混合ハイブリッド有限要素法の基礎的特性に関する一考察

Study on fundamental characteristics of mixed-hybrid finite element method.

北海道大学大学院工学研究科　○学生員　土屋健司　（Takeshi Tsuchiya）
北海道大学工学部環境社会工学科　学生員　蓮池翔太郎　（Shotaro Hasuike）
北海道大学大学院工学研究院　フェロー　蟹江俊仁　（Shunji Kanie）
大成建設（株）　正員　鈴木俊一　（Shunichi Suzuki）

1　研究背景と研究目的

混合ハイブリッド有限要素法(MHF)とは，目的変数を複数与える混合形式で解析を進めるという点と, その支配方程式を異なる離散化手法で解析を進めるという 2 つの点で，一般的な非退化形式の有限要素法(FEM)と大きく異なっている．例えば，地下水流動問題に一般的な FEM を適用した場合，目的変数は圧力（水頭）のみとなり，各節点に与えられる．そのため，接合境界面における流速ベクトルは，得られた圧力を用いて事後算出することとなるが, 境界面における連続性を保証することが困難であり, 物性値（透水係数）が極端に異なり流出・流入が少ない要素においても流速ベクトルが発生する可能性がある．一方，混合ハイブリッド有限要素法では, 付加変数の増加という欠点を持つが, 境界上の圧力と流速を目的変数にすることで, このような現象を回避できる. 地下水流動解析における有用性は国内では鈴木らによって指摘されているが, その概念や特徴についてはまだ研究事例が少ない．そのため，本研究では，MHF の概念を整理し，FEM との相違点を，基礎的な二次元 Laplace 方程式で確認することが目的である．

2　二次元 Laplace 方程式と混合形式

一般的な二次元 Laplace 方程式は次のように表される．

$$k\nabla^2\Phi = 0 \qquad \text{式(2-1)}$$

これは目的変数が一つしかなく, 目的変数をこれ以上消去できない形という意味で非退化形式と呼ばれる. 離散化して近似を行う際に, 目的変数の高次の微分値が登場することにより, 形状関数に対する制約やそれら微分値の境界上での連続性が保障されないというデメリットはあるが, マトリックスサイズの増加がなく, 計算負荷が少ないというメリットがある．一方，次のような表し方もできる．

$$k\nabla\Phi = -\bar{q} \qquad \text{（ダルシー則）} \qquad \text{式(2-2)}$$

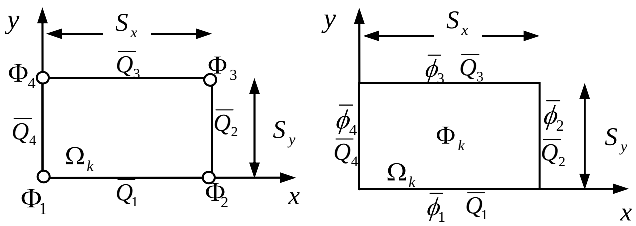
$$\nabla\bar{q} = 0 \qquad \text{（質量保存則）} \qquad \text{式(2-3)}$$

境界条件は

$$\Phi = \overline{\Phi} \quad on \quad \Gamma_\phi \qquad \text{(Dirichlet)} \qquad \text{式(2-4)}$$

$$q = \bar{q} \quad on \quad \Gamma_q \qquad \text{(Neuman)} \qquad \text{式(2-5)}$$

これらは，目的変数 Φ に対し，その微分値である q も目的変数として扱うために混合形式と呼ばれる. 目的変数の増加によって，マトリックスサイズの増加や, 数値計算上の工夫が必要になる等のデメリットがあるが, 目的変数の微分値も直接離散化方程式中に与えることができるというメリットがある．



(a)　complete の図　　(b)　hybrid の図

図 1　定式化の前提条件

3　混合形式有限要素法の離散化

3-1 完全混合型有限要素法(Complete-mixed FEM)

完全混合型有限要素法とは，図 1-(a)のように変数を定義し，領域を通して同一の離散化手法で近似する完全(complete)な定式化によって解を求める方法である．最も特徴的なことは，目的関数に Φ と $\overline{Q}$ を与え，Φ は節点で，$\overline{Q}$ は境界上で定義することである．つまり，適用する形状関数は、Φ に対して $\left[N^\phi\right]$，$\overline{Q}$ に対して $\left[N^q\right]$ と異なるものを使用する．重み関数 δw に関しては， $\left[N^\phi\right]$，$\left[N^q\right]$ のいずれかを用いるものとする．また，混合型の形状関数の特徴として $\left[N^q\right]$ は $\left[N^\phi\right]$ よりも一次少ない関数である．したがって，離散化時には $\left[N^q\right]$ の微分形が出ないように注意しなければならない．その結果,式(2-3)の離散化には Greenの定理を用いる．以上のことを踏まえ，式(2-2)と式(2-3)を離散化すると次のように表される．

$$\begin{bmatrix} 0 & [C] \\ [C]^T & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Phi\} \\ \{\overline{Q}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{f\} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{式(3-1)}$$

ここで,

$$[C] = \int_\Omega \left(\nabla^T \left[N^\phi\right]\right)^T \left[N^q\right] d\Omega \qquad \text{式(3-2)}$$

$$[C]^T = \int_\Omega \left[N^q\right]^T \nabla^T \left[N^\Phi\right] d\Omega \qquad \text{式(3-3)}$$

$$[M] = -\frac{1}{k}\int_\Omega \left[N^q\right]^T \left[N^q\right] d\Omega \qquad \text{式(3-4)}$$

$$\{f\} = -\oint_{S_k} \left[N^\phi\right]^T \bar{q}\, dS - \int_{\Omega_k} \left[N^\phi\right]^T \overline{Q}\, d\Omega \qquad \text{式(3-5)}$$

3-2 混合ハイブリッド有限要素法(Mixed-hybrid FEM)

混合ハイブリッド有限要素法(MHF)とは，２つの支配方程式で異なる離散化手法を用い，境界上でのみ近似変数を決定する解法である．つまり，不完全（incomplete）な定式化であり，二次元 Laplace 方程式の場合ダルシー則には線形の形状関数による有限要素法(FEM)を，質量保存則には有限体積法(FVM)を用いて離散化する．

定式化にあたり，図 1-(b)のような要素を考える． x，y の直交座標に沿った矩形領域 Ω_k に要素分割されているものとし，個々の矩形領域 Ω_k 内では，Φ は代表値 Φ_k で一定とする．最も特徴的なことは，目的関数を節点で与えるのではなく，個々の領域の境界で設定することである．境界上の値を $\bar{\phi}_i$ または $\bar{q}_i$ で表し，さらに当該境界面からの流入量を $\overline{Q}_i$ と表す．つまり,要素境界面で $\overline{Q}$ を完全に適合させることで，精度の向上を図っている．また用いる形状関数は，境界上の $\overline{Q}$ を補間することで，領域 Ω_k 内の任意の位置 (x,y) における流速ベクトル $\bar{q}(x,y)$ を推定することができるRaviart-Thomas型の形状関数とし，次のように与えられる．

$$[w]=\begin{bmatrix} w_{1,x} & w_{2,x} & w_{3,x} & w_{4,x} \\ w_{1,y} & w_{2,y} & w_{3,y} & w_{4,y} \end{bmatrix} =\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{x}{S_xS_y} & 0 & \dfrac{(x-S_x)}{S_xS_y} \\ \dfrac{(y-S_y)}{S_xS_y} & 0 & \dfrac{y}{S_xS_y} & 0 \end{bmatrix} \quad 式(3\text{-}6)$$

$$\bar{q}(x,y)=[\overline{Q}][w]^T \quad 式(3\text{-}7)$$

ここで $\overline{Q}$ はスカラーであると同時に，一般的な正負の定義と同様に，領域からの流出方向を正としている．この形状関数の最大の特徴は，ベクトルであること，また次元を持っているということである．まずベクトルであることで, q_x， q_y に対して，直接補間できるというメリットがある．また，次元を持っている理由は，境界上において $\overline{Q}$ を与えた際に,すでに流入する辺長の影響を見込んでいるためで,内部における流速ベクトル $\bar{q}$ を表現するためには，流入する辺長で除してやる必要があるためである．

以上のことを踏まえ，まず式(2-2)を離散化する． Green の定理を用いて弱形式化を行い，Raviart-Thomas 型の形状関数で補間すると次のように表される．

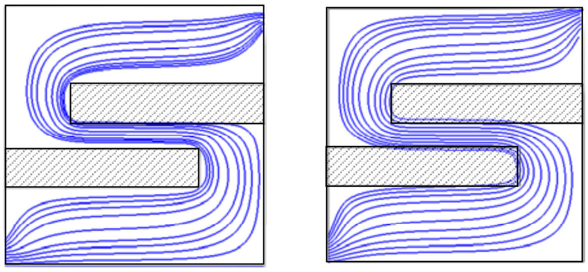
$$[M]\{\overline{Q}\}=k\Phi_k-k\{\bar{\phi}\} \quad 式(3\text{-}8)$$

ここで，

$$[M]=\int_{\Omega_k}[w]^T[w]d\Omega_k \quad 式(3\text{-}9)$$

次に，式(2-3)を離散化する．質量保存則には FVM を適用する．このように混合形式で表現された支配方程式に対して,異なる離散化手法を適用することがハイブリッド法の特徴である．流量を全ての境界面で定義した上で，FVM を用いた結果，領域内での流出入量のバランスは完全に保持されることになる．したがって次の式が求められる．

$$\sum_i^n \overline{Q}_i=0 \quad （i\ は辺の番号） \quad (3\text{-}10)$$



(a)MHF の流線図　　(b)FEM の流線図

図 2　流線図の比較

式(3-10)と式(3-8)から要素の各境界からの流出入量 $\{\overline{Q}\}$ は次のように表される．

$$\{\overline{Q}\}=k\Phi_k[M]^{-1}-k[M]^{-1}\{\bar{\phi}\} \quad 式(3\text{-}11)$$

式(3-10)と式(3-11)より，連立方程式を解くと，

$$\Phi_k=\frac{1}{4}\left(\bar{\phi}_1+\bar{\phi}_2+\bar{\phi}_3+\bar{\phi}_4\right) \quad 式(3\text{-}12)$$

したがって，領域内の代表値 Φ_k は要素の境界上の $\bar{\phi}$ の平均で表されることがわかる。これらをまとめると，

$$[K]\{\bar{\phi}\}=\{\overline{Q}\} \quad 式(3\text{-}13)$$

このように $\bar{\phi}$ のみの式となり，境界条件を導入することで求めることが出来る．例えば一要素であれば，方程式が 4 つ（境界の数）なので $[K]$ は (4×4) の正方行列となる．さらに，境界条件が 4 つあるために，未知数 8 つを求めることが可能となる．

4　混合ハイブリッド有限要素法(MHF)による解析例

MHFの特徴を見るために，図 2に示すような左下から右上へと流れる地下水流動モデル(分割数 20×20)において解析を行う．斜線部で示す要素は透水係数が低い（0.01 倍）地盤である．流線図を比較すると,FEMの流線が不透水層に進入していることがわかる．これはFEMが要素の節点で Φ と q を算出しているために,不透水層の境界面における連続性を保障できていないためと思われる． 一方 MHFは境界面で与えた $\overline{Q}$ を元に q を算出するため，FEM よりも境界面での精度がよいと考えられる．この問題を解決するためには要素分割を細かくして，節点の数を増やすことが考えられるが，MHFではFEMに比べ，少ない分割数で解が収束すると考えられる．

5　まとめ

以上より，本研究の知見を整理すると次のようになる．

- 二次元の支配方程式の基本である Laplace 方程式の定式化を通し，MHF の概念を整理し，従来の FEM と異なる点を整理できた．
- 特に目的変数を節点ではなく境界上で与えることで，流速が急激に変化する点での解析精度を向上させることができることがわかった．
- 今後は基本的な方程式のみでなく，力学への応用など幅広い目的へ対応させるために，形状関数の工夫などが求められる．

参考文献

1）O.C Zienkiewicz, R.L.Taylor. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals Sixth ed.Chap11,13.

2） S.N.Atluri, R.H.Gallagher,and O.C.Zienkiwicz, editors. Hybrid and Mixed Finite Element Methods. Chap21.John Wiley & Sons, New York, 1983.