

コンピュータグラフィックス特論 (ビジュアルコンピューティング論) (エンターテインメントテクノロジー研究)

No.3

Parametric曲線

- 内挿曲線
 - Hermite内挿曲線
 - 3次内挿spline曲線
- 近似曲線
 - Bezier曲線
 - B-spline曲線
 - NURBS

Hermite内挿曲線(1)

- 始点と終点での位置vector, 接線vectorを内挿する

$$P(t) = P_0H_0^3(t) + V_0H_1^3(t) + V_1H_2^3(t) + P_1H_3^3(t)$$

$$H_0^3(t) = (2t+1)(1-t)^2$$

$$H_1^3(t) = t(1-t)^2$$

$$H_2^3(t) = -t^2(1-t)$$

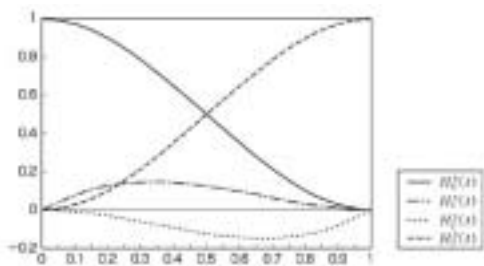
$$H_3^3(t) = t^2(3-2t)$$

Hermite内挿曲線(2)



CG-ARTS

Hermite内挿曲線(3)



CG-ARTS

Hermite内挿曲線(4)

微分して 微分して
 $t=0$ $t=0$ $t=1$ $t=1$

$H_0^3(t)$	1	0	0	0
$H_1^3(t)$	0	1	0	0
$H_2^3(t)$	0	0	1	0
$H_3^3(t)$	0	0	0	1

3次内挿Spline曲線

- Hermite内挿曲線を接続する
- 接続点で、位置と傾きが連続するように設定する
- 曲率が連続するような接続も可能

Bezier曲線

- 2次Bezier曲線
$$B(t) = (1-t)^2 B_0 + 2t(1-t)B_1 + t^2 B_2$$
- 3次Bezier曲線
$$B(t) = (1-t)^3 B_0 + 3t(1-t)^2 B_1 + 3t^2(1-t)B_2 + t^3 B_3$$

2次Bezier曲線

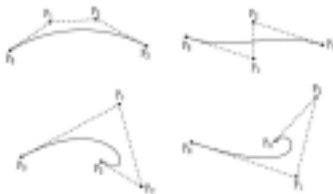
- 3個の制御点を用いて定義する
$$B^{(2)}(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

2次Bezier曲線の誘導

$$\begin{aligned} B(t) &= (1-t)(P_0, P_1 \text{ によるBezier曲線}) \\ &\quad + t(P_1, P_2 \text{ によるBezier曲線}) \\ &= (1-t)\{(1-t)P_0 + tP_1\} + t\{(1-t)P_1 + tP_2\} \\ &= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \end{aligned}$$

3次Bezier曲線

- 4個の制御点を用いて定義する
$$B^{(3)}(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3$$

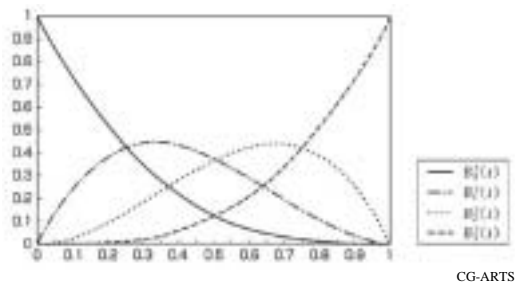


CG-ARTS

3次Bezier曲線の誘導

$$\begin{aligned} B(t) &= (1-t)(P_0, P_1, P_2 \text{ によるBezier曲線}) \\ &\quad + t(P_1, P_2, P_3 \text{ によるBezier曲線}) \\ &= (1-t)\{(1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2\} \\ &\quad + t\{(1-t)^2 P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2 P_3\} \\ &= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3 \end{aligned}$$

3次Bezier曲線の重み関数



3次Bezier曲線の性質

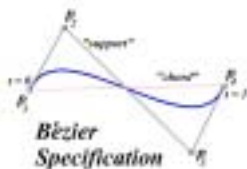
$$B(0) = P_0, \quad B(1) = P_3,$$

$$B'(0) = 3(P_1 - P_0), \quad B'(1) = 3(P_3 - P_2)$$

- affine不変性(移動, scaling, 回転)
- 凸包性
- 直線再現性

Bézier Curves

- Similar to Hermite, but more intuitive definition of endpoint derivatives
- Four control points. two of which are knots



Bezier曲線の応用

- outline font



CG-ARTS

Bézier曲線

制御点集合:

$$P = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}, P_i \in \mathbf{R}^d, d = 2, 3$$

制御点集合Pによって定義される

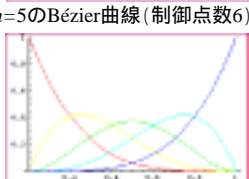
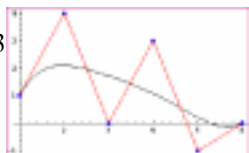
Bézier曲線:

$$\sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t)$$

ここで、 $B_i^n(t)$ はBernstein関数:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, i = 0, \dots, n$$

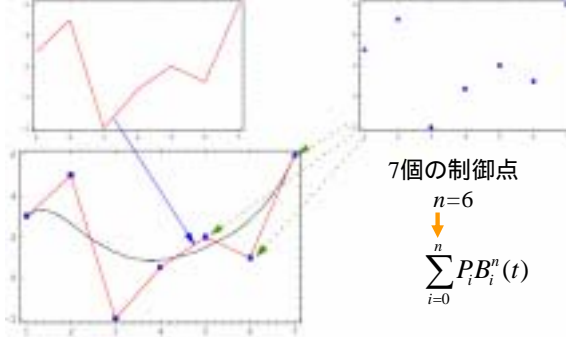
n は多項式の次数



Bézier曲線

制御多角形

制御点



Bernstein関数

Bernstein関数:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, i=0, \dots, n$$

n : 次数
 i : インデックス
 t : 変数

Bernstein関数の性質:

$$B_0^n(0) = B_n^n(1) = 1, B_i^n(0) = B_i^n(1) = 0 \quad (i=1, \dots, n-1)$$

$B_i^n(t)$ は $[0,1]$ の中で $t=i/n$ において唯一の最大値をとる

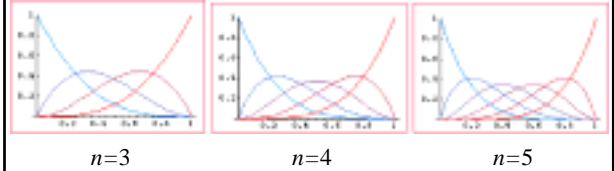
正値性: $B_i^n(t) \geq 0$ in $[0,1]$

対称性: $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$

$$\text{正規性: } \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$$

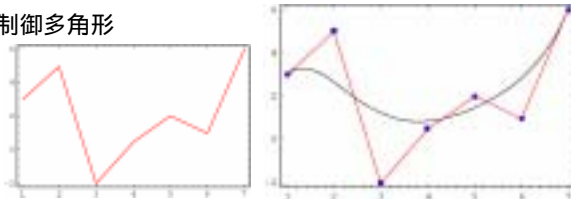
Bernstein関数

Bernstein関数の例:



Bézier曲線の性質

制御多角形



Bézier曲線の概形は、制御点を接続してできる制御多角形により定められる

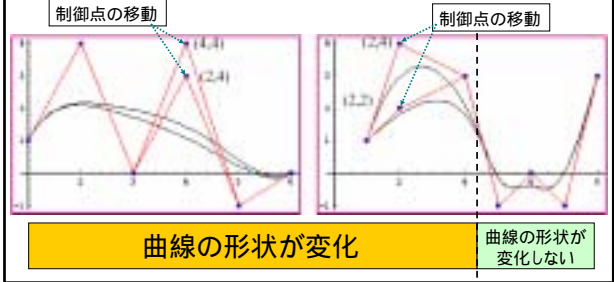
Bézier曲線は形状デザインに広く用いられる

Bézier曲線の性質

局所的制御 vs. 大域的制御

Bézier曲線は大域的に制御される: 一つの制御点の移動により曲線全体の形状が変化

B-spline曲線は局所的制御が可能: 一つの制御点の移動により曲線の一部の形状が変化



Bézier Curves

- The derivative values of the Bezier Curve at the knots are dependent on the adjacent points

$$\nabla p_1 = 3(p_2 - p_1)$$

$$\nabla p_4 = 3(p_4 - p_3)$$

- The scalar 3 was selected just for this curve

Bézier曲線の性質

- 端点一致性:
 - Bézier曲線の両端点は両端の制御点に一致し、そこでの接ベクトルは $P_1 - P_0, P_n - P_{n-1}$ にそれぞれ平行になる
- 凸包性:
 - Bézier曲線が制御点の構成する凸包の内部に存在
- 変動減少性:
 - 直線とBézier曲線の交差回数は、直線と制御多角形の交差回数以下 (3次元Bézier曲線の場合は「直線」を「平面」におきかえる)

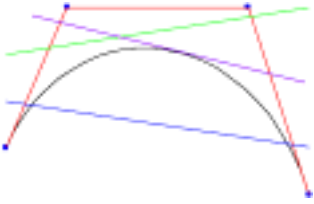
Bézier曲線の性質

• 変動減少性:

- 直線とBézier曲線の交差回数は、直線と制御多角形の交差回数以下(3次元Bézier曲線の場合は「直線」を「平面」におきかえる)

直線の交差回数

曲線:0	多角形:2
曲線:1	多角形:2
曲線:2	多角形:2

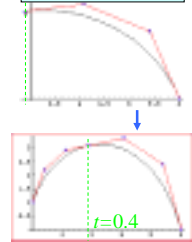
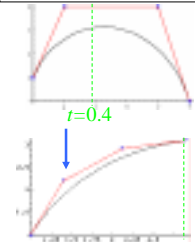


Bézier曲線の性質

Bézier曲線は $t = t_0$ において、そこに対応する点で接続する二つのBézier曲線に分割可能

元の曲線: 制御点数4

右側: 制御点数4



左側: 制御点数4

分割後の曲線: 制御点数7

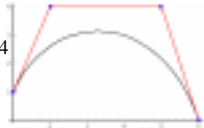
Bézier曲線の性質

次数の増加:

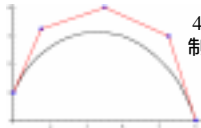
制御点集合 $P = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ により定義される n 次Bézier曲線を、制御点集合 $Q = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$ により定義される $n+1$ 次Bézier曲線で表すことができる

$$Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \quad i=0, \dots, n+1, \quad P_{-1} = P_{n+1} = 0$$

3次曲線:
制御点数4

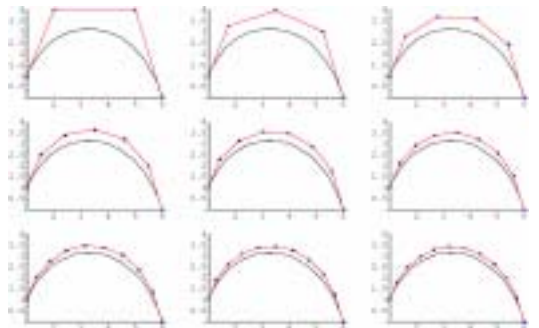


4次曲線:
制御点数5



Bézier曲線の性質

Bézier曲線の次数増加の例: $n=3$ から $n=11$



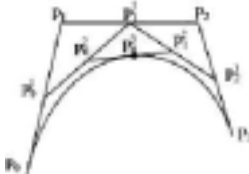
Bezier曲線の分割

(de Castljourの分割)

P_0, P_0^1, P_0^2, P_0^3 : 左側の制御多角形

$P_0^3, P_1^1, P_2^1, P_3^1$: 右側の制御多角形

P_0^3 : t_s での値, すなわち $P(t_s)$



Bezier曲線の分割

(de Castljourの分割)

3次Bezier曲線を $t=t_s$ で分割

Bezier多角形の3辺を $t_s:1-t_s$ に分割した点: P_0^1, P_1^1, P_2^1

P_0^1, P_1^1, P_2^1 の2つの辺を $t_s:1-t_s$ に分割した点: P_0^2, P_1^2

最後に P_0^2, P_1^2 を $t_s:1-t_s$ に分割した点: P_0^3

$$P_0^1 = P_0 + t_s(P_1 - P_0) \quad P_2^2 = P_0^1 + t_s(P_1^1 - P_0^1)$$

$$P_1^1 = P_1 + t_s(P_2 - P_1) \quad P_2^1 = P_1^1 + t_s(P_2^1 - P_1^1)$$

$$P_2^1 = P_2 + t_s(P_3 - P_2) \quad P_0^3 = P_0^2 + t_s(P_1^2 - P_0^2)$$

Bézier vs. Hermite

- We can write our Bezier in terms of Hermite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \frac{dx_1}{dt} & \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} & \frac{dy_2}{dt} \end{bmatrix}}_{G_{Hermite}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}}_{G_{Bezier}}$$

Bézier vs. Hermite

- Now substitute this in for previous Hermite

$$\begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \\ c_x & c_y \\ d_x & d_y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_{Hermite}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}}_{G_{Bezier}} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

M_{Bezier}

Bézier Basis and Geometry Matrices

- Matrix Form

$$\begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \\ c_x & c_y \\ d_x & d_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

M_{Bezier} G_{Bezier}

- But why is M_{Bezier} a good basis matrix?

Bézier Blending Functions

- Look at the blending functions

$$p(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 \\ 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

- This family of polynomials is called order-3 Bernstein Polynomials

- $C(3, k) t^k (1-t)^{3-k}; 0 \leq k \leq 3$
- They are all positive in interval $[0,1]$
- Their sum is equal to 1

有理Bézier曲線

良く知られている曲線、曲面の中には多項式では表現できないものが数多くある

例. 円、楕円、双曲線、円柱、円錐...

全ての円錐曲線は、有理関数を用いて表すことができる

有理Bézier曲線:

$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^n P_i w_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} \quad w_i \in \mathbf{R}, i=0, \dots, n \text{ は重み}$$

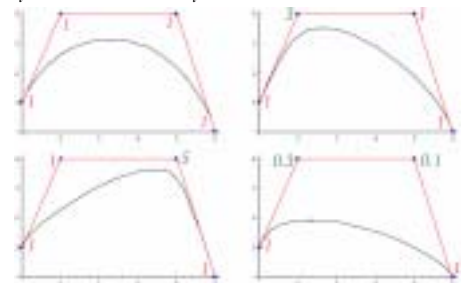
全ての i で $w_i = 1$ ならば、通常のBézier曲線になる

有理Bézier曲線

重みの変化:

$w_i > 1 \rightarrow$ 曲線が P_i に近づく

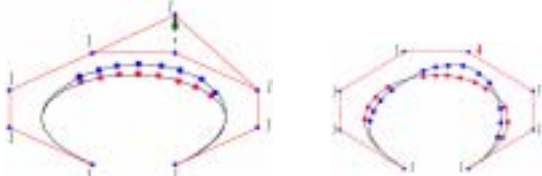
$w_i < 1 \rightarrow$ 曲線が P_i から離れる



有理Bézier曲線

重みの影響:

重みの変化による曲線の変化は、制御点移動によるそれとは異なる



非有理Bézier曲線の制御点の移動 有理Bézier曲線の重みの変更

- 重み/制御点位置 変更前の曲線
- 重み/制御点位置 変更後の曲線

有理Bézier曲線

有理Bézier曲線は円錐曲線を表現するのに便利で、航空機産業において広く用いられている

円錐曲線上の点 $c(t)$ について、以下を満たす実数 w_0, w_1, w_2 の点 c が存在する:

$$c(t) = \frac{w_0 P_0 B_0^2(t) + w_1 P_1 B_1^2(t) + w_2 P_2 B_2^2(t)}{w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)}$$

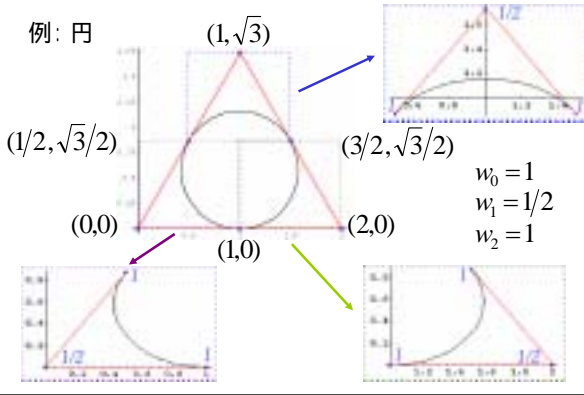
$w_0 = w_2 = 1$ とし、 $s = w_1 / (1 + w_1)$ と定義すると、 c は:

- $s = 1/2 \rightarrow$ 放物線の弧
- $s < 1/2 \rightarrow$ 楕円の弧
- $s > 1/2 \rightarrow$ 双曲線の弧



有理Bézier曲線

例: 円



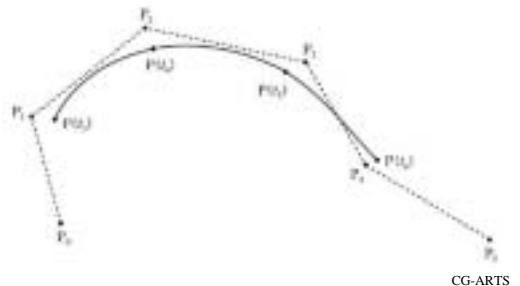
有理Bézier曲線

参考文献:

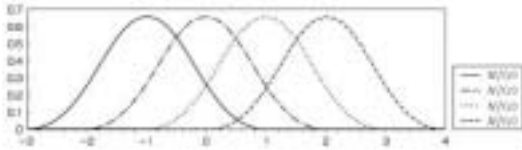
- Farin, G. *Curves and Surfaces for CAGD*. Academic Press, 3rd. Edition, 1993 (Chapters 14 and 15).
- Hoschek, J. and Lasser, D. *Fundamentals of CAGD*. A. K. Peters, 1993 (Chapter 4).
- Anand, V. *Computer Graphics and Geometric Modeling for Engineers*. John Wiley & Sons, 1993 (Chapter 10).

B-Spline、NURBS曲線と曲面

B-spline曲線(1)



B-spline曲線(2)



CG-ARTS

B-Spline曲線

ノット列:

非減少数列 $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{m-1} \leq t_m$

ただし、 t_i と同じ値は高々 k 回現われる

k : B-splineの位数

$k-1$: B-splineの次数

位数 k (次数 $k-1$), i 番目のB-spline関数:

$$N_{i1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad k=1$$

$$N_{ik}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t_i}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \quad k>1$$

B-Spline曲線

B-spline関数 $N_{ik}(t)$ の性質:

- $N_{ik}(t) > 0$ for $t_i \leq t \leq t_{i+k}$ 正值性
- $N_{ik}(t) = 0$ for $t_0 \leq t \leq t_i, t_{i+k} \leq t \leq t_{n+k}$
- $\sum_{i=0}^n N_{ik}(t) = 1$ $t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$ 正規性

B-Spline曲線

制御点集合 (de Boor点集合) P_i ($i=0, \dots, n$) と

ノット列 $T = [t_0, t_1, \dots, t_{m-1}, t_m]$ により定義される

位数 k のB-spline曲線:

$$X(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{ik}(t) \quad N_{ik}(t): T \text{ により定まる次数 } k-1 \text{ の B-spline関数}$$

B-spline曲線の性質:

- 多項式の次数が $k-1$ を超えない
- $k-2$ 階微分まで連続

B-Spline曲線

ノット数、制御点数、位数の関係:

ノット数 制御点数 位数

$$m+1 = (n+1) + k$$

$$m = n+k$$

ノット列の分類:

- 周期的 / 一様 $t_i - t_{i-1} = C$ (定数)
例. $n=3, k=3, T=[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$
B-spline関数はそれぞれ他を平行移動したものになる
- 非周期的 $\text{両端の } k \text{ (位数) 個が同じ値}$
例. $n=3, k=3, T=[0, 0, 0, 1, 2, 2, 2]$
- 非一様 **NURBS**

B-Spline曲線

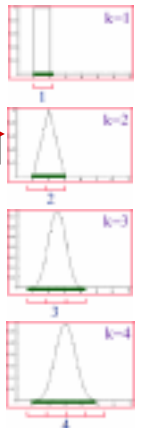
ノット列の分類:

類: 周期的 / 一様 例. $T=[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$

- 基底関数の影響範囲は k 区間 $N_{2k}(t)$
 - パラメータの範囲: $(k-1) \leq t \leq (n+1)$
- 非周期的 例. $T=[0, 0, 0, 1, 2, 2, 2]$
 - 曲線の両端点が両端の制御点と一致
 - パラメータの範囲: $0 \leq t \leq n-k+2$
 - 非一様 (NURBS) 例. $T=[0, 1, 2.5, 3, 3, 3, 4]$

以下の条件のもとで、B-spline曲線は Bézier曲線に帰着

- 制御点数 = 位数
- ノット列が非周期的



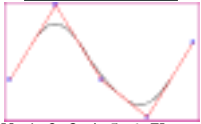
B-Spline曲線

B-spline曲線の例:

制御点数: $n = 5$ [(1,2),(2,4),(3,2),(4,1),(5,3)]

二次B-spline: $k = 3$

周期的 / 一樣

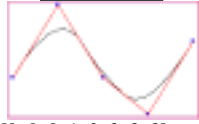


$T = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$

パラメータの範囲: $2 \leq t \leq 5$

曲線の両端点は両端の制御点と一致しない

非周期的



$T = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3]$

パラメータの範囲: $0 \leq t \leq 3$

曲線の両端点は両端の制御点と一致

if $n = k \rightarrow$ Bézier曲線

B-spline Basis Matrix

- Formulate 16 equations to solve the 16 unknowns
- The 16 equations enforce the C_0 , C_1 , and C_2 continuity between adjoining segments, Q

$$M_{B-spline} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

B-Spline

- Points along B-Spline are computed just as with Bezier Curves

$$Q_i(t) = U M_{B-spline} P$$

$$Q_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ p_{i+1} \\ p_{i+2} \\ p_{i+3} \end{bmatrix}$$

有理B-Spline曲線

有理B-spline曲線:

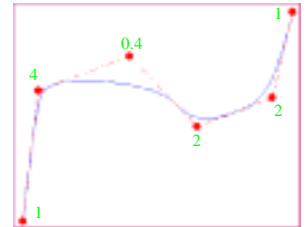
$$R(t) = \frac{\sum_{i=0}^n P_i w_i N_{ik}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{ik}(t)} \quad w_i \in \mathbf{R}, i=0, \dots, n \text{ は重み}$$

有理B-spline曲線の

例制御点数: $n = 5$

位数: $k = 3$

$T = [1, 1, 1, 3, 4, 7, 9, 9, 9]$



有理B-Spline曲線

有理B-spline曲線の例: 円

円を単一のB-spline曲線で表現することができる

制御点集合:

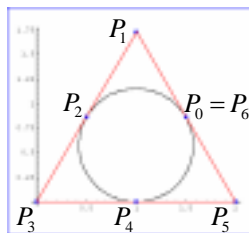
$\{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$

ノット列:

$T = [0, 0, 1/3, 1/3, 2/3, 2/3, 1, 1, 1]$

重み:

$w = [1, 1/2, 1, 1/2, 1, 1/2, 1]$



NURBS (非一樣有理B-Spline)

NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines)

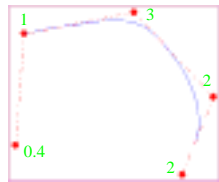
NURBSは今日の形状デザインで最も広く使われている曲線で、多くのCAD/CAM, CGシステムに組み込まれている

NURBSは、非有理B-spline、有理/非有理 Bézier曲線を特別なケースとして含む

しかし、NURBSがどのように機能しているのかを理解するのは難しい...

Non-Uniform Rational B-Splines
?
Nobody Understands Rational B-Splines

$k = 3$
 $n = 5$
 $T = [1, 1, 4, 4, 6, 9, 11, 11]$



NURBS (非一様有理B-Spline)

参考文献:

Piegl, L. and Tiller, W. *The NURBS Book*,
2nd. Edition, Springer Verlag Berlin, 1997.

NURBS

- Nonuniform Rational B-splines
- B-spline曲線の重み関数を拡張
 - 多項式関数 有理式関数
- B-spline曲線の区間幅を拡張
 - 一定幅 可変幅
- 円錐曲線も厳密に表現できる

Splinesの描画

- Horner's Method
- Incremental (Forward Difference) Method
- Subdivision Methods

Horner's Method

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$
$$x(t) = [(a_x t + b_x)t + c_x]t + d_x$$

- Three multiplications
- Three additions

Forward Difference

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$
$$x_k = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d$$
$$x_{k+1} = a_x (t_k + \delta)^3 + b_x (t_k + \delta)^2 + c_x (t_k + \delta) + d_x$$
$$x_{k+1} - x_k = \Delta x_k = 3a_x \delta t_k^2 + (3a_x \delta^2 + 2b_x \delta) t_k + (a_x \delta^3 + b_x \delta^2 + c_x \delta)$$

- But this still is expensive to compute
 - Solve for change at k (Δ_k) and change at k+1 (Δ_{k+1})
 - Boot strap with initial values for x_0 , Δ_0 , and Δ_1
 - Compute x_3 by adding $x_0 + \Delta_0 + \Delta_1$

Subdivision Methods

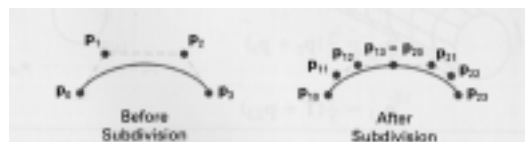


Figure 10-52

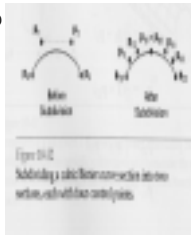
Subdividing a cubic Bézier curve section into two sections, each with four control points.

- [Bezier](#)

Rendering Bezier Spline

```

public void spline(ControlPoint p0, ControlPoint p1,
                  ControlPoint p2, ControlPoint p3, int pix)
{
    float len = ControlPoint.dist(p0,p1) +
ControlPoint.dist(p1,p2);
        + ControlPoint.dist(p2,p3);
    float chord = ControlPoint.dist(p0,p3);
    if (Math.abs(len - chord) < 0.25f) return;
    fatPixel(pix, p0.x, p0.y);
    ControlPoint p11 = ControlPoint.midpoint(p0, p1);
    ControlPoint tmp = ControlPoint.midpoint(p1, p2);
    ControlPoint p12 = ControlPoint.midpoint(p11, tmp);
    ControlPoint p22 = ControlPoint.midpoint(p2, p3);
    ControlPoint p21 = ControlPoint.midpoint(p22, tmp);
    ControlPoint p20 = ControlPoint.midpoint(p12, p21);
    spline(p20, p12, p11, p0, pix);
    spline(p3, p22, p21, p20, pix);
}
    
```



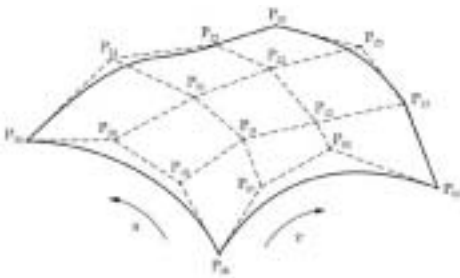
曲面の表現

- 多面体(近似)
- 陽関数曲面 $z = f(x, y)$
- 陰関数曲面 $f(x, y, z) = 0$
- parametric曲面

$$x = f(u, v), y = g(u, v), z = h(u, v),$$

$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

双3次Bezier曲面(1)



CG-ARTS

双3次Bezier曲面(2)



CG-ARTS



Bézier曲面

制御点集合:

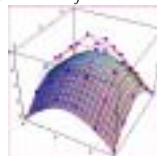
$$P = \{ \{P_{00}, P_{01}, \dots, P_{0n}\}, \{P_{10}, P_{11}, \dots, P_{1n}\}, \dots, \{P_{m0}, P_{m1}, \dots, P_{mn}\} \}$$

$$P_{ij} \in \mathbf{R}^3, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

制御点集合Pによって定義されるBézier曲面:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)$$

は、 $B_i^m(u)$ (m)次、 $B_j^n(v)$ (n)次のBernstein関数



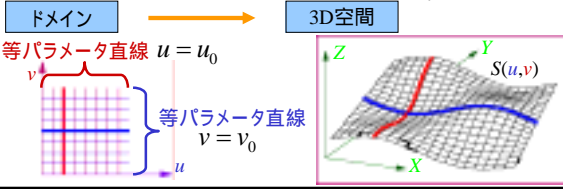
x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z		
0	0	1	0	1	2	0	2	3	0	3	0	4	2	0	5	1
1	0	2	1	3	1	2	4	1	3	4	1	4	3	1	5	2
2	0	3	2	4	2	5	2	5	2	5	2	4	4	2	5	3
3	0	4	3	5	3	6	3	6	3	5	3	4	4	3	5	4
4	0	5	4	6	4	7	4	7	4	6	4	4	4	4	5	5
5	0	6	5	7	5	8	5	8	5	7	5	4	4	5	5	6

Bézier曲面

一方の変数を固定した等パラメータ直線 ($u = u_0$ または $v = v_0$) は、Bézier曲線を定めることに注意

$$S(u_0, v) = \sum_{j=0}^n b_j B_j^n(v) \quad \text{制御点: } b_j = \sum_{i=0}^m P_{ij} B_i^m(u_0)$$

$$S(u, v_0) = \sum_{i=0}^m c_i B_i^m(u) \quad \text{制御点: } c_i = \sum_{j=0}^n P_{ij} B_j^n(v_0)$$



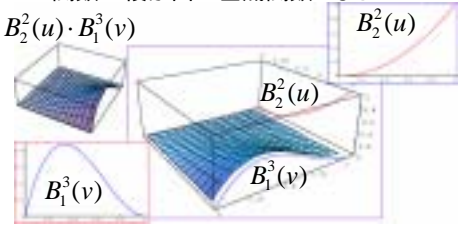
Bézier曲面

$$\text{Bézier曲面の定義: } S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)$$

それぞれの項は、制御点と二つの一変数Bernstein関数の積から得られる

Bernstein関数の積が面の基底関数となる

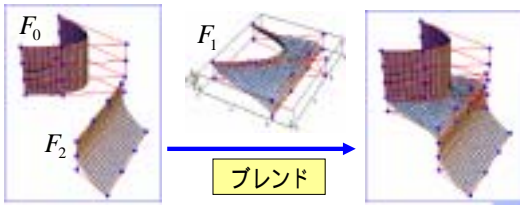
$$\text{例: } B_2^2(u) \cdot B_1^3(v)$$



Bézier曲面

複数の曲面のブレンド

ド: 単一のBézier曲面では与えられた点集合を十分に近似できない場合、複数のパッチをつなぎ合わせて一つの曲面を表現する



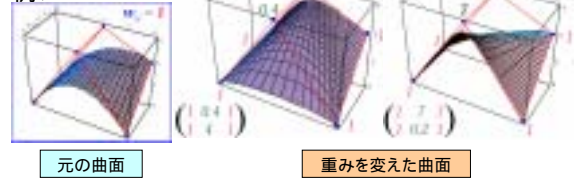
二つのBézierパッチ F_0 と F_2 をBézierパッチ F_1 により C^1 接続

有理Bézier曲面

有理Bézier曲面:

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} w_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)} \quad w_{ij} \in \mathbf{R}, \begin{matrix} i=0, \dots, m \\ j=0, \dots, n \end{matrix} \text{は重み}$$

例:



B-Spline曲面

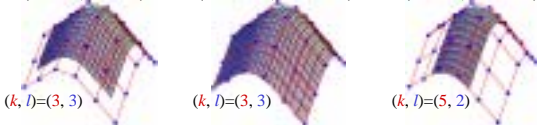
u 方向の位数 k , v 方向の位数 l のB-spline曲面:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} N_{ik}(u) N_{jl}(v)$$

P_{ij} : 制御点 (i 方向と j 方向でネットを形成)

$N_{ik}(u), N_{jl}(v)$: それぞれノット列 $U = [u_0, u_1, \dots, u_{p-1}, u_p]$, $V = [v_0, v_1, \dots, v_{q-1}, v_q]$ により定義されるB-spline関数 ($p = m+k, q = l+n$)

(周期的, 周期的) (非周期的, 非周期的) (周期的, 非周期的)



B-Spline曲面の性質

- 端点一致性:** もし $U = [0, \dots, 0, 1, \dots, 1]$ かつ $V = [0, \dots, 0, 1, \dots, 1]$ ならば、面 S の4つの端点は制御点の4つの端点に一致する
 $S(0,0) = P_{00}, S(1,0) = P_{m0}, S(0,1) = P_{0n}, S(1,1) = P_{mn}$
- もし $m=k, n=l, U = [0, \dots, 0, 1, \dots, 1], V = [0, \dots, 0, 1, \dots, 1]$ を全て満たすならば、面 S はBézier曲面になる
- アフィン不変性:** 面 S にアフィン変換を施した結果と、制御点にアフィン変換を施した結果が一致する
- 強凸包性:** もし (u, v) が $[u_r, u_{r+1}] \times [v_s, v_{s+1}]$ に属するならば、面 S は制御点 $P_{ij} (r-k \leq i < r, s-l \leq j < s)$ が作る凸包に含まれる
- 局所性:** 制御点 P_{ij} が動かされたとき、面 S の形状は ij の範囲のみ変化する
- 面 S の等パラメータ曲線は、Bézier曲面のそれから類推されるような振る舞いを見せる

有理B-Spline曲面

u 方向の位数 k , v 方向の位数 l の有理B-spline曲面:

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} w_{ij} N_{ik}(u) N_{jl}(v)}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} N_{ik}(u) N_{jl}(v)}$$

$w_{ij} \in \mathbf{R}$ は重み
 他は非有理の場合と同様

全ての重みが 1 ならば、非有理B-spline曲面に帰着

有理B-spline曲面はNURBS曲面を特別なケースとして含むが、有理B-spline曲面とNURBS曲面を同一視する著者もいる

産業への応用

