしょうか？

部品の耐用寿命期間には、高い初期故障率や経年劣化に伴って増加する故障率を引き起す機構的な欠陥や問題は存在しません。この期間の故障は偶発的な要因で発生します。偶発的欠陥またはストレスで部品が故障する確率は、部品が月日を経ても変化することはありません。部品がある時間まで正常であれば故障率、つまり部品が特定時間Tで故障する条件付き確率は一定です。

ワイブル分布から、故障率の一般式は次式で与えられます。

$$Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$$

Z(t)が一定でなければならないとすると、時間変数tを1にするにはβは1でなければなりません。したがって、一定故障率条件下では故障率、信頼性、およびワイブル分布に対する式はそれぞれ次のようになります。

$$Z(t) = \alpha$$

$$R(t) = e^{-\alpha t}$$

そして

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$

関数f(t)は故障までの時間確率密度関数です。これから部品が任意の時間tでの故障する確率が求まります。f(t)の平均、または期待値は平均故障寿命になります。この平均値は$1/\alpha$です。問題は$1/\alpha$の真の値がわからないことです。この値は実験データから推定しなければなりません。

関数f(t)に関する最ゆう推定法を使用して、$1/\alpha$の推定量を導出することができます。N個の部品で寿命試験を行い、r個が故障するとします。寿命試験の結果を示す結合確率密度関数は、試験時に各故障が発生する確率の積によって与えられます。この確率密度関数を$L(\alpha,t)$とすると、次のようになります。

$$L(\alpha,t) = \alpha^r e^{-\alpha\sum_{i=1}^{r} t_i}$$

この式では寿命試験がr番目の故障で終了し、tの次元はデバイス・アワーとします。我々のMTTF評価方法では観測した故障に1回の故障を加算します。このことによって実際には故障が発生しなくてもMTTF計算が可能になるとともに、r番目の故障で終了するための条件が満足されます。tの次元をデバイス・アワーにすると、故障しなかったこれらの部品の試験時間が求まります。

最ゆう推定法によって、$1/\alpha$に対する適切な推定量を求めるために、関数$L(\alpha,t)$を最大にするαの値を求めます。実際に観測したものを観測する確率を大きくするαの値を求めるわけです。これは、$L(\alpha,t)$の自然対数を取り、それをゼロと置き、これをαについて解きます。

$$\ell n(L(\alpha,t)) = r\ell n(\alpha) - \alpha\sum_{i=1}^{r} t_i$$

$$\frac{\partial\,\ell n(L(\alpha,t))}{\partial\alpha} = \frac{r}{\alpha} - \sum_{i=1}^{r} t_i$$

$$\frac{r}{\tilde{\alpha}} - \sum_{i=1}^{r} t_i = 0$$

近似値を表すために$\tilde{\alpha}$を使用します。

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}} = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_i}{r}$$

この式は$1/\alpha$が試験した全デバイスの累積試験時間(デバイス・アワー)を、故障総数で割ると推定できることを示しています。これは本来のMTTFの定義と一致しています。

カイ二乗χ^2を理解するには、信頼区間を計算するために故障寿命Tに対する確率変数が下記の分布に従うことを認識することが必要です。

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$

次に、

$$V = 2\alpha\sum_{i=1}^{r} t_i$$

で表される確率変数は自由度が2rのχ^2分布$\chi^2(2r)$に従います。

したがって、規定された信頼水準ζに対しては、次の関係式が成立します。

$$2\alpha\sum_{i=1}^{r} t_i > \chi^2(2r,\zeta)$$

そして、MTTFに対する信頼上限は次式で表されます。

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{2\sum_{i=1}^{r} t_i}{\chi^2(2r,\zeta)} = \mathrm{MTTF}$$

ただし、rを観測した故障+1にしたものが、我々がMTTFに使用する実際の公式になります。

上の式に使用する確率変数Vがχ^2分布に従うことを正当化するために、次式でf(t)に対する変数変換を適用します。

$$V' = 2\alpha T,\quad \frac{dT}{dV'} = \frac{1}{2\alpha}$$

これによって、次式が求まります。

$$f(v) = \alpha e^{-\alpha\frac{v}{2\alpha}}\frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2}e^{-\frac{v}{2}}$$

これは自由度が2のχ^2分布$\chi^{2(2)}$(付録B参照)です。

ここで、以下の式を注目して下さい。

$$2\alpha\sum_{i=1}^{r} t_i = 2\alpha t_1 + 2\alpha t_2 + \ldots + 2\alpha t_r$$

前述したとおり、上式の和の各要素は$\chi^{2(2)}$分布に従います。したがって、χ^2の再生特性によると、その和も前述したように自由度2rのχ^2分布である$\chi^2(2r)$に従います。

結論

MTTF、故障率、および信頼性の概念を定義し、それを解説し正当化してきました。一般に、デバイス・アワーの単位には時間が使用されています。この次元を使用すれば、故障率を故障の発生が予測できる頻度として解釈することができます。この表現は未知パラメータの実験的推定に好都合であり、直観的に全体像が得られます。しかし、信頼性の推定は本質的には確率学であり、ワイブルの式は基本的には確率式です。確率式と同様に、故障率はデバイス・アワーあたりではなく、時間あたりの故障の確率になります。この違いについて考えて下さい。

バー・ブラウンでは、デバイス故障を引き起す故障メカニズムを加速させるため、高温で寿命試験を実施しています。これにより発行される信頼性レポートは、アプリケーション環境に適した温度範囲でスケーリングされたMTTFの推定値を提供します。代表的な故障メカニズムを表するために選択した活性化エネルギーに関するアレニウスの式を利用して表を作成します。

また、寿命試験結果を計算し記録するために、スプレッド・シート・プログラムを使用しています。故障率は一定であると仮定しています。この仮定は常に検証しなければなりません。MTTFを最初の故障までの平均時間(MTTFF)と解釈することは、故障率が一定でない場合でも必ずしも不合理とはいえません。しかし、そのMTTFを基にして故障率や信頼性を推定することは不適切です。

付録A

$$\begin{aligned} d\exp(-\alpha x^\beta)/dx &= \exp(-\alpha x^\beta)\,d(-\alpha x^\beta)/dx \\ &= \exp(-\alpha x^\beta)(-\alpha\beta)(x^{\beta-1}) \\ &= -\alpha\beta x^{\beta-1}\exp(-\alpha x^\beta) \end{aligned}$$

したがって、上式を代入すると次式が求まります。

$$\begin{aligned} -\int_0^t \alpha\beta x^{\beta-1}\exp(-\alpha x^\beta)dx &= -\int_0^t d\exp(-\alpha x^\beta)/dx\,dx \\ &= -\int_0^t d\exp(-\alpha x^\beta) \end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 + \int_0^t d\exp(-\alpha x^\beta) \\ &= 1 + \exp(-\alpha x^\beta)\Big|_0^t \\ &= 1 + \exp(-\alpha x^\beta) - 1 \end{aligned}$$

付録B

自由度がrのカイ二乗分布は次式で表されます。

$$f(v) = \frac{1}{2^{\frac{r}{2}}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} v^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}$$

$\chi^{2(2)}$でr = 2とすると、次式が求まります。

$$\frac{1}{2^{\frac{2}{2}}\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)} v^{\frac{2}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{v}{2}}$$

参考文献

(1) Walpole, Ronald E., and Myers, Raymond H.,“ Probability and Statistics for Engineers and Scientists, ”Macmillan Publishing Company, 1985.

(2) Box, Hunter, and Hunter,“ Statistics for Experimenters, ”John Wiley & Sona, Inc., 1978.

(3) Besterfield, Dale H.,“ Quality Control ”, Prentice-Hall, 1986.

(4) Kececioglu, P.E., Dr. Dimitri,“ Reliability Engineering Principles and Benefits with Applications, ”the lecture notes of Dr. Dimitri Kececioglu, P.E.; 1981.

(5) Lawless, J.F.,“ Statistical Models and Methods for Lifetime Data, ”John Wiley & Sons, Inc., 1982.

日本バー・ブラウン株式会社　http://www.bbj.co.jp/

本　社　〒222-0033 横浜市港北区新横浜2–3–12 新横浜スクエアビル　045–476–7870

大阪営業所　〒532-0011 大阪市淀川区西中島6–1–1 新大阪プライムタワー　06–6305–3287

フリーラインFAX
本社 FAX.0120-068801
大阪 FAX.0120-068805

万一つながらない場合は、お手数ですが弊社営業部FAX045-476-7889（有料）までご送信くださるか、あるいはTELにてお問い合わせください。