電気回路学基礎
2018-06-30 版

大阪市立大学大学院　工学研究科
白藤　立

目次

第 1 章

直流回路の復習

本章の内容については，既に中学・高校にて学習済であると想定している．本章の開始前に，章末の基礎知識確認用問題をまずやってもらう予定である．なお，本章の**豆知識**に記した回路図上の「電流の向き」,「電圧の向き」の表し方，並びに電圧に関する「起電力と電圧降下(の違い)」についても目を通しておいて欲しい．

1.1　オームの法則

図 1.1 のように，抵抗 R の両端にかかる電圧を V，そこに流れる電流を I とするとき，以下の関係式が成り立つ．これを**オームの法則**という．

$$V = RI. \tag{1.1}$$

1.2　レジスタンスとコンダクタンス

電流の流れにくさを表す指標が抵抗（単位：Ω, オーム）であり，一般的に記号 R で表される．抵抗の逆数を**コンダクタンス**（単位：S, ジーメンス）といい，電流の流れやすさを表す指標となる．一般的に記号 G で表される．

$$G = \frac{1}{R}. \tag{1.2}$$

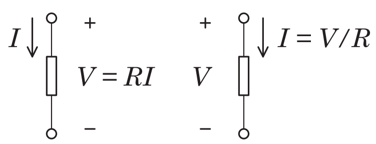


図 1.1 オームの法則.

1.3　直列接続

抵抗値 R_1, R_2, R_3 の抵抗を**図 1.2** に示すように直列接続したときの合成抵抗値 R_S は次式で与えられる．

$$R_S = R_1 + R_2 + R_3. \tag{1.3}$$

この関係の基礎となっている原理原則は以下の通りである．

- **1 本の電線を流れる電流はどこも同じである.**

$$I = \frac{V_1}{R_1}, \quad I = \frac{V_2}{R_2}, \quad I = \frac{V_3}{R_3}. \tag{1.4}$$

- **複数の回路素子を直列接続したときの全体の電圧降下は個々の回路素子の電圧降下の和である．また，ループを形成しているとき，起電力の総和は電圧降**

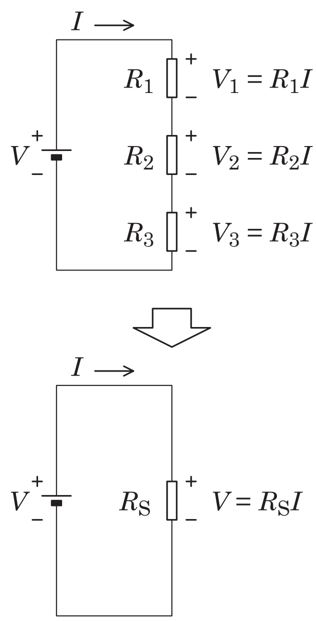


図 1.2 抵抗の直列接続.

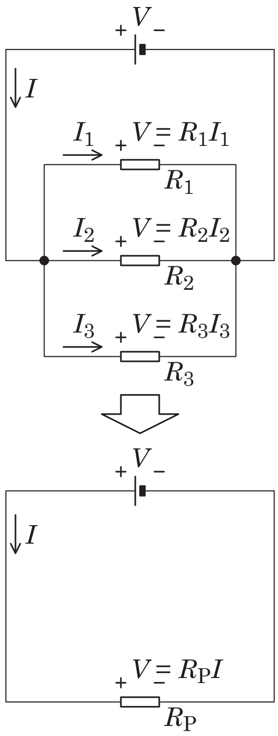


図 1.3 抵抗の並列接続.

下の総和に等しい.

$$V = V_1 + V_2 + V_3. \tag{1.5}$$

これらの関係と合成抵抗 R_S を用いたオームの法則 $V = R_SI$ から，式 (1.3) が導き出される．この式を頭に記憶するのではなく，上記の二つの理屈 (原理原則) を理解して欲しい.

1.4 並列接続

抵抗値 R_1, R_2, R_3 の抵抗を**図 1.3** に示すように並列接続したときの合成抵抗値 R_P は次式で与えられる.

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \tag{1.6}$$

この関係の基礎となっている原理原則は以下の通りである.

- 同じ節点の間の電位差は同じである.

$$V = R_1I_1, \quad V = R_2I_2, \quad V = R_3I_3. \tag{1.7}$$

- ある節点に入った電流は，出る電流に等しい.

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \tag{1.8}$$

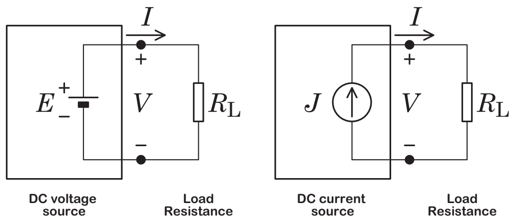


図 1.4 直流電圧源，直流電流源の回路図中の記号.

これらの関係と合成抵抗 R_P を用いたオームの法則 $V = R_PI$ から，式 (1.6) が導き出される．無理矢理 $R_P =$ に書き直せば以下のようになる.

$$R_P = \frac{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3}. \tag{1.9}$$

この場合も，この式を頭に記憶するのではなく，上記の二つの理屈 (原理原則) を理解して欲しい.

1.5 合成コンダクタンス

並列接続の場合には，抵抗の逆数であるコンダクタンスを用いると，すっきりする．各抵抗のコンダクタンスを G_1, G_2, G_3, これらを並列接続したときの合成コンダクタンスを G_P とする．使う原理原則は，前節の (1) と (2) である．個々のコンダクタについて成り立つオームの法則は以下の通りである.

$$I_1 = G_1V, \quad I_2 = G_2V, \quad I_3 = G_3V. \tag{1.10}$$

これらと，全電流が $I = I_1 + I_2 + I_3$ となることを使えば,

$$I = (G_1 + G_2 + G_3)V. \tag{1.11}$$

となる．即ち,

$$G_P = G_1 + G_2 + G_3. \tag{1.12}$$

となり，コンダクタンスの場合には，その並列合成値は，単純な代数和となる.

1.6 電圧分割と電流分岐の応用問題～電源の内部抵抗～

直流電源（電圧源や電流源）に負荷抵抗を接続した回路図は，**図 1.4** のように表される．但し，回路図における電源は電圧を出す，または，電流を出す，という基本

的性質「だけ」をもつ理想電源 (仮想電源ともいえる) であり，現実の電源とは異なる．回路図上の理想電源の非現実的な点を以下にまとめたので，確認して欲しい．

- **電圧源**

  電圧　負荷 R_L が変わっても，電源端子間の電圧 V は絶対に変わらない (現実の電源はそんなことはできない．後述のある条件が満たされれば，変わっていないように見えるが，その変化が観測するには小さすぎる，というだけのことである．)

  電流　負荷 R_L が何であっても，端子からは $I = V/R_\mathrm{L}$ の電流を出す (即ち，$R_\mathrm{L} = 0$ (短絡) なら無限大の電流を出すのである．そんな電源は実在しない．)

- **電流源**

  電流　負荷 R_L が変わっても，端子から出る電流 I は絶対に変わらない (現実の電源はそんなことはできない．後述のある条件が満たされれば，変わっていないように見えるが，その変化が観測するには小さすぎる，というだけのことである．)

  電圧　負荷 R_L が何であっても，端子間には $V = R_\mathrm{L}J$ の電圧がかかる (即ち，$R_\mathrm{L} = \infty$ (開放) なら無限大の電圧がかかるのである．そんな電源は実在しない．)

1.7　直流電圧源における内部抵抗

実際の電圧源を回路でより正しく表そうとするときには，**図 1.5** に示すように，理想電圧源に対して直列に内部抵抗 R_i が存在する，という描像を適用する．即ち，電流が I が流れることによって内部抵抗での電圧降下 $V_\mathrm{i} = R_\mathrm{i}I$ が発生し，E がそのまま端子間電圧 V に反映されないことを考慮するのである．電圧源に対してこのような描像を持つことによって，以下のことがわかる．

- **$R_\mathrm{L} \gg R_\mathrm{i}$ であるとき**

  「負荷抵抗の値が電圧源の内部抵抗の値と比較して十分に**大きい**とき」と表現する．この条件が満たされれば，電圧源は，その端子間電圧が負荷に依存しない理想電圧源に近い特性となる．

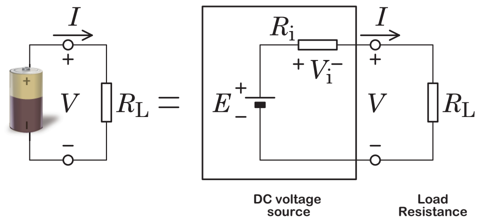


図 1.5 内部抵抗を持つ現実の直流電圧源．

- **$R_\mathrm{L} \gg R_\mathrm{i}$ でないとき**

  電圧源の端子間電圧は負荷に依存し，その電圧源を理想電圧源として扱うことはできない．

課題

上記のようになる理由を説明せよ．

略解

起電力 E は，R_i と R_L における電圧降下の和と等しいから，

$$E = V_\mathrm{i} + V \tag{1.13}$$

である．内部抵抗 R_i と負荷抵抗 R_L に関しては，以下のオームの法則が成り立つ．

$$V_\mathrm{i} = R_\mathrm{i}I, \qquad V = R_\mathrm{L}I. \tag{1.14}$$

従って，以下のようになる．

$$E = (R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L})I, \qquad I = \frac{E}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}}. \tag{1.15}$$

この I を上式の $V = R_\mathrm{L}I$ に代入すれば，

$$V = \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}}E = \frac{1}{1 + \dfrac{R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{L}}}E \tag{1.16}$$

となる．この式は，電源の端子間の電圧 V が負荷 R_L の大小によって変化することを意味する．しかし，$R_\mathrm{L} \gg R_\mathrm{i}$ であれば，$R_\mathrm{i}/R_\mathrm{L} \ll 1$ であるから，

$$V \sim E \tag{1.17}$$

となる．即ち，負荷抵抗が電圧源の内部抵抗と比較して十分に大きいとき，電源の端子間の電圧 V は負荷 R_L の大小によって大きく変動しない．

課題

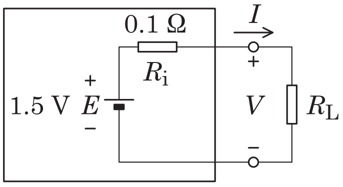


図 1.6 内部抵抗 0.1 Ω，理想起電力 1.5 V の乾電池の回路．

E = 1.5 V の乾電池に内在する内部抵抗の値を R_i = 0.1 Ω とする．このとき，負荷抵抗の値に対する端子間電圧 V と端子から流れ出る電流 I を図示し，負荷抵抗値の減少，即ち，負荷に流れる電流値の増加に伴って端子間電圧が減少することを示せ．

略解

内部抵抗 $R_i = 0.1$ Ω，理想起電力 $E = 1.5$ V の乾電池の回路は，**図 1.6** のようになる．

端子間電圧 V は次式で表される．

$$V = \frac{R_L}{R_i + R_L}E. \tag{1.18}$$

端子から流れ出る電流 I は，

$$I = \frac{V}{R_L} \tag{1.19}$$

である．これらの式を用いて R_L に対する V と I の依存性を図示すると，**図 1.7** のようになる．この図から，負荷抵抗の値が小さくなるに従って，負荷に流れる電流が増加し，同時に，端子間の電圧が減少することがわかる．ちなみに，有効数字 2 桁で 1.5 V の電池と見なすことができる負荷抵抗の条件は，おおよそ 2.8 Ω 以上となる．これよりも小さい負荷抵抗を接続した場合には，この電池は，もはや有効数字 2 桁の 1.5 V の電池としては機能せず，1.49 V 以下の電池として振る舞うのである．

1.8 直流電流源における内部抵抗

実際の電流源を回路でより正しく表そうとするときには，**図 1.8** に示すように，理想電流源に対して並列に内部抵抗 R_i が存在する，という描像を適用する．即ち，端子間に電圧 V が印加されることによって内部抵抗に流れる電流 $I_i = V/R_i$ が発生し，J がそのまま端子から出る電流 I に反映されないことを考慮するのである．

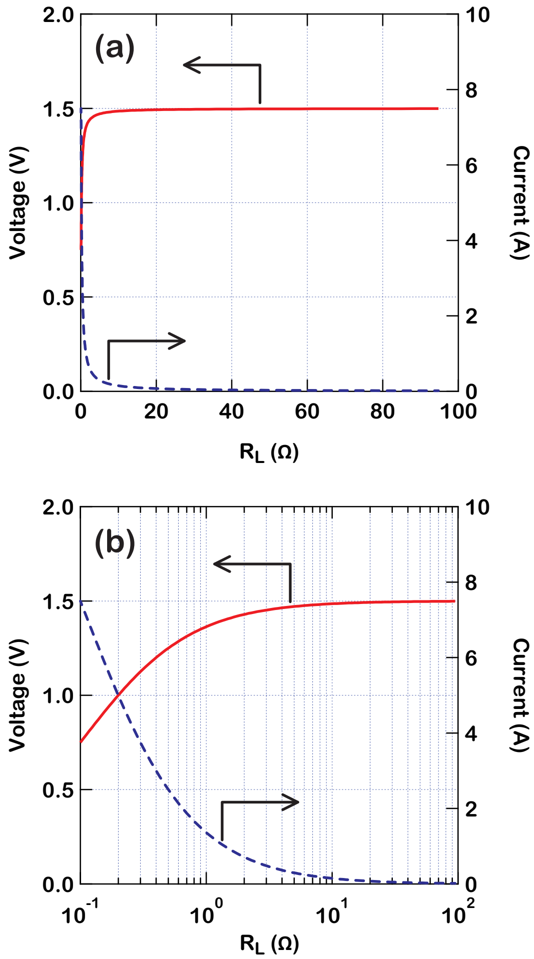


図 1.7 内部抵抗 0.1 Ω，理想起電力 1.5 V の乾電池の端子間電圧 V と端子から流れ出る電流 I の負荷抵抗値 R に対する依存性．(a) は横軸をリニアスケールで図示したもの，(b) は横軸を対数スケールで図示したものである．

電流源に対してこのような描像を持つことによって，以下のことがわかる．

- **$R_L \ll R_i$ であるとき**
  これを「**負荷抵抗の値が電流源の内部抵抗の値と比較して十分に小さいとき**」と表現する．この条件が満たされれば，電流源は，その端子から出る電流が負荷に依存しない理想電流源に近い特性となる．
- **$R_L \ll R_i$ でないとき**
  電流源の端子から出る電流は負荷に依存し，その電流源を理想電流源として扱うことはできない．

課題

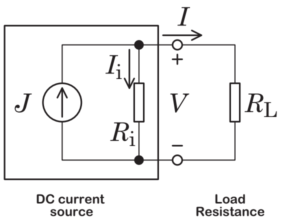


図 1.8 内部抵抗を持つ現実の直流電流源.

上記のようになる理由を説明せよ.

略解

理想電流源から出た電流 J は，内部抵抗 R_i に流れる電流と電源の端子から出る電流 I (即ち，負荷抵抗 R_L に流れる電流) の和であるから，

$$J = I_\mathrm{i} + I \tag{1.20}$$

となる．内部抵抗 R_i と負荷抵抗 R_L に関しては，以下のオームの法則が成り立つ．

$$I_\mathrm{i} = \frac{V}{R_\mathrm{i}}, \qquad I = \frac{V}{R_\mathrm{L}}. \tag{1.21}$$

従って，

$$J = \left(\frac{1}{R_\mathrm{i}} + \frac{1}{R_\mathrm{L}}\right)V, \qquad V = \frac{J}{\dfrac{1}{R_\mathrm{i}} + \dfrac{1}{R_\mathrm{L}}} \tag{1.22}$$

となる．この V を上式の $I = V/R_\mathrm{L}$ に代入すれば，

$$I = \frac{1}{R_\mathrm{L}} \frac{J}{\dfrac{1}{R_\mathrm{i}} + \dfrac{1}{R_\mathrm{L}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}} J \tag{1.23}$$

となる．この式は，電源の端子から出る電流 I が負荷 R_L の大小によって変化することを意味する．しかし，$R_\mathrm{L} \ll R_\mathrm{i}$ であれば，$R_\mathrm{L}/R_\mathrm{i} \ll 1$ であるから，

$$I \sim J \tag{1.24}$$

となる．即ち，負荷抵抗の値が電流源の内部抵抗の値と比較して十分に小さいとき，電源の端子から出る電流 I は負荷 R_L の大小によって大きく変動しない．

豆知識

豆知識

回路図における電流の向きと変数の符号

図 1.9 (a) に示すように，二つの端子 c と d を持つある回路素子について，その回路素子に流れる電流を変数 i で表す場合，$i > 0$ の意味するところが，

- 端子 c から端子 d に向かって流れること，を意味するのか，それとも，
- 端子 d から端子 c に向かって流れること，を意味するのか，

をあらかじめ決めておかねばならない．そのために，本講義では，**図 1.9** (b) に示すように，ある回路素子に流れる電流を i などと書く場合，その回路素子のそばに矢印を描き，その方向に流れるときが $i > 0$ である，ということを明示している．

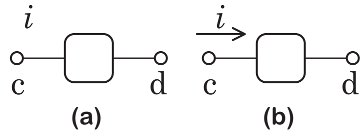


図 1.9 回路図における電流の向きと変数の符号

豆知識

回路図における電圧の向きと符号

図 1.10 (a) に示すように，二つの端子 c と d を持つある回路素子について，その端子間の電圧を変数 v で表す場合，$v > 0$ の意味するところが，

- 端子 c の方が端子 d よりも v だけ電位が高い，ということを意味するのか，それとも，
- 端子 d の方が端子 c よりも v だけ電位が高い，ということを意味するのか，

をあらかじめ決めておかねばならない．そのために，本講義では，**図 1.10** (b) に示すように，ある端子間の電圧を v などと書く場合，二つの端子に + 印と − 印を付けている．例えば，端子 c に + 印を，端子 d に − 印を付けて，その素子のそばに v と書いた場合には，$v > 0$ が意味するところは，端子 c の方が端子 d よりも v だけ電位が高い，となる．この場合，$v < 0$ となれば，端子 d の方が端子 c よりも $|v|$ だけ電位が高い，もしくは，端子 c の方が端子 d よりも $|v|$ だけ電位が低いことを意味する．

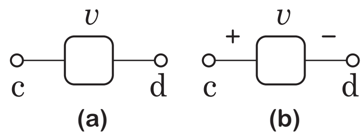


図 1.10 回路図における電圧の向きと変数の符号

豆知識

起電力と電圧降下

「起電力」と「電圧降下」はどちらも同じ電圧であるが，以下の違いがある．

- **起電力 (=電源などの能動素子の場合)**
  電位の高い方の端子から回路素子の外へ電流が流れ出るものであるから，起電力のある回路素子の中のことを考えると，電流は低い電位の方から高い電位の方に流れていることになる．
- **電圧降下 (=抵抗などの受動素子の場合)**
  電圧降下のある回路素子の中では，電流は高い電位の方から低い電位の方に流れる．

一見すると当然のことのように思うかもしないが，これをおろそかにすると，混乱することになる．

回路図における電圧と電流の正の向きをあらかじめ定めておかないと，変数の中身の正負が意味するところが異なる，ということは既に述べた．「起電力」と「電圧降下」には上述のような違いがあることから，電圧については，その電圧が「起電力」なのか，それとも「電圧降下」なのかによって，**図 1.11** に示すように，「普通はこっち向きが正」となる電圧と電流の向きの自然な組み合わせが異なってくるので，注意して欲しい．

二つの端子のうち「こっちの端子が高い電位」と想定して，そこに + 印を付け (もう片方の端子には − 印を付け)，その端子間の電圧を v などと表した場合，

- その電圧を**起電力**と捉えている場合，
  + を付けた端子から電流が流れ出る方向を電流の正

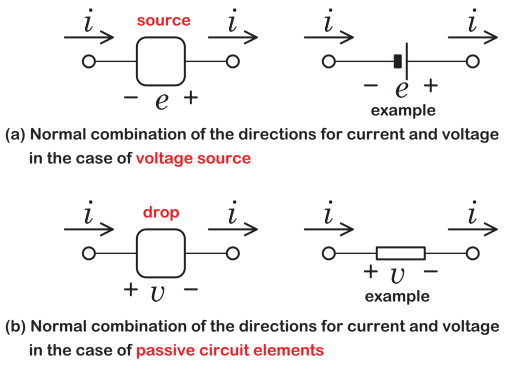


図 1.11 (a) 起電力を持つ電圧源の場合の電圧と電流の正の向きと，(b) 電圧降下をともなう抵抗，コイル，コンデンサなどの受動素子の場合の電圧と電流の正の向き．

の方向として電流の正の向きを示す矢印を描くのが普通である．一方，

- その電圧を**電圧降下**と捉えている場合，
  + を付けた端子に電流が流れ込む方向を電流の正の方向として電流の正の向きを示す矢印を描くのが普通である．

このようにややこしい区別があるので，起電力の場合には，「ここの電圧は電圧降下ではなくて，起電力なのだよ」，ということを明示するために，変数として v の代わりに e を使って，見る人に対して注意喚起する場合もある．

事前基盤知識確認事項

[1] オームの法則

抵抗 R の両端に電圧 $V(t)$ を印加したときに流れる電流を $I(t)$ とするとき，オームの法則を表す式を書け．

略解

$$V(t) = RI(t).$$

[2] 合成抵抗

抵抗 R_1 と R_2 の直列合成抵抗を R_S，並列合成抵抗を R_P とするとき，R_S と $1/R_P$ を R_1 と R_2 で表せ．

略解

$$R_S = R_1 + R_2, \quad \frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

[3] 虚数単位を含む四則演算

j を虚数単位[*1]とし，$z_1 = 1.0 + j2.0$, $z_2 = 1.0 + j1.0$ とするとき，$z_1 z_2$，z_1/z_2，$|z_1|$，z_1^* を求め，$x + jy$ の形式で書け．有効数字は 2 桁とする．z_1^* とは z_1 の共役複素数である．共役複素数を表す場合，数学では $\bar{z}_1$ という表現法 (バーをつける) が一般的であるが，電気回路をはじめとする工学の分野では $*$ をつけるのが一般的であるので，本稿では，$*$ をつける方式で統一することにする．

略解

$$z_1 z_2 = -1.0 + j3.0,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 1.5 + j0.50,$$

$$|z_1| = 2.2,$$

$$z_1^* = 1.0 - j2.0.$$

有効数字に関する注意事項

工学ではなく数学しかしてこなかった皆さんの中には，割り算の結果を分数で書く人が多いと思う．工学では分数は使わない．工学では,「有効数字」を考慮した数値で表す．工学をやる以上は，工学的な考え方を身につけて欲しい．例えば，1/3 cm などという表記は，有効数字が無限大であることを意味する[*2]．有効数字が有限の (例えば 2 桁の) 現実の設計や製作の場面では，そもそも実現できない精度の長さである．有効数字を考慮した工学的表現は，0.33 cm という表し方となる．また，この表現が表している情報が,「その長さが 0.325000000⋯ cm から 0.334000000⋯ cm の間にあることは保障するが，それより高い精度は保障していない」，ということをきちっと認識して欲しい．有効数字については，学生実験で叩き込まれていることを期待したいが，知らない人はきちっと自習すること．

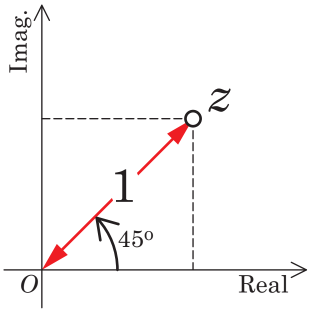


図 1.12 複素平面上の $z = \cos(45°) + j\sin(45°)$.

[4] 複素平面

$z = \cos(45°) + j\sin(45°)$ を複素平面上で示せ．

略解

図 1.12 に示す通りである．

[5] 微分積分

$f(t) = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$ とするとき，$f(t)$ を微分した式と積分した式を求めよ．積分定数は省略してよい．$\omega(\neq 0)$ は t によらない定数とする．

略解

*1 巻末の付録に書いたように，電気回路では虚数単位を j で表すので慣れて欲しい．また，複素数を表すとき，高校では ○○ + □□ i のような表し方をするが，工学では i の前につく □□ が極めて長い式となる場合があるので,「ここから先が虚数部だよ」ということがすぐわかるように ○○ + i □□，即ち，電気回路方式なら，○○ + j □□ という表し方をする．こちらも慣れて欲しい．

*2 米国式のインチ表記などでは，1/4 インチなどというのがまかり通っているので困るのだが ⋯．

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) &= -\omega\sin(\omega t)+\mathrm{j}\omega\cos(\omega t)\\
&= \mathrm{j}\omega\left\{\cos(\omega t)+\mathrm{j}\sin(\omega t)\right\}\\
&= \mathrm{j}\omega f(t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)-\frac{\mathrm{j}}{\omega}\cos(\omega t)\\
&= \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\left\{\cos(\omega t)+\mathrm{j}\sin(\omega t)\right\}\\
&= \frac{1}{\mathrm{j}\omega}f(t).
\end{aligned}
$$

[6] 合成関数の微分積分

$f(t)=\mathrm{e}^{at}$，$g(t)=\mathrm{e}^{bt}$ とするとき，以下の関数を書け．積分定数は省略せよ．a，b はゼロでない定数である．

$$
f(t)g(t),\quad \frac{f(t)}{g(t)},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t),\quad \int f(t)\,\mathrm{d}t.
$$

略解

$$
f(t)g(t)=\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{bt}=\mathrm{e}^{(a+b)t},
$$

$$
\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{\mathrm{e}^{at}}{\mathrm{e}^{bt}}=\mathrm{e}^{(a-b)t},
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{at}=a\mathrm{e}^{at},
$$

$$
\int f(t)\,\mathrm{d}t=\int \mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{at}.
$$

[7] 二つの正弦波の位相差

$f(t)=\sin(\omega t)$，$g(t)=\sin(\omega t+90°)$ とするとき，$f(t)$ と $g(t)$ が表す波形を図示せよ．電気回路をはじめとする波動を扱う分野では，$f(t)$ と $g(t)$ がこのような状態にあることを，「$g(t)$ は $f(t)$ に対して 90° だけ位相が進んでいる」と表現する．

略解

図 1.13 に示す通りである．

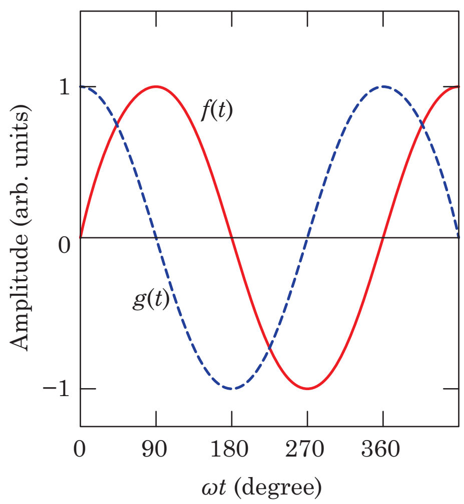


図 1.13 位相差のある正弦波の波形．

第 2 章

交流回路素子とその性質：抵抗，コイル，コンデンサ

ここから時間的に正弦波振動する電圧や電流，即ち交流を扱う．直流の場合，コイルは単なる導線，コンデンサは絶縁体である．これに対し，時間的に変動する電圧や電流の場合には，コイルやコンデンサは単なる導線や絶縁体とはならないことを既に電磁気学で学んでいるはずである．

本章では，電圧や電流の時間的変動を正弦波の場合に特化した場合，即ち一般的に言われている交流電圧や交流電流に特化した場合に，これらの回路素子の電流と電圧の関係が次のようになることを学ぶ．即ち，周波数を ω*1，電圧波形の振幅を V_{m}，電流波形の振幅 I_{m} とすると，

- 抵抗 R の場合，振幅は，

  $$V_{\mathrm{m}} = R\ I_{\mathrm{m}}$$

  となる．また，電圧波形は電流波形と同じ位相 (同相) となる．
- コイル L の場合，振幅は，

  $$V_{\mathrm{m}} = \omega L\ I_{\mathrm{m}}$$

  となる．また，電圧波形は電流波形よりも位相が 90° 進んだ波形となる．
- コンデンサ C の場合，振幅は，

  $$V_{\mathrm{m}} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\omega C}$$

  となる．また，電圧波形は電流波形よりも位相が 90° 遅れた波形となる．

*1 厳密には，「角周波数」と言うべきであるが，ω という記号を使って「周波数」と言った場合には，角周波数のことだと思って欲しい．

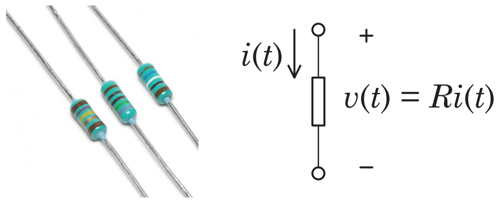


図 2.1 抵抗 [1].

2.1 各種の回路素子

2.1.1 抵抗 (resistor)

抵抗 (resistor) は，**図 2.1** の写真に示すような回路素子であり [1]，電流に比例した電圧が端子間に現れる回路素子である．抵抗の両端に印加された電圧 $v(t)$ と抵抗に流れる電流 $i(t)$ の間には，以下の関係があり，オームの法則と呼ばれている．

$$v(t) = R\,i(t). \tag{2.1}$$

ここで，R を抵抗値 (resistance) という．単位は，Ω（オーム, Ohm）である．日本語では，抵抗値のことを単に抵抗と称する場合が多い．

既に紹介したように，抵抗値の逆数をコンダクタンス (conductance) という (単位は S (ジーメンス, Siemens))．コンダクタンスで表した素子はコンダクタと呼ぶべきかもしれないが，一般には，この場合も抵抗と呼ばれている．

2.1.2 コイル (inductor)

コイル (inductor) は，**図 2.1** の写真に示すような回路素子であり [2]，電流の微分に比例した電圧が端子間に現れる素子である．日本語ではコイルであるが，英語で

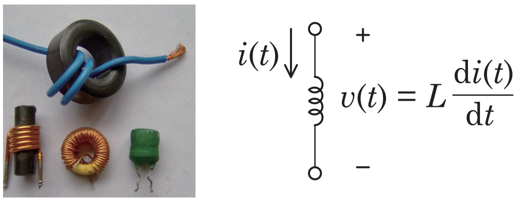


図 2.2 コイル (インダクタ) [2].

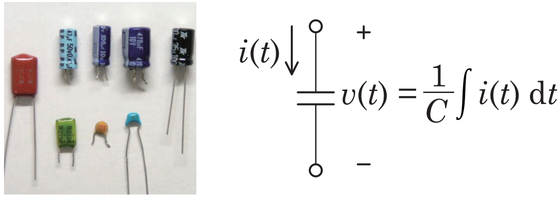


図 2.3 コンデンサ (キャパシタ) [3].

はインダクタである．コイルの両端に印加された電圧 $v(t)$ と抵抗に流れる電流 $i(t)$ の間には，以下の関係があり，ファラデーの電磁誘導の法則から導き出されるものである．

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{2.2}$$

ここで，L をインダクタンス (inductance) という．単位は，H (ヘンリー, Henry) である．

電磁誘導による電圧は，電磁気学的には「誘導起電力」，即ち「起電力」である．従って，電磁気学的に見れば，コイルは電源のような能動素子として扱うべき素子である．しかし，電気回路では，コイルを抵抗と同じ範疇の受動素子として扱い，そこに発生する誘導起電力を受動素子の両端の電圧，即ち「電圧降下」として扱う．このように扱う理由については，第 8 章の相互インダクタンスの**豆知識**を参照されたし．

2.1.3 コンデンサ (capacitor)

コンデンサ (capacitor) は，**図 2.3** の写真に示すような回路素子であり [3]，電流の積分に比例した電圧が端子間に現れる素子である．日本語ではコンデンサであるが，英語ではキャパシタである．コンデンサの両端の電圧 $v(t)$ とそこに流れる電流 $i(t)$ の間には，以下の関係がある．いわゆるコンデンサの充電の式である．

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

ここで，C をキャパシタンス (capacitance) という．単位は，F (ファラッド, Farad) である．

2.2 回路素子における電力とエネルギー

抵抗の場合には，電力は消費されるだけ，即ち電力は常に正であるが，コイルとコンデンサの場合には，電力が消費されるだけとは限らず，負になることもある．消費電力が負である，とは，電力がその回路素子から供給されることを意味する．無から電力が供給されることは無いので，この状況は，回路素子に投入した電力がその回路素子で反射されてしまうことを意味する．本節では，抵抗，コイル，コンデンサの各素子に対してこのことを検証する．

なお，交流回路では，この反射を抑制し，効率良く電力を負荷に供給するための方策をとることになる．この方策を理解するためには，本講義で学ぶ交流回路理論の学習が必要なのである．

2.2.1 抵抗

抵抗 R に流れる電流を $i(t)$ とするとき，抵抗での消費電力 $p_\mathrm{R}(t)$ は次式で与えられる．

$$p_\mathrm{R}(t) = R\,i(t)^2. \tag{2.4}$$

従って，抵抗での消費電力は常に正であることがわかる．

2.2.2 コイルとコンデンサ

コイル L に流れる電流を $i(t)$ とするとき，コイルでの消費電力 $p_\mathrm{L}(t)$ は，天下り的であるが，次式で与えられる．

$$p_\mathrm{L}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li(t)^2\right). \tag{2.5}$$

また，コンデンサ C の電圧を $v(t)$ とするとき，コンデンサでの消費電力 $p_\mathrm{C}(t)$ は，天下り的であるが，次式で与えられる．

$$p_\mathrm{C}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cv(t)^2\right). \tag{2.6}$$

これらの式より，具体的な $i(t)$ や $v(t)$ の波形がわっていなくても，コイルとコンデンサについては，抵抗と異なり，$i(t)$ や $v(t)$ の時間的変化の仕方によっては消費電力が負になり得る，ということが読み取れると思う．即ち，抵抗では交流の場合も電力は消費だけであるが，コ

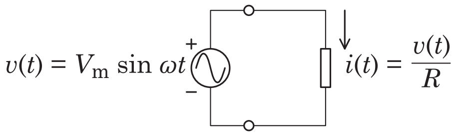


図 2.4 正弦波交流電圧が印加された抵抗．

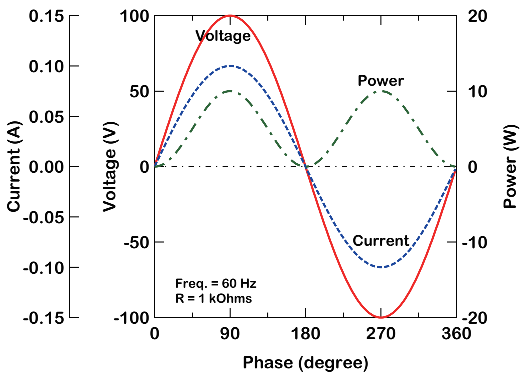


図 2.5 抵抗の電圧・電流波形．参考までに，電力の波形も示してある．$V_m = 100$ V，$f = \omega/(2\pi) = 60$ Hz，$R = 1$ kΩ とした．

イルとコンデンサについては，交流の場合には，電力の反射が起こり得るのである．

2.3 回路と微分方程式〜回路素子が一つの場合〜

2.3.1 正弦波交流における抵抗の電流と電圧の関係

図 2.4 に示すような回路において，電源電圧 $v(t)$ が

$$v(t) = V_m \sin\omega t \tag{2.7}$$

で与えられるとき，流れる電流 $i(t)$ は，

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{v(t)}{R} && (2.8)\\ &= \frac{V_m}{R}\sin\omega t && (2.9)\\ &= I_m \sin\omega t && (2.10)\end{aligned}$$

となる．この挙動をまとめると，以下のようになる．

周波数　ω（変化しない）

振幅　$I_m = \dfrac{V_m}{R}$

電圧に対する電流の位相差　$\theta = 0$

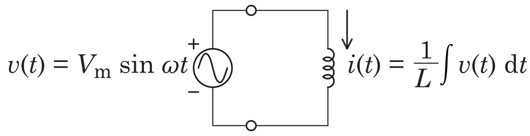


図 2.6 正弦波交流電圧が印加されたコイル．

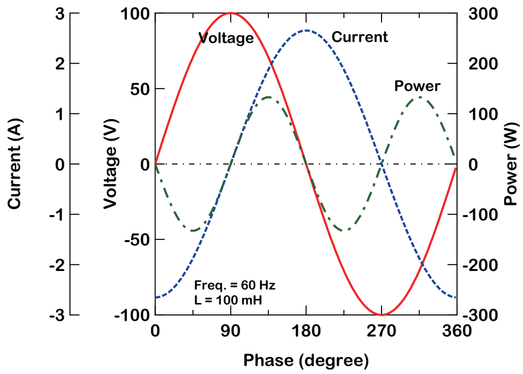


図 2.7 コイルの電圧・電流波形．参考までに，電力の波形も示してある．$V_m = 100$ V，$f = \omega/(2\pi) = 60$ Hz，$L = 100$ mH とした．

このように位相差がゼロであることを電気回路学では「**同相**である」と表現する．

以上の結果を図示すると，**図 2.5** のようになる．電圧波形と電流波形に位相差が無いため，振幅のみが異なる．なお，単位が異なる物理量の波形を比べているため，振幅が異なる，ということ自体には実際には意味が無い，ということに留意されたい．

2.3.2 正弦波交流におけるコイルの電流と電圧の関係

図 2.6 に示すような回路において，電源電圧 $v(t)$ が

$$v(t) = V_m \sin\omega t \tag{2.11}$$

で与えられるとき，流れる電流 $i(t)$ は，

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L}\int v(t)\,dt && (2.12)\\ &= -\frac{V_m}{\omega L}\cos\omega t && (2.13)\\ &= I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) && (2.14)\end{aligned}$$

となる．ここで，cos を sin に直したのは，電圧と電流を同じ関数で表したときの位相差を見るためである．この挙動をまとめると，以下のようになる．

周波数　ω（変化しない）

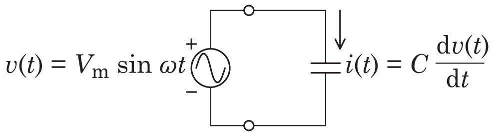


図 2.8 正弦波交流電圧が印加されたコンデンサ．

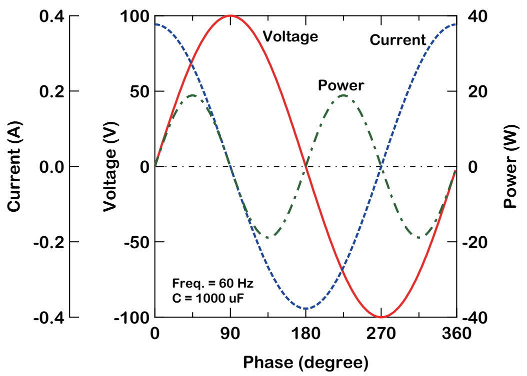


図 2.9 コンデンサの電圧・電流波形．参考までに，電力の波形も示してある．$V_\mathrm{m} = 100$ V，$f = \omega/(2\pi) = 60$ Hz，$C = 1000\ \mu$F とした．

振幅　$I_\mathrm{m} = \dfrac{V_\mathrm{m}}{\omega L}$

電圧に対する電流の位相差　$\theta = -\dfrac{\pi}{2} = -90°$

このように位相差が負の場合を電気回路学では「位相が遅れている」と表現する．即ち，**コイルの場合，電流波形は，電圧波形に対して 90° 位相が遅れている**，という．逆に，**コイルの場合，電圧波形は，電流波形に対して 90° 位相が進んでいる**，ということもできる．

この関係を実際の波形で図示すると，**図 2.7** のようになり，電圧に対して，電流波形が 90° だけ位相が遅れていることがわかる．

消費電力に注目すると，電圧，電流の両方が正，または両方が負の場合には，電圧と電流の積で計算される電力は正となり電力の消費が行われているが，電圧と電流が異符号の場合には，その積が負となるため電力がコイルから電源に戻っていることを意味する．理論式を時間的に平均すれば，コイルでの電力消費は無いことが確認できるが，図からもそのことが読み取れる．但し，これは理想的なコイルの場合である．現実のコイルの場合には，巻き線の抵抗（極めて小さい直列抵抗）による電力消費がともなう．

2.3.3　正弦波交流におけるコンデンサの電流と電圧の関係

図 2.8 に示すような回路において，電源電圧 $v(t)$ が

$$v(t) = V_\mathrm{m} \sin \omega t \tag{2.15}$$

で与えられるとき，流れる電流 $i(t)$ は，

$$\begin{aligned} i(t) &= C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) &(2.16)\\ &= \omega C V_\mathrm{m} \cos \omega t &(2.17)\\ &= I_\mathrm{m} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) &(2.18)\end{aligned}$$

となる．ここで，sin を cos に直したのは，電圧と電流を同じ関数で表したときの位相差を見るためである．この挙動をまとめると，以下のようになる．

周波数　ω（変化しない）

振幅　$I_\mathrm{m} = \omega C\, V_\mathrm{m}$

電圧に対する電流の位相差　$\theta = +\dfrac{\pi}{2} = +90°$

位相に着目すると，**コンデンサの場合，電流波形は，電圧波形に対して 90° 位相が進んでいる**，或いは，**コンデンサの場合，電圧波形は，電流波形に対して 90° 位相が遅れている**となる．

この関係を実際の波形で図示すると，**図 2.9** のようになり，電圧に対して，電流波形が 90° だけ位相が進んでいることがわかる．[*2]

この場合も，消費電力に注目すると，電圧，電流の両方が正，または両方が負の場合には，電圧と電流の積で計算される電力は正となり電力の消費が行われているが，電圧と電流が異符号の場合には，その積が負となるため電力がコンデンサから電源に戻っている．この場合も，電力の理論式を時間的に平均すれば，コンデンサでの電力消費が無いという結論を得ることができる．但し，これもまた理想的なコンデンサの場合である．現実のコンデンサの場合には，コンデンサの電極間に存在する抵抗（極めて大きい並列抵抗）による電力消費がともなう．

[*2] 二つの波形の位相の「遅れ」と「進み」を，右側の波形が進んでいる，という風に間違える人がいる (筆者も)．間違えないようにするには，例えば，電圧や電流の値が正のピークを迎える位相 (時刻に対応) を比較する．**図 2.9** の場合，電流は，位相が 0° でそうなる．一方，電圧は，位相が = 90° まで進展した後にそうなる ($t = 0$ ではまだそうなってない)．即ち，電圧より電流の方が進んでいる，となる．

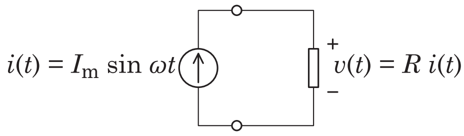


図 2.10 正弦波交流電流を流された抵抗．

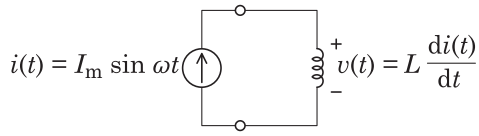


図 2.12 正弦波交流電流を流されたコイル．

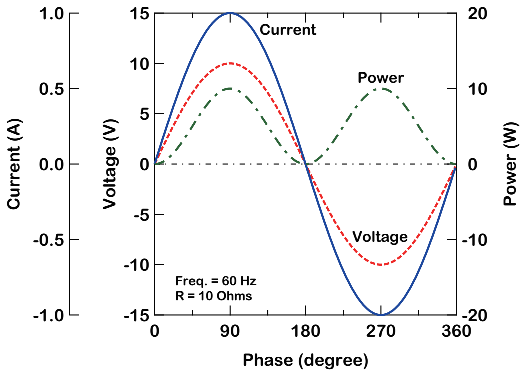


図 2.11 抵抗の場合の電流に対する電圧と電力の波形．$I_m = 1$ A，$f = \omega/(2\pi) = 60$ Hz，$R = 10\ \Omega$ とした．

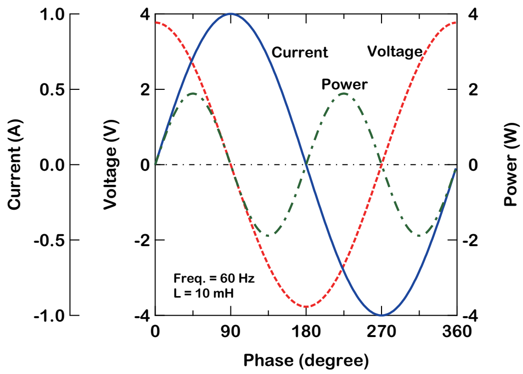


図 2.13 コイルの場合の電流に対する電圧と電力の波形．$I_m = 1$ A，$f = \omega/(2\pi) = 60$ Hz，$L = 10$ mH とした．

2.4　「電流に対する電圧」で見た場合

前節までは，電源として電圧源を設定し，その電圧に対して素子に流れる電流がどうなるか，を示した．ここでは，電源として電流源を設定し，その電流に対して素子にかかる電圧がどうなるか，を示す．電圧波形と電流波形の関係は相対的なものであるから，「電圧に対する電流」と「電流に対する電圧」は，全く同じである．従って，記憶するのであれば，好きな方を記憶すればよい[*3]．

2.4.1　抵抗 R

図 2.10 に示すような回路において，電流源の電流が

$$i(t) = I_m \sin \omega t \tag{2.19}$$

で与えられるとき，抵抗に印加される電圧 $v(t)$ は，

$$\begin{aligned} v(t) &= R\ i(t) && (2.20)\\ &= R\ I_m \sin \omega t && (2.21)\\ &= V_m \sin \omega t && (2.22) \end{aligned}$$

となる．このように位相差がゼロであることを電気回路学では「**同相**である」と表現する．この関係をまとめれば，以下のようになる．

周波数　ω（変化しない）

振幅　$V_m = R\ I_m$

電流に対する電圧の位相差　$\theta = 0 = 0°$

以上の結果を図示すると，**図 2.11** のようになる．電圧波形と電流波形に位相差が無いため，振幅のみが異なる．なお，単位が異なる物理量の波形を比べているため，振幅が異なる，ということ自体には実際には意味が無い，ということに留意されたい．

2.4.2　コイル L

図 2.12 に示すような回路において，電流源の電流が

$$i(t) = I_m \sin \omega t \tag{2.23}$$

で与えられるとき，コイルに印加される電圧 $v(t)$ は，

$$\begin{aligned} v(t) &= L \frac{d}{dt}\ i(t) && (2.24)\\ &= \omega L\ I_m \cos \omega t && (2.25)\\ &= V_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) && (2.26) \end{aligned}$$

となる．ここで，cos を sin に直したのは，電圧と電流を同じ関数で表したときの位相差を見るためである．この関係をまとめれば，以下のようになる．

[*3] 読めばわかるが，ほとんど先の場合のコピペとなる．筆者の場合は，どちらかというと「電流に対する電圧」の関係の方が自分の記憶内容を支配しているようである．

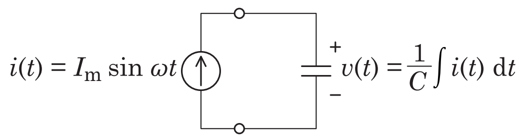


図 2.14 正弦波交流電流を流されたコンデンサ.

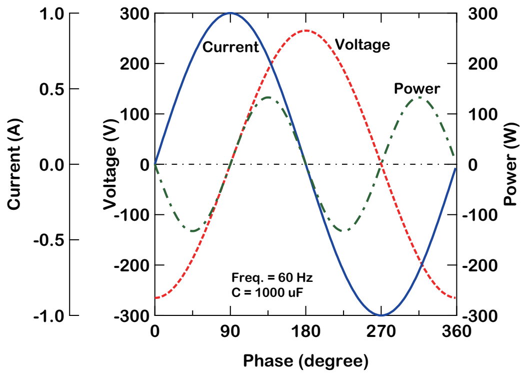


図 2.15 コンデンサの場合の電流に対する電圧と電力の波形．$I_\mathrm{m} = 1$ A，$f = \omega/(2\pi) = 60$ Hz，$C = 10000\ \mu$F とした．

周波数　ω（変化しない）
振幅　$V_\mathrm{m} = \omega L\, I_\mathrm{m}$
電流に対する電圧の位相差　$\theta = +\dfrac{\pi}{2} = +90^\circ$

波形の関係を図示すれば，**図 2.13** のようになる．即ち，

コイルの電圧波形は，電流波形に対して位相が 90° 進んだ波形

となる．

2.4.3　コンデンサ C

図 2.14 に示すような回路において，電流源の電流が

$$i(t) = I_\mathrm{m} \sin \omega t \tag{2.27}$$

で与えられるとき，抵抗に印加される電圧 $v(t)$ は，

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.28}$$

$$= -\frac{1}{\omega C} I_\mathrm{m} \cos \omega t \tag{2.29}$$

$$= V_\mathrm{m} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.30}$$

となる．ここで，cos を sin に直したのは，電圧と電流を同じ関数で表したときの位相差を見るためである．この関係をまとめれば，以下のようになる．

周波数　ω（変化しない）
振幅　$V_\mathrm{m} = \dfrac{I_\mathrm{m}}{\omega C}$
電流に対する電圧の位相差　$\theta = -\dfrac{\pi}{2} = -90^\circ$

波形の関係を図示すれば，**図 2.15** のようになる．即ち，

コンデンサの電圧波形は，電流波形に対して位相が 90° 遅れた波形

となる．

2.5　回路と微分方程式〜回路素子が複数の場合〜

前節では，回路素子が一つだけの場合を取り扱った．ここでは，**図 2.16** のように複数の回路素子が接続された場合を取り扱う．但し，本節の目的は，微分積分が混在する回路方程式を解くことがどれだけ煩雑で面倒くさいことであるか，ということを知ることである，ということを留意されたい．次の章では，正弦波交流のみを扱う場合には，フェーザと呼ばれる概念を導入することによって，こうした複雑な微分積分方程式を解かずに，四則演算のみで必要とする回路の諸量を算出することができる，ということを学ぶ．フェーザというものの御利益を認識して頂くために，どれくらい面倒くさいのかを知って頂くのが本節の目的である．

図 2.16 において，正弦波電流 $i(t)$ が回路に流れるときに，回路全体の電圧 $v(t)$ が如何なる波形になるか，という問題を設定してみる．

回路素子を直列接続すれば，それぞれの素子の電圧の和が全体の電圧であるから，次式が成り立つ．

$$v(t) = R\,i(t) + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.31}$$

この式において，$i(t) = I_\mathrm{m} \sin \omega t$ が与えられたときに，$v(t)$ がどうなるかを知ることが回路方程式を解く，という作業になる．

このタイプの微分方程式は，一般に以下のような解を持つことが数学的にわかっている．

$$v(t) = v_\mathrm{f} + v_\mathrm{s}. \tag{2.32}$$

ここで，

$$v_\mathrm{f} = A_1 \mathrm{e}^{s_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{s_2 t} \tag{2.33}$$

$$v_\mathrm{s} = V_\mathrm{m} \sin(\omega t + \theta) \tag{2.34}$$

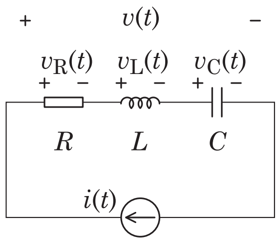


図 2.16 正弦波交流電流源が接続された抵抗，コイル，コンデンサの直列回路．

である．v_{f} は自由振動項と呼ばれ，通常は $t \to \infty$ で 0 となる．いわゆる「過渡状態」を表す項である．この項を重点的に扱うのが「過渡現象論」であるが，前期の電気回路学基礎ではこの単元にはまだ触れない．v_{s} は強制振動項と呼ばれ，$t \to \infty$ でも残る項である．これは「定常状態」を表す項であり，電気回路学基礎ではこの定常状態のみを扱う．

定常状態を求めることに限定すると，$v(t) = V_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta)$ の V_{m} と θ を求める問題に帰着する．$i(t)$ を式 (2.31) に代入すると，解くべき式は，以下のようになる．

$$v(t) = I_{\mathrm{m}} \left[R \sin \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \omega t \right]. \tag{2.35}$$

この形にすることによって，電圧の振幅 V_{m} と，電流に対する電圧の位相差 θ を求めることができる．即ち，

$$V_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}} \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}, \tag{2.36}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \right) \tag{2.37}$$

となる．途中をすっ飛ばしているが，それでも煩雑な計算をしている．フェーザを導入することによって，こうした複雑な数学的作業が全て四則演算という作業で済む，ということを次の章で学ぶ．

豆知識

豆知識

何故，コイル（インダクタンス）は L で表すのか？ [4]

The term 'inductance' was coined by Oliver Heaviside in February 1886. It is customary to use the symbol L for inductance, in honor of the physicist Heinrich Lenz. In the SI system the measurement unit for inductance is the henry, H, named in honor of the scientist who discovered inductance, Joseph Henry.

豆知識

何故，電流 (current) は I や i で表すのか？ [5]

The conventional symbol for current is I, which originates from the French phrase intensite de courant, or in English current intensity. This phrase is frequently used when discussing the value of an electric current, but modern practice often shortens this to simply current. The I symbol was used by Andre-Marie Ampere, after whom the unit of electric current is named, in formulating the eponymous Ampere's force law which he discovered in 1820. The notation travelled from France to Britain, where it became standard, although at least one journal did not change from using C to I until 1896.

豆知識

sin と cos の復習

もしも三角関数を三角形の辺の比率であるという定義で習った場合には，その定義の仕方は捨てて欲しい．本来，sin, cos は半径 1 の円周を**図 2.17** のように所定の角度だけ回転したときの座標の x 軸と y 軸の値なのである．ここから派生的に三角形の辺の比率となっているに過ぎない．電気回路では上記の定義の方が，位相の遅れや進みを理解し易いと思う．

sin 関数を微分すると以下のように cos になる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta = \cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right). \tag{2.38}$$

これは，位相が 90° 進むことに相当する．

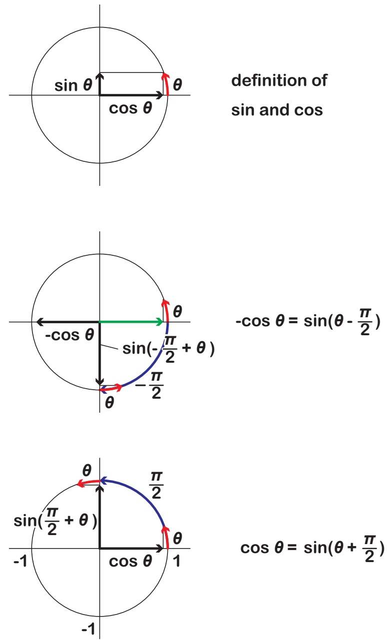


図 2.17 cos は sin の 90° 位相が進んだ関数である．

sin 関数を積分すると以下のように $-\cos$ になる．

$$\int \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = -\cos\theta = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right). \tag{2.39}$$

これは，位相が 90° 遅れることに相当する．

豆知識

日本のカタカナ学術用語はガラパゴス

ゲルマン語圏，ラテン語圏ではない日本人にとって，英語の発音をきちっとするためには，訓練が必要である．しかし，訓練ではどうにもならないのが，「そもそも，それ違うし...」という間違いである．

これは，日本で学習したカタカナ学術用語が，英語と同じゲルマン系だがドイツやオランダなどの発音が少し異なる国から輸入されたり，ゲルマン系とは異なるポルトガルなどのラテン系から輸入されたりしているためである．したがって，英語ではスペルまで違うのに，頑張って英語風に発音しても，それは全く意味が無い．

電気回路の**コイル**や**コンデンサ**がそれに該当する．これらはドイツ語から来た外来語である．英語では，それぞれ，**inductor**，**capacitor** である．

表 2.1 に代表的なものを列挙したので参考にして欲しい．

表 2.1 日本人が間違えやすいカタカナ学術用語の英語.

日本語	英語	擬似発音 *1	参考
コイル	inductor	インダクター	*2
コンデンサ	capacitor	キャパシター	condensare (オランダ語) から．英語圏の condenser は液化器を指す.
カリウム	potassium	ポタシアム ポタシウムにあらず	kalium (ドイツ語) から.
ナトリウム	sodium	ソディウム	natrium (ドイツ語, オランダ語).
チタニウム	titanium	タイテイニアム	*3
アルミニウム	aluminum	アルミナム	*3
マグネシウム	magnesium	マグニージアム	*3
ゲルマニウム	germanium	ジャーメイニアム	*3
ネオン	neon	ニオン	*3
キセノン	xenon	ジノン	*3
ウラン	uranium	ユーレイニアム	*3
イオン	ion	アイオン	同スペルのドイツ語発音から
アニオン	anion	アナイオン	同スペルのドイツ語発音から
カチオン	cation	カタイオン	類似スペルのドイツ語 (kation) から

*1 表中の英語のカタカナ発音は，あくまでも参考までに記したものであり，正しい発音を耳で聞いて身につけて下さい.

*2 日本語と英語で異なることになってしまった原因をまだ知らない.

*3 元素名を決めるときにラテン語系で名前が付けられたが，それを英語発音するとこうなってしまっているのだと推測.

事前基盤知識確認事項

[1] コイルの誘導電圧

インダクタンスが L のコイルに時間変動する電流 $i(t)$ を流したとき，コイルの両端に現れる電圧 $v(t)$ を表す式を書け．

略解

前提となる知識は以下の通りである．

- コイルには電流の時間変化 (時間微分) に比例した電圧が発生する．その比例係数がインダクタンスである．

これを式で表せば以下のようになる．

$$v(t) = L\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,i(t). \tag{2.40}$$

自己誘導の更に詳しい説明については，第 8 章の**豆知識**を参照されたし．

[2] コンデンサの充電電圧

キャパシタンスが C のコンデンサに時間変動する電流 $i(t)$ を流したとき，コンデンサの両端に現れる電圧 $v(t)$ を表す式を書け．

略解

前提となる知識は以下の二つである．

- コンデンサの端子間の電圧 $v(t)$ は，蓄積された電荷量 $q(t)$ に比例したものとなる．その比例係数がキャパシタンスである．これを式で書けば以下のようになる．
$$q(t) = Cv(t). \tag{2.41}$$
- 電流とは，ある断面を単位時間あたりに通過する電荷量である．従って，電流を時間で積分すれば，通過した全電荷量となる．これを式で書けば以下のようになる．
$$q(t) = \int i(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.42}$$

これらより，次式が得られる．

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.43}$$

[3] 正弦波の微分と積分

$\sin\omega t$ を t で微分，あるいは積分した関数は cos で表される関数になることは受験勉強でやっていると思う．電気回路では，sin の微分や積分が cos や −cos になるという見方をするのではなく，sin の位相が 90° 進んだものになる，あるいは 90° 遅れたものになる，という見方をする．そうなることを確認せよ．

略解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\omega t = \omega\cos\omega t = \omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{2.44}$$

$$\int \sin\omega t\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{\omega}\cos\omega t = \frac{1}{\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \tag{2.45}$$

本章では位相の進みと遅れとして現れるのは ±90° だけであるが，回路素子が組み合わされれば，様々な位相のずれが発生する．これについては，次の章以降で学習する．

事後学習内容確認事項

1. 回路素子の電圧と電流の関係 (一般形)

抵抗 R，コイル L，コンデンサ C にかかる電圧 $v(t)$ と流れる電流 $i(t)$ の関係を書け．

略解

抵抗 R の場合，

$$v(t) = R\,i(t)$$

となる．

コイル L の場合，

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)$$

となる．

コンデンサ C の場合，

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\ \mathrm{d}t$$

となる．

2. 回路素子の電圧と電流の関係 (正弦波)

正弦波交流の場合に，抵抗 R，コイル L，コンデンサ C にかかる電圧の波形と流れる電流の波形の関係を書け．また，電圧波形に対する電流波形の位相のずれがどうなるかを示せ．

略解

回路素子に流れる電流の波形を

$$i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin \omega t$$

とすると，

抵抗 R の場合，

$$v(t) = RI \sin \omega t$$

となり，電圧波形は電流波形と同相となる．

コイル L の場合，

$$v(t) = \omega L\ I_{\mathrm{m}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

となり，電圧波形は電流波形に対して 90° だけ位相が進んでいる．

コンデンサ C の場合，

$$v(t) = \frac{1}{\omega C}\ I_{\mathrm{m}} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

となり，電圧波形は電流波形に対して 90° だけ位相が遅れている．

参考文献

[1] http://ja.wikipedia.org/wiki/抵抗器

[2] http://ja.wikipedia.org/wiki/インダクタ

[3] http://www51.tok2.com/home/toosts/mame.htm

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Inductance

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Electric_current

第 3 章

フェーザ

本章では，以下のことを学ぶ.

- $a(t) = A_\mathrm{m} \sin(\omega t + \theta)$ を $a(t) = A_\mathrm{m} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}$ に置き換えても線形回路方程式は成り立つ.
- $a(t) = A_\mathrm{m} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}$ から $\mathrm{j}\omega t$ をのぞき，振幅 A_m の代わりに実効値 $A_\mathrm{e} = A_\mathrm{m}/\sqrt{2}$ を用いたものを**フェーザ**という．即ち，$a(t)$ のフェーザ表記を A とすると，

$$A = A_\mathrm{e} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

と表される[*1].

- フェーザ形式の電圧 V と電流 I を用いると，抵抗に加えて，微分・積分が関与するコイルとコンデンサについても，以下のようなオームの法則的関係が成り立つ.

$$v(t) = R\ i(t) \quad \Rightarrow \quad V = R\ I$$

$$v(t) = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad V = \mathrm{j}\omega L\ I$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i\ \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\ I$$

- 従って，フェーザ形式を用いれば，正弦波交流を扱う電気回路の問題を解くときに，上記の左側の 3 つの関係を組み合わせた複雑な微分・積分方程式を使う必要がなくなり，**直流のときのオームの法則に相当する上記右側の 3 つの関係式と四則演算を使うだけでよい．直流の時と違う点は，電流・電圧が大きさと偏角を有する複素数になるという点である**.

[*1] この表記法は，数学的には便利だが，数値を扱う工学では不便である．そのため，次章以降では，これを $A = A_\mathrm{e} \angle\theta$ と表し，θ の単位として度「°」を用いることになるので留意して欲しい.

3.1 フェーザ形式の導入の前に〜正弦波の $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ による表現方法と利用方法〜

電気回路のように正弦波のみを扱う分野では，正弦波の表し方として，

$$i(t) = I_\mathrm{m} \sin\omega t \quad や \quad i(t) = I_\mathrm{m} \cos\omega t \tag{3.1}$$

のように三角関数を用いて表す代わりに，

$$i(t) = I_\mathrm{m} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = I_\mathrm{m} \exp(\mathrm{j}\omega t) \tag{3.2}$$

と表すことが多い[*2]．電気回路で「フェーザ形式」を導入する際にも，正弦波で変化する電圧・電流が，$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ で表現できることを前提とする．そこで，まず，このように表してよいのかどうか，について確認する.

3.2 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ を用いるとどうなるのか

以下の関係（オイラーの公式）があることは既知であるとする.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \exp(\mathrm{j}\omega t) = \cos\omega t + \mathrm{j}\sin\omega t. \tag{3.3}$$

実は，「線形微分方程式」と呼ばれる特定の条件を満たした微分方程式では，sin や cos の代わりに，上記の exp を用いたものを使っても，以下のようになるだけである，ということが数学的にわかっている.

- **sin の代わりに exp を用いた場合**
  exp を用いた計算結果の**虚数部分**が sin を用いた計算結果と同じになる.
- **cos の代わりに exp を用いた場合**
  exp を用いた計算結果の**実数部分**が cos を用いた計算結果と同じになる.

[*2] ここで，exp() は，$\mathrm{e}^{()}$ と書くと，指数部が小さくて鬱陶しいので，このような書き方をしている．状況に応じて適宜使い分けているので，慣れて欲しい.

なお，この関係は線形微分方程式以外では成り立たないので注意のこと．電気回路学基礎で扱う回路方程式は全て線形微分方程式である．また，sin と cos とが両方用いられている場合には，次の関係等を使って，exp **に置き換える前に，以下のように，どちらかに統一しておく必要がある**．

- sin に統一しようとするときに，cos が混じっていた場合には，cos が sin の 90° 位相が進んだ関数であることを利用して cos を sin 表記に変換しておいてから，exp に変換する．

$$\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} = e^{j\omega t}e^{j\frac{\pi}{2}} = je^{j\omega t}. \tag{3.4}$$

- cos に統一しようとするときに，sin が混じっていた場合には，sin が cos の 90° 位相が遅れた関数であることを利用して sin を cos 表記に変換しておいてから，exp に変換する．

$$\sin(\omega t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} = e^{j\omega t}e^{-j\frac{\pi}{2}} = -je^{j\omega t}. \tag{3.5}$$

3.3 正弦波を $e^{j\omega t}$ 形式で表したときの回路素子の表し方〜フェーザ形式の一歩手前〜

ここでは，正弦波を $e^{j\omega t}$ 形式で表すと，抵抗，コイル，コンデンサの電流電圧の関係がどのような式になるかを示す．結論から先に言うと，sin や cos で表した場合には，微分や積分が関与してくるのに対して，exp で表すと，全て

$$v(t) = [\quad]i(t) \tag{3.6}$$

というオームの法則のような形式なる．以下では，抵抗，コイル，コンデンサの三つの基本回路素子について，このような形式になることを示す．

3.3.1 抵抗

抵抗の電流電圧の関係式は，

$$v(t) = R\,i(t) \tag{3.7}$$

であった．R をかけ算するだけであるから，exp 形式にしても抵抗の場合には，関係式は同じである．

この関係式の意味するところは，以下の通りである．

- **振幅**: 電圧の振幅は電流の R 倍
- **位相差**: 電圧と電流は同相

3.3.2 コイル

コイルの電流電圧の関係式は，

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) \tag{3.8}$$

であった．$i(t) = I_\mathrm{m}e^{j\omega t}$ とすると，

$$v(t) = j\omega L\, I_\mathrm{m}e^{j\omega t} \tag{3.9}$$

となる，即ち，

$$v(t) = j\omega L\, i(t) \tag{3.10}$$

となっていることがわかる．従って，コイルの場合の関係式 (3.10) の意味するところは，以下の通りである．

- **振幅**: 電圧の振幅は電流の ωL 倍になる
- **位相差**: 電圧は電流に対して 90° 位相が進む[*3]

3.3.3 コンデンサ

コンデンサの電流電圧の関係式は，

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.11}$$

であった．$i(t) = I_\mathrm{m}e^{j\omega t}$ とすると，

$$v(t) = \frac{1}{j\omega C}\, I_\mathrm{m}e^{j\omega t} \tag{3.12}$$

となる，即ち，

$$v(t) = \frac{1}{j\omega C}\, i(t) \tag{3.13}$$

となっていることがわかる．

従って，コイルの場合の関係式 (3.13) の意味するところは，以下の通りである．

- **振幅**: 電圧の振幅は電流の $\dfrac{1}{\omega C}$ 倍になる
- **位相差**: 電圧は電流に対して 90° 位相が遅れる[*4]

[*3] j がかけ算されているからである．詳細は章末の豆知識を参照のこと．

[*4] j で割り算されているからである．詳細は章末の豆知識を参照のこと．

3.4 フェーザ

正弦波を exp 形式で表すと，計算中の等式の右辺と左辺に必ず $e^{j\omega t}$ が現れる．従って，$e^{j\omega t}$ を両辺から削除しても，等式は成り立つ．そこで，電流や電圧の表し方として，最初から，$e^{j\omega t}$ を除いて表してしまう，ということをする．これがフェーザ形式を導入する基本的な考え方である．即ち，正弦波を

$$i(t) = I_{\mathrm{m}} e^{j(\omega t+\theta)} \tag{3.14}$$

によって表現する代わりに，おおちゃくをして，

$$I = I_{\mathrm{m}} e^{j\theta} \tag{3.15}$$

が正弦波を表しているものとしてしまおう，というものである．

この考え方は，線形微分方程式であれば，周波数 ω が変わることは無く，変わるのは振幅と位相だけ，ということに基づいている．変わるのが振幅と位相だけなら，振幅と位相の情報だけを持つパラメータで表現すれば，それでよいではないか，という考え方である．この振幅と位相の情報だけを持つのが「フェーザ」と呼ばれる複素数である．この複素数の大きさが振幅情報に相当し，複素数の偏角が位相情報に相当する．

但し，後述のように振幅情報についてはある決まったルールが設けられている．即ち，フェーザの大きさに振幅そのものの情報を持たせるのではなく，振幅を少しだけ改変した「実効値」なるものにする，というルールである．このルールが先に登場すると，話がややこしくなるので，ここでは，まずはそのルールを無視して説明し，最後にそのルールを適用する．

3.5 フェーザ形式を用いた各素子の電流と電圧の関係

ここでは，フェーザ形式を用いた場合に，抵抗，コイル，コンデンサの電流と電圧の関係が以下のようになることを学ぶ．

$$V = R\ I, \tag{3.16}$$

$$V = j\omega L\ I, \tag{3.17}$$

$$V = \frac{1}{j\omega C}\ I. \tag{3.18}$$

電流を $i(t) = I_{\mathrm{m}} e^{j\omega t}$ とすると，そのフェーザ形式は，

$$I = I_{\mathrm{m}} \tag{3.19}$$

である．電圧を $v(t) = V_{\mathrm{m}} e^{j(\omega t+\theta)}$ とすると，そのフェーザ形式は

$$V = V_{\mathrm{m}} e^{j\theta} \tag{3.20}$$

である．これらが，抵抗，コイル，コンデンサの場合にどのような関係式で結ばれるのかを以下に示す．

3.5.1 抵抗

抵抗のもともとの電流と電圧の関係式は，

$$v(t) = R\ i(t) \tag{3.21}$$

であった．これに exp 形式の電流と電圧を代入すると，

$$V_{\mathrm{m}} e^{j\theta} e^{j\omega t} = R\ I_{\mathrm{m}} e^{j\omega t} \tag{3.22}$$

となる．両辺の $e^{j\omega t}$ を除いてしまえば，

$$V_{\mathrm{m}} e^{j\theta} = R\ I_{\mathrm{m}} \tag{3.23}$$

となる．即ち，フェーザ形式の電流と電圧の間には，以下の関係が成り立っていることになる．

$$V = R\ I. \tag{3.24}$$

3.5.2 コイル

コイルのもともとの電流と電圧の関係式は，

$$v(t) = j\omega L\ i(t) \tag{3.25}$$

であった．これに exp 形式の電流と電圧を代入すると，

$$V_{\mathrm{m}} e^{j\theta} e^{j\omega t} = j\omega L\ I_{\mathrm{m}} e^{j\omega t} \tag{3.26}$$

両辺の $e^{j\omega t}$ を除いてしまえば，

$$V_{\mathrm{m}} e^{j\theta} = j\omega L\ I_{\mathrm{m}} \tag{3.27}$$

となる．即ち，フェーザ形式の電流と電圧の間には，以下の関係が成り立っていることになる．

$$V = j\omega L\ I. \tag{3.28}$$

3.5.3 コンデンサ

コンデンサのもともとの電流と電圧の関係式は，

$$v(t) = \frac{1}{j\omega C} i(t) \tag{3.29}$$

であった．これに exp 形式の電流と電圧を代入すると，

$$V_{\mathrm{m}} e^{j\theta} e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega C}\ I_{\mathrm{m}} e^{j\omega t} \tag{3.30}$$

両辺の $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ を除いてしまえば，

$$V_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\, I_{\mathrm{m}} \tag{3.31}$$

となる．即ち，フェーザ形式の電流と電圧の間には，以下の関係が成り立っていることになる．

$$V = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\, I. \tag{3.32}$$

3.6 フェーザ形式の大きさは「実効値」

既に但し書きで述べたように，電気回路では以下のような取り決めがある．

> フェーザ形式の大きさ (絶対値) は，振幅ではなく実効値 とする．

ここから，それを適用する．

実効値 A_{e} は，正弦波の振幅を A_{m} とした場合，以下のように，**振幅を $\sqrt{2}$ で割ったもの**として与えられる．

$$A_{\mathrm{e}} = \frac{A_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}. \tag{3.33}$$

例えば，$i(t) = I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}$ であるとき，これに対応するフェーザ形式は，

$$i(t) = I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)} \quad \Leftrightarrow \quad I = I_{\mathrm{e}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}, \quad I_{\mathrm{e}} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \tag{3.34}$$

となる．何故，$\sqrt{2}$ で割ったものを実効値などという名前を付けて利用するのか，については，後ほど説明する．

3.7 フェーザまとめ

正弦波交流の電圧と電流の表現方法には，従来の波形を表す形式に加えて，**フェーザ形式**というものがあり，お互いに以下のような関係にある．

$$\begin{matrix} v(t) = V_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\theta) \\ \text{または} \\ v(t) = V_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}. \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} V = V_{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}, \\ V_{\mathrm{e}} = \dfrac{V_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}. \end{matrix} \tag{3.35}$$

$$\begin{matrix} i(t) = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\phi) \\ \text{または} \\ i(t) = I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}. \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} I = I_{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}, \\ I_{\mathrm{e}} = \dfrac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}. \end{matrix} \tag{3.36}$$

フェーザ形式の電圧 V と電流 I を用いると，抵抗に加えて，微分・積分が関与するコイルとコンデンサについても，以下のようなオームの法則的関係が成り立つ．

$$v(t) = R\ i(t) \quad \Longleftrightarrow \quad V = R\ I, \tag{3.37}$$

$$v(t) = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \Longleftrightarrow \quad V = \mathrm{j}\omega L\, I, \tag{3.38}$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i\ \mathrm{d}t \quad \Longleftrightarrow \quad V = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\, I. \tag{3.39}$$

従って，フェーザ形式を用いれば，正弦波交流を扱う電気回路の問題を解くときに，上記の左側の 3 つの関係を組み合わせた複雑な微分・積分方程式を使う必要がなくなり，

> **直流のときのオームの法則に相当する上記右側の 3 つの関係式と四則演算を使うだけでよい．直流の時と違う点は，電流・電圧が大きさと偏角を有する複素数になる**

という点である．

なお，フェーザ形式は，正弦波交流電気回路の問題に取り組むときに極めて便利な形式であるが，

- 「波形からフェーザへ」
- 「フェーザから波形へ」

が出来なければ，フェーザ形式での計算が出来たとしても，それはもはや電気回路の問題に取り組んでいるのではなく，単に複素数を含む算数をやっているだけ，になってしまう．そこで，フェーザ形式が表しているものが何なのか，を再認識して頂くために，抵抗，コイル，コンデンサに流れる交流電流と，そこにかかる交流電圧の関係を，波形とフェーザ形式の両方で示し，その特徴を以下にまとめた．

3.7.1 抵抗

抵抗に流れる電流と抵抗にかかる電圧の間の関係を，波形そのもので考えた場合の関係と，フェーザに置き換えて考えた場合の関係を図示すると，**図 3.1** のようになる．即ち，波形の位相のずれは無く，大きさのみが変わる．これがフェーザ形式で表した場合には，位相のずれが無いことから，ベクトル的に表したフェーザの方位が同一となり，長さだけが異なる，という状況になる．

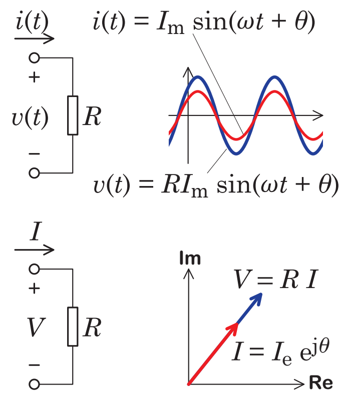


図 3.1 抵抗における電流電圧波形の関係とフェーザ形式の電流電圧の関係．

3.7.2 コイル

コイルに流れる電流と抵抗にかかる電圧の間の関係を，波形そのもので考えた場合の関係と，フェーザに置き換えて考えた場合の関係を図示すると，**図 3.2** のようになる．即ち，電流波形は電圧波形に対して 90° だけ位相が遅れる（電圧波形は電流波形に対して 90° だけ位相が進む）．電流に対して電圧はその大きさが ωL 倍となる．フェーザ形式で表した場合には，電圧に対して電流が 90° だけ位相が遅れているという状況が，90° だけフェーザの偏角が小さい，ということに対応して描かれることになる．大きさについては，電流に対して電圧のフェーザは ωL 倍の大きさで描かれることになる．

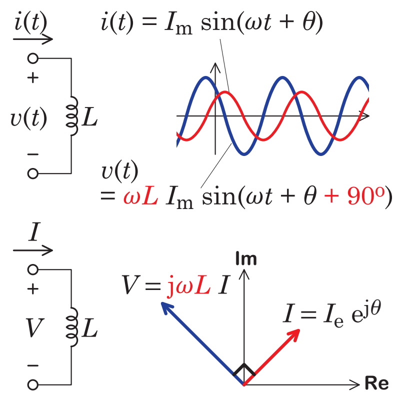


図 3.2 コイルにおける電流電圧波形の関係とフェーザ形式の電流電圧の関係．

3.7.3 コンデンサ

コンデンサに流れる電流と抵抗にかかる電圧の間の関係を，波形そのもので考えた場合の関係と，フェーザに置き換えて考えた場合の関係を図示すると，**図 3.3** のようになる．即ち，電流波形は電圧波形に対して 90° だけ位相が進む（電圧波形は電流波形に対して 90° だけ位相が遅れる）．電流に対して電圧はその大きさが $1/\omega C$ 倍となる．フェーザ形式で表した場合には，電圧に対して電流が 90° だけ位相が進んでいるという状況が，90° だけフェーザの偏角が大きい，ということに対応して描かれることになる．大きさについては，電流に対して電圧のフェーザは $1/\omega C$ 倍の大きさで描かれることになる．

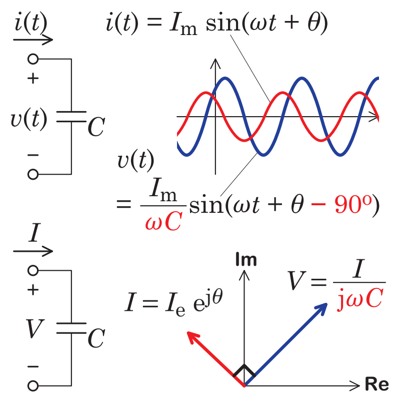


図 3.3 コンデンサにおける電流電圧波形の関係とフェーザ形式の電流電圧の関係．

3.8 実効値

本章の前半の説明では，フェーザ形式の電流電圧の大きさ（絶対値をとったもの）は，実関数に戻したときの「振幅」としていた．しかし，途中で但し書きを書いたように，フェーザ形式の電流電圧の大きさは，振幅ではなく「実効値」なるものにする，というルールを紹介し，実効値が振幅を $\sqrt{2}$ で割ったものである，ということを述べた．その時点では，なぜ，$\sqrt{2}$ で割ったものを「実効値」などという特別な名前を付けて定義するのか，また，振幅の変わりになぜ実効値を使うのか，については何も言及しなかった．本節では，以上の二つの「なぜ」にたいする回答に相当する説明をする．

3.8.1 電力計算と実効値

実効値なるものを定義する必要があるのは，それを定義しておかないと，電力計算のときに，ちょっとおかしなことが起こるからである．抵抗 R に電圧 V を印加して電流 I が流れたときの，直流の場合の電力 P の計算式は，

$$P = VI = RI^2 \tag{3.40}$$

であるが，交流ではどのようになるであろうか？

抵抗 R に電圧 $v(t) = V_\mathrm{m}\sin\omega t$ を印加して電流 $i(t) = I_\mathrm{m}\sin\omega t$ が流れたときの，電力 $p(t)$ の計算式は，

$$p(t) = v(t)i(t) \tag{3.41}$$

である．これは瞬時値であるが，一周期 (周期 $T = 2\pi/\omega$) で平均化した平均電力 P を見てみると (各自で以下の積分をやってみること),

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T v(t)i(t)\,\mathrm{d}t \\ &= V_\mathrm{m}I_\mathrm{m}\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\omega t\,\mathrm{d}t \\ &= V_\mathrm{m}I_\mathrm{m}\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.42}$$

となる．即ち，直流の場合は単純に電圧と電流をかけ算したら良かったのだが，

> **交流の場合の電力を求めるときには，電圧と電流の振幅を単純にかけ算したらダメで，1/2 という係数がつく，**

ということがわかる．

そこで，

> **交流の時も，直流の時のように電圧と電流を表すものを単純にかけ算したらよい**という風にしよう，

という目的で使用されるのが「実効値」である．

即ち，電圧と電流の振幅をそれぞれ $\sqrt{2}$ で割ったものを振幅「のように」扱えば，電力計算のときに 1/2 をかける，などということはせずに，直流の時のように電圧と電流の振幅のようなもの (= 実効値) を単にかければよい，ということになる[*5]．以上の理屈により，フェーザ形式の電圧と電流の絶対値 (=実効値) を単純にかけ算すれば電力の大きさが出てくることになる．

しかし，フェーザは大きさしか持たない実数ではなく，大きさと偏角をもつ複素数である．複素数のままでかけ算するとどうなるのであろうか？これについては，「複素電力」の章で学ぶ．

[*5] なお，この 1/2 を掛けるという作業を電力計算のときにちゃんとやればよいではないか，というポリシーの教科書では，フェーザの大きさは振幅である，と定義されている．

豆知識

豆知識

sin の exp への置き換え具体例 1: sin の代わりに exp を使った例

$i(t) = A\sin(\omega t + \theta)$ なる電流がコイルに流れたときのコイルの電圧 $v(t)$ を sin の表記のままで求める方式と，exp の表記に直して求める方式とを比較してみよう．

コイルの電圧 $v(t)$ は，

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{3.43}$$

で与えられるから，sin のままで $v(t)$ を求めると以下のようになる．

$$v(t) = \omega LA\cos(\omega t + \theta). \tag{3.44}$$

一方，exp を用いると，

$$i(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \theta)} \tag{3.45}$$

と表され，これをコイルの式に代入すると，

$$v(t) = \mathrm{j}\omega LA\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \theta)} \tag{3.46}$$

となる．sin を exp に置き換えた場合は，最終結果の虚部を見ればよい．exp を用いて得られた結果を，その実部と虚部がわかるように書くと，

$$v(t) = \mathrm{j}\omega LA\cos(\omega t + \theta) - \omega LA\sin(\omega t + \theta) \tag{3.47}$$

となる．確かに exp で計算した結果の虚部は，sin のままで計算した結果と同じになっていることが確認できる．

豆知識

sin の exp への置き換え具体例 2: cos の代わりに exp を使った例

$i(t) = A\cos(\omega t + \theta)$ なる電流がコイルに流れたときのコイルの電圧 $v(t)$ を cos の表記のままで求める方式と，exp の表記に直して求める方式とを比較してみよう．

コイルの電圧 $v(t)$ は，

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{3.48}$$

で与えられるから，cos のままで $v(t)$ を求めると以下のようになる．

$$v(t) = -\omega LA\sin(\omega t + \theta). \tag{3.49}$$

一方，exp を用いると，

$$i(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \theta)} \tag{3.50}$$

と表され，これをコイルの式に代入すると，

$$v(t) = \mathrm{j}\omega LA\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \theta)} \tag{3.51}$$

となる．cos を exp に置き換えた場合は，最終結果の実部を見ればよい．exp を用いて得られた結果を，その実部と虚部がわかるように書くと，

$$v(t) = \mathrm{j}\omega LA\cos(\omega t + \theta) - \omega LA\sin(\omega t + \theta) \tag{3.52}$$

となる．確かに exp で計算した結果の実部は，cos のままで計算した結果と同じになっていることが確認できる．

豆知識

sin の exp への置き換え具体例 3: ダメな例

ここでは，上記のような置き換えをしてはダメな例を示す．即ち，置き換えが許される線形微分方程式では「無い」場合である．$i(t) = A\sin(\omega t + \theta)$ なる $i(t)$ に対して，

$$w(t) = K\left(L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{3.53}$$

なる非線形微分方程式を想定してみる．sin のままで計算すると，

$$w(t) = K(\omega LA)^2\cos^2(\omega t + \theta) \tag{3.54}$$

$$= K(\omega LA)^2\frac{1 - \cos[2(\omega t + \theta)]}{2} \tag{3.55}$$

となる．一方，exp に置き換えた場合には，

$$w(t) = K(\mathrm{j}\omega LA)^2\exp[2\mathrm{j}(\omega t + \theta)] \tag{3.56}$$

$$= -K(\omega LA)^2\cos[2(\omega t + \theta)] \tag{3.57}$$

$$-\mathrm{j}K(\omega LA)^2\sin[2(\omega t + \theta)] \tag{3.58}$$

となる．sin の場合は，虚部を見れば良いはずであるが，この虚部が sin のままで計算した結果とは一致していないことがわかる．

豆知識

「j を掛ける」「j で割る」ということの物理的意味

フェーザ形式を導入すると式の中に「j を掛ける」「j で割る」という形が出てくる．それぞれの物理的意味はそれぞれ以下のような意味を持つ．

- **j を掛ける**
  位相を $\pi/2$ (90°) だけ進ませる．
- **j で割る**
  位相を $\pi/2$ (90°) だけ遅らせる．

これらについて以下に説明する．

まず，$\mathrm{j}\omega L$ という式の中にある「j をかけ算する」ということの物理的意味を考えてみよう．j は exp 形式で書けば

$$\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \exp\left(\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.59}$$

である．従って，j を乗じるということは，

$$v(t) = \mathrm{j}\omega L\ i(t) \tag{3.60}$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\omega L\ I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{3.61}$$
$$= \omega L\ I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)} \tag{3.62}$$

という式からわかるように，かけ算する前の物理量の**位相を $\pi/2$ だけ進ませる**ことに相当する．

次に，$1/(\mathrm{j}\omega C)$ のという式の中の j による割り算の物理的意味を考えよう．この場合は，

$$\frac{1}{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \exp\left(-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.63}$$

からわかるように，割り算する前の物理量の**位相を $\pi/2$ だけ遅らせる**ことに相当する．

以上のことを理解していれば，$\sin(\omega t+\pi/2)$ や $\sin(\omega t-\pi/2)$ という風にわざわざ書き直さなくても，j によるかけ算・割り算の状況をを見るだけで，$\pi/2$ (90°) の位相の進み・遅れを把握することができる．

豆知識

なぜ $1/\sqrt{2}$？パート 2

$P = (1/2)V_\mathrm{m}I_\mathrm{m}$ の 1/2 をなくそうとするだけなら，「電圧の振幅だけ 1/2 にして電流の振幅は振幅のままにしてもええんちゃうか？」というのも，$P = VI$ という関係式を成り立たせるだけなら正論である．なんで，フェーザ形式の電圧と電流の大きさを同じ数で割り算するルールにしているのだろう？という疑問を持った人がいれば，ちょっと嬉しい (少しは頭を使ってくれているから).

但し，この疑問を持つということは，$P = VI$ という関係だけを見ている，という近視眼的な頭なので，少し頭の使い方を「木を見て森を見ず」ではなく「木を見て森も見る」という風にして欲しい．

電圧の振幅 V_m と電流の振幅 I_m の間には，

$$V_\mathrm{m} = [\ ]I_\mathrm{m}$$

という関係があるが，電圧と電流をフェーザにしたときも，この関係がきちっと成り立つようにしておく必要がある．即ち，

$$V = [\ ]I$$

とならねばならない．

もしも，$|V| = V_\mathrm{m}/2$，$|I| = I_\mathrm{m}$ というルールにしてしまうと，$P = VI$ は成立するが，$V = [\ ]I$ が成立しなくなる，ということはおわかり頂けると思う．$V = [\ ]I$ もちゃんと成立するようにするためには，フェーザ形式の電圧と電流の大きさ（絶対値）を振幅をもとにして定義するときに，電圧も電流も同じ数で割り算しておかないといけない，ということがおわかり頂けると思う．

豆知識

自乗平均値 (root-mean-square: rms)

波形が正弦波の時は，振幅を $\sqrt{2}$ で割った電圧と電流をかけ算したらよい，というルールで電力計算は OK であった．では，正弦波で無かったらどうか？例えば矩形波とか三角波とかではどうか？

この場合は，瞬時電力の一周期分の平均に立ち戻って考える必要がある．電圧波形が $v(t) = V_\mathrm{m}f(t)$ で表されるものとし，電流波形が $i(t) = I_\mathrm{m}g(t)$ で表されるものとする．ここで，$f(t)$ と $g(t)$ は，任意の周期関数である．但し，周期はどちらも T とする．このときの電圧波形と電流波形から計算される電力の平均値は，次式のようになる．

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T v(t)i(t)\ \mathrm{d}t \\ &= V_\mathrm{m}I_\mathrm{m}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\ \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.64}$$

従って，正弦波の場合に

$$V_\mathrm{e} = V_\mathrm{m}/\sqrt{2},$$
$$I_\mathrm{e} = I_\mathrm{m}/\sqrt{2}$$

という関係式になっていたところが，任意の周期関数の場合には，

$$V_{\mathrm{e}} = V_{\mathrm{m}} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t) g(t)\, \mathrm{d}t}, \tag{3.65}$$

$$I_{\mathrm{e}} = I_{\mathrm{m}} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t) g(t)\, \mathrm{d}t} \tag{3.66}$$

ということになる．

抵抗 R の両端に正弦波交流が印加された場合のように，$f(t) = g(t)$ である場合には，

$$V_{\mathrm{e}} = V_{\mathrm{m}} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2\, \mathrm{d}t}, \tag{3.67}$$

$$I_{\mathrm{e}} = I_{\mathrm{m}} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T g(t)^2\, \mathrm{d}t} \tag{3.68}$$

と書くことができる．従って，この場合には，

$$V_{\mathrm{e}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2\, \mathrm{d}t}, \tag{3.69}$$

$$I_{\mathrm{e}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2\, \mathrm{d}t} \tag{3.70}$$

となる．即ち，電圧や電流の二乗の平均値が実効値となる．このような二乗 (自乗ともいう) の平均値のことを**自乗平均値 (root-mean-square: rms)** や **RMS 値**と言っている．

おおまかに言うと，RMS 値とは，時間変動する量の平均的な変動の度合いを表したものということができる．正弦波のように振幅というものがわかる波形の場合には，振幅がその変動の度合いを表すことになるが，任意の波形の場合には，振幅はわからない．かといって，単純に平均値を計算すると，正と負の変動幅が同じであれば，平均値はゼロになってしまい変動の度合いを表していることにならない．何か良い方法はないかな，と考えてみると，二乗したものを平均すればこのゼロになってしまうということを避けることができることに気づく．二乗しているので，次元としては，もとの物理量とは異なってしまうが，それのルートをとればもとの物理量と同じ次元になる．RMS 値を初めて考えた人の発想はこうではないだろうか．

最近では交流波形の諸量を測定できるテスターも安く入手できるようになっており，振幅や RMS 値を自動的に表示してくれる．このような計測器を扱うとき，電気回路学を学んだ人は，交流電圧や交流電流を計測するときに，計測器が示している値が RMS 値を示しているのか，それとも，振幅を示しているのか，ということを常に意識するように心がけて欲しい．そうでないと，波形を再現するときに困る．また，電力を計算するときにも，以下のように困ったことになる．

- 「おい，この電圧と電流は単純にかけ算して電力を計算してもええんか？計測器が実効値を示してたんか，振幅を示してたんか，ちゃんと記録してたか？」
- 「何？ 記録してへんかったやと！？」
- 「ほな電力がわからんやないか！」
- 「電気回路，習たんちゃうんか！？もっぺん測ってこい！」

ということになる．

事前基盤知識確認事項

[1] 正弦波の微分と積分 (その 1)

$i(t) = I_\mathrm{m} \sin\omega t$ とするとき，以下のことを示せ.

- $L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ i(t)$ は $i(t)$ よりも位相が 90° だけ進んだ波形となる.
- $\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)\ \mathrm{d}t$ は $i(t)$ よりも位相が 90° だけ遅れた波形となる.

略解

$$\begin{aligned}
L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ i(t) &= \omega L\ I_\mathrm{m} \cos\omega t \\
&= \omega L\ I_\mathrm{m} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \\
\frac{1}{C}\int i(t)\ \mathrm{d}t &= -\frac{1}{\omega C}\ I_\mathrm{m} \cos\omega t \\
&= \frac{1}{\omega C}\ I_\mathrm{m} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

[2] 正弦波の微分と積分 (その 2)

$i(t) = I_\mathrm{m} \cos\omega t$ とするとき，以下のことを示せ.

- $L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ i(t)$ は $i(t)$ よりも位相が 90° だけ進んだ波形となる.
- $\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)\ \mathrm{d}t$ は $i(t)$ よりも位相が 90° だけ遅れた波形となる.

略解

$$\begin{aligned}
L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ i(t) &= -\omega L\ I_\mathrm{m} \sin\omega t \\
&= \omega L\ I_\mathrm{m} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \\
\frac{1}{C}\int i(t)\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{\omega C}\ I_\mathrm{m} \sin\omega t \\
&= \frac{1}{\omega C}\ I_\mathrm{m} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

[3] j によるかけ算と割り算

ある数 (複素数) に j をかけ算すると，その数の偏角はどうなるか？ある数 (複素数) を j で割り算すると，その数の偏角はどうなるか？

略解

- $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$ によるかけ算は，偏角を $\frac{\pi}{2}$ 増やす．即ち，偏角を 90° 増やす.
- $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$ による割り算は，偏角を $\frac{\pi}{2}$ 減らす．即ち，偏角を 90° 減らす.

[4] $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ の微分と積分

$i(t) = I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ とするとき，

$$\begin{aligned}
L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ i(t) &= \mathrm{j}\omega L\ i(t), \\
\frac{1}{C}\int i(t)\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} i(t)
\end{aligned}$$

となることを示せ.

略解

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \left(I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) = \mathrm{j}\omega L\ I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega L\ i(t). \tag{3.71}$$

$$\frac{1}{C}\int \left(I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\ I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\ i(t). \tag{3.72}$$

[5] オイラーの公式の実部と虚部

確認事項 [1] と [2] の結果は，それぞれ，[4] の虚部と実部に対応していることを確認せよ.

略解 $i(t)$ をオイラーの公式で書けば，

$$i(t) = I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = I_\mathrm{m}\cos\omega t + \mathrm{j}I_\mathrm{m}\sin\omega t \tag{3.73}$$

となる．これに対し，

$$\begin{aligned}
L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ i(t) &= \mathrm{j}\omega L\ i(t) \\
&= \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\omega L\ I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \omega L\ I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \frac{\pi}{2})} \\
&= \omega L\ I_\mathrm{m}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad + \mathrm{j}\omega L\ I_\mathrm{m}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C}\int i(t)\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\ i(t) \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\omega C}\ I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \frac{1}{\omega C}\ I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \frac{\pi}{2})} \\
&= \frac{1}{\omega C}\ I_\mathrm{m}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad + \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\ I_\mathrm{m}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.75}$$

となり，虚部と実部に対応していることが確認できる．線形微分方程式については，このような対応が一般的に成り立つことが数学的に保障されている.

事後学習内容確認事項

1. 正弦波の指数関数表現

交流電気回路の電流波形と電圧波形が従う回路方程式は，線形微分方程式となる．この方程式に従う電流波形と電流波形の表記の仕方として，三角関数を用いた実関数表現以外に，複素数を指数に持つ指数関数表現がある．以下の実関数表現

$$v(t) = V_\mathrm{m}\sin(\omega t + \theta), \qquad i(t) = I_\mathrm{m}\sin(\omega t + \phi)$$

に対応する指数関数表現を書け．

略解

与えられた実関数表現の電圧波形と電流波形を指数関数表現すると，

$$v(t) = V_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\theta)}, \qquad i(t) = I_\mathrm{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}$$

となる．

2. 正弦波のフェーザ表記

指数関数表現の回路方程式の全ての項に共通についてくる時間依存の項；

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

を省いてしまい，振幅と位相の情報のみで方程式を記述したときの複素数をフェーザという．通常は大文字で表す．

上記問題の電圧波形と電流波形をフェーザ形式で表せ．また，電気回路特有の表記法である極座標形式でも表せ．

略解

上記問題の電圧波形と電流波形をフェーザ形式で表すと，

$$V = V_\mathrm{e}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}, \qquad I = I_\mathrm{e}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$$

となる．なお，フェーザの絶対値は波形の振幅ではなく実効値であるから，実際の波形とフェーザとの対応は以下の通りとなる．

$$V_\mathrm{e} = \frac{V_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}, \qquad I_\mathrm{e} = \frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}.$$

フェーザを極座標表記すれば，以下のようになる．

$$V = V_\mathrm{e}\angle\theta, \qquad I = I_\mathrm{e}\angle\phi.$$

2. 回路素子の電圧と電流の関係

抵抗，コイル，コンデンサについて，フェーザ形式の電圧と電流の間に成り立つ関係式を書け．

略解

抵抗 R の場合，

$$v(t) = R\,i(t) \quad\Longrightarrow\quad V = R\,I$$

となる．

コイル L の場合，

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) \quad\Longrightarrow\quad V = \mathrm{j}\omega L\,I$$

となる．

コンデンサ C の場合，

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad V = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\,I$$

となる．

第 4 章

インピーダンス・アドミタンス・極座標形式

本章では，以下のことを学ぶ．

- **インピーダンス**
  フェーザ形式で表した電圧を V，フェーザ形式で表した電流を I とするとき，

$$V = ZI$$

  なる関係式における Z を**インピーダンス**という．一般に，記号 Z で表される．
- **アドミタンス**
  インピーダンスの逆数を**アドミタンス**という．一般に，記号 Y で表される．電圧，電流との関係は，

$$I = YV$$

  となる．

インピーダンスは，直流しか扱っていなかったときのオームの法則:

$$V = RI$$

の抵抗 R に相当する．直流のオームの法則と異なる点は，

- V と I がフェーザ (複素数) であり，
- Z も複素数である，

という点だけである．

交流回路の解析は，sin や cos の波形のままで解析しようとすると，微分と積分が混在した複雑な方程式となってしまうことを既に確認した．これに対し，フェーザ形式を用いれば，交流回路の解析は，上記の二つ点を考慮して計算する必要はあるが，直流抵抗回路の解析と全く同じ原理で行うことができる．

4.1　インピーダンス

抵抗しか扱わない直流回路におけるオームの法則は，

$$V = R\ I \tag{4.1}$$

であった．

交流の場合においても，フェーザ形式という表現方法を用いることによって，抵抗，コイル，コンデンサのどの場合も，オームの法則のように

$$V = Z\ I \tag{4.2}$$

という形式で表されることを学んだ．Z は，抵抗の場合は実数，コイルの場合は正の虚数，コンデンサの場合は負の虚数であった．

複数の回路素子の直並列接続で構成されている回路の二つの端子間についても，同様の関係が成り立つ．この場合，Z は任意の複素数となる．電気回路学では，このフェーザ版オームの法則の式の中の抵抗に相当する Z を**インピーダンス** (impedance) と呼ぶ．一般に，インピーダンスは記号 Z で表されることが多い．単位は Ω (オーム, Ohm) である．

任意のインピーダンスを回路図中で表すときは，「□」の記号で表す（抵抗の記号と同じであるので間違わないように... 昔は抵抗の記号はギザギザ記号であったが，世界標準に合わせたことでインピーダンスの記号と抵抗の記号の区別が無くなってしまった...）.

課題

$R, \omega L, \dfrac{1}{\omega C}$ の単位が全て Ω であることを確認せよ．

略解

ω の単位は，[rad s^{-1}] である．ラジアンは無次元量であるから，単位としては，[s^{-1}] である．L の単位は [H]

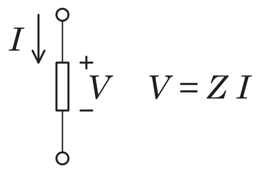


図 4.1 インピーダンス.

(ヘンリー) である．[H] は，$v = L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ という関係からわかるように，以下の関係を満たす.

$$[\mathrm{V}] = [\mathrm{H}][\mathrm{A}][\mathrm{s}]^{-1} \Longrightarrow [\mathrm{H}] = [\mathrm{V}][\mathrm{A}]^{-1}[\mathrm{s}]. \tag{4.3}$$

従って，ωL の単位は,

$$[\mathrm{s}^{-1}][\mathrm{L}] = [\mathrm{V}][\mathrm{A}]^{-1} = [\Omega] \tag{4.4}$$

となる．一方，C の単位は，[F] (ファラッド) である．[F] は，$v = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i\ \mathrm{d}t$ という関係からわかるように，以下の関係を満たす.

$$[\mathrm{V}] = [\mathrm{F}]^{-1}[\mathrm{A}][\mathrm{s}] \Longrightarrow [\mathrm{F}] = [\mathrm{V}]^{-1}[\mathrm{A}][\mathrm{s}]. \tag{4.5}$$

従って，$\dfrac{1}{\omega C} = (\omega C)^{-1}$ の単位は,

$$([\mathrm{s}]^{-1}[\mathrm{F}])^{-1} = [\mathrm{V}][\mathrm{A}]^{-1} = [\Omega] \tag{4.6}$$

となる.

4.2 回路素子のインピーダンス

抵抗，コイル，コンデンサの単独のインピーダンスを復習しておこう．以下の通りである.

- 抵抗 R
- コイル $\mathrm{j}\omega L$
- コンデンサ $\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$

4.3 インピーダンスの直列接続

合成インピーダンスの求め方は，適用する原理原則が直流回路の場合と全く同じであるから，抵抗の直列・並列接続の場合と全く同じである．異なる点は，扱う数値が大きさしかもたない実数ではなく，大きさと偏角（もしくは実部と虚部）を持つ複素数である，という点である.

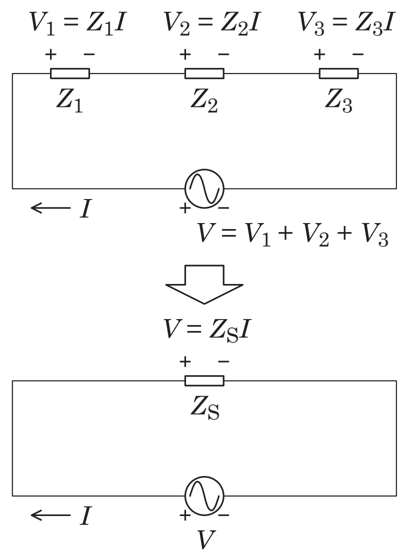


図 4.2 インピーダンスの直列合成.

図 4.2 は直列接続の場合の考え方を示した図である．抵抗の場合に適用した原理原則を R を Z にして，もう一度ここに示そう.

(1) **1 本の電線を流れる電流はどこも同じである.**

$$I = \frac{V_1}{Z_1}, \quad I = \frac{V_2}{Z_2}, \quad I = \frac{V_3}{Z_3}. \tag{4.7}$$

(2) **複数の回路素子を直列接続したときの全体の電圧降下は個々の回路素子の電圧降下の和である．また，ループを形成しているとき，起電力の総和は電圧降下の総和に等しい.**

$$V = V_1 + V_2 + V_3. \tag{4.8}$$

以上の原理原則から，$V = Z_\mathrm{S} I$ を満たす直列合成インピーダンス Z_S が以下のようになるということが導き出される.

$$Z_\mathrm{S} = Z_1 + Z_2 + Z_3. \tag{4.9}$$

簡単な合成インピーダンスの具体例を**図 4.3** に示す.

4.4 インピーダンスの並列接続

図 4.4 は並列接続の場合の考え方を示した図である．抵抗の場合に適用した原理原則を R を Z にして，もう一度ここに示そう.

(1) **同じ節点の間の電位差は同じである.**

$$V = Z_1 I_1, \quad V = Z_2 I_2, \quad V = Z_3 I_3. \tag{4.10}$$

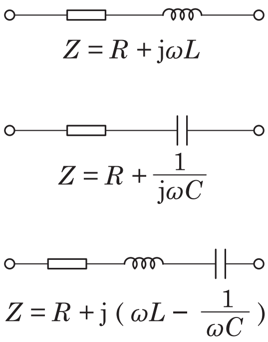


図 4.3 簡単な合成インピーダンスの例.

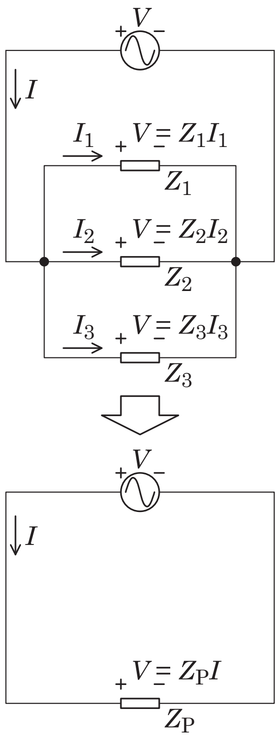


図 4.4 インピーダンスの並列合成.

(2)　ある節点に入った電流は，出る電流に等しい.

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \tag{4.11}$$

以上の原理原則から，$V = Z_P I$ を満たす並列合成インピーダンス Z_P が以下のようになるということが導き出される.

$$\frac{1}{Z_P} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}. \tag{4.12}$$

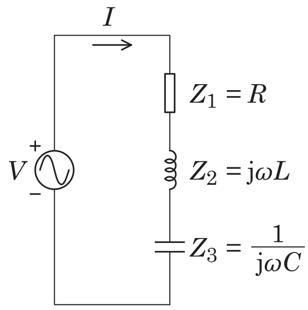


図 4.5 交流問題の簡単な例.

4.5　抵抗とリアクタンス

合成インピーダンスの例からわかるように，インピーダンスは，一般には，以下のように実部と虚部を持つ.

$$Z = R + \mathrm{j}X. \tag{4.13}$$

実部 R を抵抗成分 (もしくは，単に抵抗 (resistance)), 虚部 X をリアクタンス成分 (もしくは，単にリアクタンス (reactance)) と呼ぶ．リアクタンスは，その正負によって以下のように呼ばれる.

- $X > 0$: 誘導性リアクタンス
- $X < 0$: 容量性リアクタンス

コイル (インダクタ) のインピーダンスが正の純虚数，コンデンサ (キャパシタ) のインピーダンスが負の純虚数，であることから，このように呼ぶことはわかると思う.

4.6　交流の場合の「問題を解く」の例

交流回路の「問題を解く」は，多くの場合，電源の素性と回路の素性が与えられている状況で，流れる電流を求めるという場合が多い.

例えば，**図 4.5** に示す回路において，フェーザ形式で電圧 V が与えられているとき，フェーザ形式で電流 I を求めよ，というような問題である．こうした問題に対する取り組み方法は，電圧と電流の挙動を規定する原理原則が直流でも交流でも同じであるから，基本的に直流抵抗回路の場合と同じ考え方でよい．異なるのは，

- 直流の場合は，電圧と電流の絶対値だけ考慮すればよい．$V = RI$ の R も絶対値だけを扱うので，実数の四則演算だけでよい.

- 交流の場合は, 電圧と電流を, 絶対値に加えて位相も考慮するフェーザという形式で取り扱う．$V = ZI$ の Z(インピーダンス) も絶対値と偏角（もしくは実部と虚部）を有するので，複素数の四則演算を行う必要がある．

という点である．

4.7 アドミタンス

抵抗の逆数としてコンダクタンスが定義されていたように，インピーダンスの場合にも，その逆数として**アドミタンス** (admittance) というものが定義されている．即ち，

$$I = Y\,V. \tag{4.14}$$

における Y をアドミタンスという．インピーダンス Z との関係は,

$$Y = \frac{1}{Z}. \tag{4.15}$$

という逆数の関係にある．単位はコンダクタンスの場合と同様に S (ジーメンス, Siemens) である．アドミタンスも回路図上では「□」で描く．

4.8 コンダクタンスとサセプタンス

インピーダンスの実部と虚部に名前が付いていたように，アドミタンスにも名前が付いている．

$$Y = G + \mathrm{j}B \tag{4.16}$$

における G をコンダクタンス (conductance)，B をサセプタンス (susceptance) という．また，B については，これまたインピーダンスのリアクタンスのように，その値が正か負かによって以下のように区別している．

- $B > 0$: 容量性サセプタンス
- $B < 0$: 誘導性サセプタンス

4.9 アドミタンスの直列並列接続

アドミタンスを直列，並列接続したときの合成アドミタンスは，**図 4.6**，**図 4.7** に示すように，直流の時のコンダクタンスの場合と同じである． アドミタンスを直

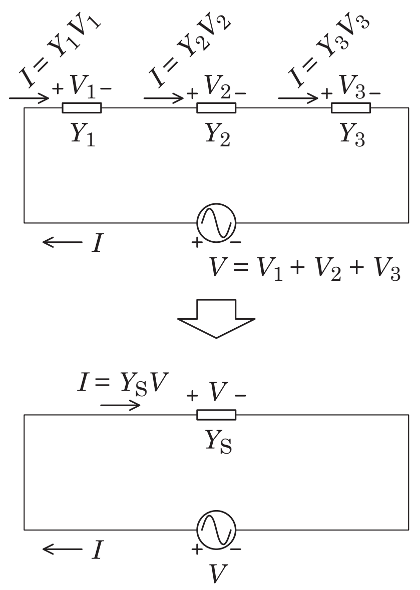


図 4.6 アドミタンスの直列合成.

列合成した場合には,

$$\frac{1}{Y_{\mathrm{S}}} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_3} \tag{4.17}$$

となり，アドミタンスを並列合成した場合には,

$$Y_{\mathrm{P}} = Y_1 + Y_2 + Y_3 \tag{4.18}$$

となる．

4.10 電気回路特有の複素数の表記法

フェーザ形式で交流回路の挙動を考えるとき，その計算過程で複素数を扱うことになる．数学を学んだときの複素数の一般的な表記法は，実部と虚部を用いた直角座標形式と呼ばれる形式であった．しかし，位相の変化を求めたりする電気回路では，実部と虚部が明示されている直角座標形式よりも，絶対値と偏角が明示されている方が実用的であるため，**極座標形式**というものがよく用いられる．以下に複素数の表記法をまとめておく．

- **直角座標形式**

  $z = x + \mathrm{j}y$

  インピーダンスの足し算，引き算の時には便利であり，実際に使う．しかし，かけ算割り算になると不便である．また，偏角もすぐにはわからない．

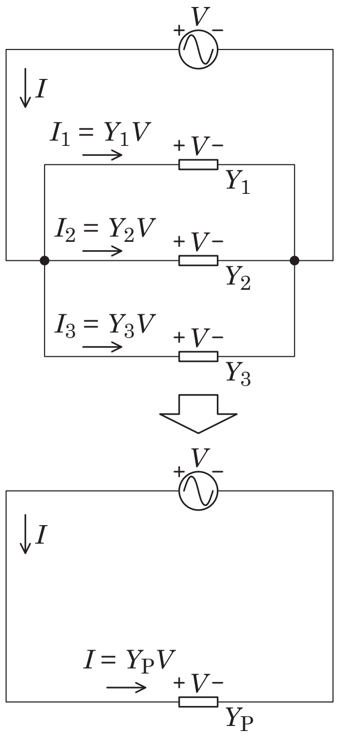


図 4.7 アドミタンスの並列合成.

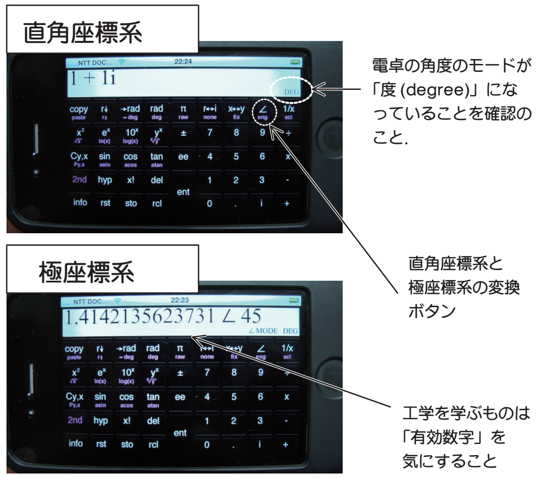


図 4.8 関数電卓による直角座標系と極座標系の変換例.

- **指数関数形式**

  $z = re^{\mathrm{j}\theta} = r\exp[\mathrm{j}\theta]$

  これは極座標形式の一種であるが，指数関数を使うので，本講義では「指数関数形式」と呼ぶことにする．この場合の θ の単位はラジアンが用いられる．数値を扱わない理論計算の時には，この形式が良く用いられるが，実際の工学的問題の場合には，偏角が π 何倍などという形では出てこないので，次に示すような角度を度で表した方式が良く用いられる．例えば，「偏角が 1 ラジアン」と言われても，どれくらいの角度なのかがすぐにわからないハズである．

- **極座標形式**

  $z = r\angle\theta$

  この場合の θ の単位は度「°」が用いられる．度を用いるのは数値を扱う工学的問題を対象とするからである．先ほどの 1 ラジアンは，度で表すと，約 57° である．これならば，だいたい 60° なので，三角定規を思い浮かべれば，どれくらいの角度なのかがすぐにピンとくるハズである．

4.11 極座標形式の計算例

極座標形式の計算例を以下に示す．例えば，かけ算の場合には，

$$(4\angle 15^\circ) \times (2\angle 30^\circ) = 8\angle 45^\circ \tag{4.19}$$

となる．割り算の場合には，

$$\frac{4\angle 15^\circ}{2\angle 30^\circ} = 2\angle -15^\circ \tag{4.20}$$

となる．

関数電卓によっては，こうした極座標表記と直角座標表記の変換をしてくれるものがある．電気回路を扱う場合には，そのような電卓を良く使う．最近では，スマホアプリで無料のものがあるので利用するとよい．なお，関数電卓で角度を扱うときには，電卓の角度の単位の設定に気をつけること．

4.12 交流電源の内部インピーダンスと内部アドミタンス

現実の直流電源には内部抵抗なるものが潜んでいることを以前に述べた．交流の電源の場合にも，現実の交流電源には，内部インピーダンスが潜んでいる．

図 4.9 に示すように，交流電源を交流電圧源としてみた場合，電源端子から電源側を見たときに，$V = ZI$ を満たす Z を電源の**内部インピーダンス**という．なお，内部インピーダンスがいくらか？ということを計算したりす

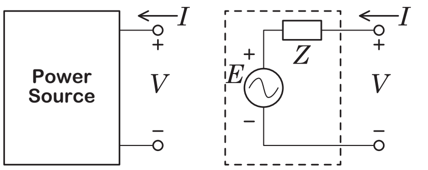


図 4.9 内部抵抗を考慮した電源 (電圧源として見た場合).

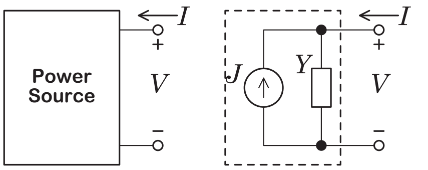


図 4.10 内部抵抗を考慮した電源 (電流源として見た場合).

るときには，電源回路の中の理想電源部分は全て"**OFF**"にして考える．

図 4.10 に示すように，交流電源を交流電流源としてみた場合，電源端子から電源側を見たときに，$I = YV$ を満たす Y を電源の**内部アドミタンス**という．なお，内部アドミタンスがいくらか？ということを計算したりするときには，電源回路の中の理想電源部分は全て"**OFF**"にして考える．

4.13 電源の OFF とは？

電圧源と電流源では，**OFF** というコトバが意味する状況が異なることに留意して欲しい．電圧源の場合には，$E = 0$ であるから，**図 4.11**(a) に示すように，電圧源の部分が短絡されている状況を意味する．一方，電流源の場合には，$J = 0$ であるから，**図 4.11**(b) に示すように，電流源の部分が開放されている状況を意味する．

4.14 等価の概念

ある電流電圧特性を示す回路は，一つだけではない．同じ $V = ZI$ なる電流電圧の関係になる回路をお互いに「**等価**」である，という．等価な回路を**等価回路**という．

例えば，電源回路の場合には，**図 4.9** と**図 4.9** に示すように，

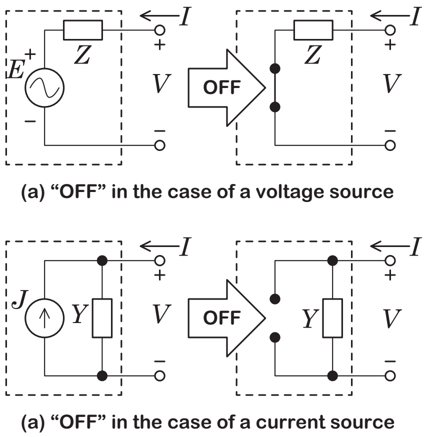


図 4.11 電源を OFF する，ということの意味．(a) 電圧源の場合は短絡 (ショート) であり，(b) 電流源の場合は開放 (オープン) である．

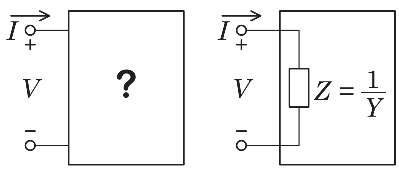


図 4.12 複雑回路の入力インピーダンス，入力アドミタンス．

- 電圧源を用いて表す方式
- 電流源を用いて表す方式

の二通りがある．これらの電源のパラメータが，

$$E = ZJ, \quad Y = \frac{1}{Z} \tag{4.21}$$

なる関係を満たせば，両者は等価回路である，ということになる．即ち，電源端子側から電源側を見たときに，どちらも同じ電流電圧特性を示すのである．

4.15 複雑回路の入力インピーダンス

電源部を含む回路を，端子側から電源側に見込んだときに存在するインピーダンスを内部インピーダンスと称した．これに対して，電源部を含まない受動回路だけで構成されている回路を，端子側から回路側に見込んだときのインピーダンスやアドミタンスを**入力インピーダンス**，**入力アドミタンス**と称する．端子から回路を見たと

きに，電流と電圧の間に

$$V = ZI, \text{ あるいは } I = YV \tag{4.22}$$

なる関係があるとき，Z が入力インピーダンス，Y が入力アドミタンスである．

豆知識

豆知識

回路図で「なくす」の意味するところは？

直列回路で回路素子をなくす場合と，並列回路で回路素子をなくす場合では，意味が異なることに留意すること．**図 4.13** に示すように，多くの場合，直列回路で「$\boldsymbol{Z_2}$ を無なくす」は，$\boldsymbol{Z_2}$ がある部分を短絡することに対応する．この場合は，多くの人が間違わずに $\boldsymbol{Z_2 = 0}$ とする．一方，多くの場合，並列回路で「$\boldsymbol{Z_2}$ をなくす」は，$\boldsymbol{Z_2}$ がある部分を開放にすることに対応する．これまでの経験では，多くの人が間違って $\boldsymbol{Z_2 = 0}$ とする．正しくは，$\boldsymbol{Z_2 = \infty}$ であることに注意すること．

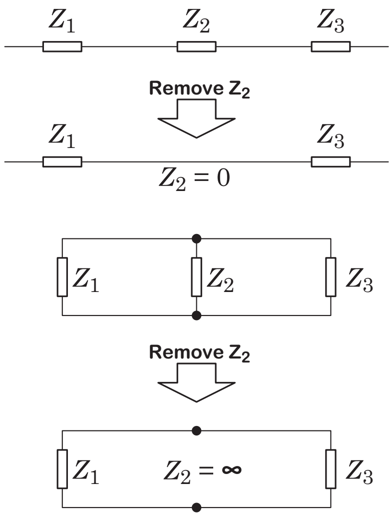


図 4.13 電気回路図の上で「なくす」が意味するところ．

事前基盤知識確認事項

[1] フェーザ形式による表現の復習

$i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta)$ なる電流のフェーザ形式による表現を書き，複素平面上で描け．

略解

$i(t)$ をフェーザ形式で表すと，

$$I = I_{\mathrm{e}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

となる．ここで，フェーザの絶対値は実効値 (振幅/$\sqrt{2}$) であるから，

$$I_{\mathrm{e}} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}$$

となる．これを複素平面上で図示すれば，**図 4.14** のようになる．

[2] フェーザ形式による表現の復習

$v(t) = V_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta)$ なる電圧のフェーザ形式による表現を書き，複素平面上で描け．

略解

$v(t)$ をフェーザ形式で表すと，

$$V = V_{\mathrm{e}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

となる．ここで，フェーザの絶対値は実効値 (振幅/$\sqrt{2}$) であるから，

$$V_{\mathrm{e}} = \frac{V_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}$$

となる．これを複素平面上で図示すれば，**図 4.15** のようになる．

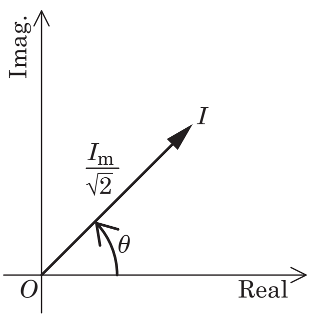


図 4.14 $i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta)$ のフェーザ表現．

[3] 直列接続の場合の合成抵抗の復習

R_1，R_2，R_3 を直列接続したときの合成抵抗 R_{S} は？

略解

$$R_{\mathrm{S}} = R_1 + R_2 + R_3$$

[4] 並列接続の場合の合成抵抗の復習

R_1，R_2，R_3 を並列接続した合成抵抗 R_{P} は？

略解

$$\frac{1}{R_{\mathrm{S}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

交流の場合の抵抗に相当する「インピーダンス」も，全く同じように扱ってよいことを本章で学ぶ．違うのは，値が大きさだけではなく，実部と虚部を持つ（もしくは，大きさと偏角を持つ）複素数である，という点である．

[5] 極座標形式の電気回路的表現

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

なる複素数を，電気回路では，

$$z = r\angle\theta$$

なる独特の形式で表す流儀がある．例えば，$r = 2.0$，$\theta = \frac{\pi}{4} = 45°$ ならば，それぞれどのように表されるか，書いてみよ．有効数字は 2 桁とする．

略解

$$z = 2.0\angle 45°.$$

[6] 角度の表現方法

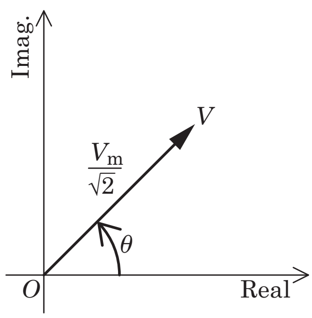


図 4.15 $v(t) = V_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta)$ のフェーザ表現．

0.77 ラジアンがどのような角度か図示せよ．44° がどのような角度か図示せよ．

略解

省略．

この課題は，具体的数値を扱う工学において，ラジアンと度のどちらの表現方法が具体的な角度を頭に描き易いか，を考えてもらうための課題である．少なくとも筆者は，44° の方が具体的角度を頭に描きやすい．

ラジアンで角度を明記することに価値があるのは，π の何倍か，という極めて限られた場合だけを扱う理論の時であると思われる．そのような観点から，工学である本講義では，多くの場合，角度を「度」で表すことを「強制」するので，ご理解頂きたい．

事後学習内容確認事項

A. インピーダンス

1. 回路素子のインピーダンス

抵抗 $R = 1\ \Omega$，コイル $L = 1$ mH，コンデンサ $C = 500\ \mu$F があるとき，それぞれの回路素子のインピーダンスを求めよ．交流電圧・電流の周波数は $\omega = 1000$ rad/s とする．有効数字 2 桁で答えよ．

略解

抵抗 R のインピーダンスは，

$$R = 1.0\ \Omega$$

となる．

コイル L のインピーダンスは，

$$\begin{aligned} \mathrm{j}\omega L &= \mathrm{j}\,(1000) \times (1 \times 10^{-3}) \\ &= \mathrm{j}\ 1.0\ \Omega \end{aligned}$$

となる．

コンデンサ C のインピーダンスは，

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} &= -\mathrm{j}\,\frac{1}{(1000) \times (500 \times 10^{-6})} \\ &= -\mathrm{j}\ 2.0\ \Omega \end{aligned}$$

となる．

2. 直列回路のインピーダンス

R, L, C の直列合成インピーダンス Z を求め，直角座標形式と極座標形式で表せ．有効数字 2 桁で表せ．Z を複素平面上で図示せよ．

略解

直角座標形式では，

$$Z = (1.0 - \mathrm{j}1.0)\ \Omega$$

となる．

極座標形式では，

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{2}\angle -45^\circ \\ &= (1.4\angle -45^\circ)\ \Omega \end{aligned}$$

となる．

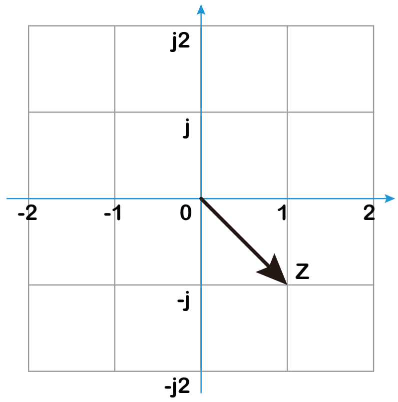


図 4.16 抵抗 $R = 1\ \Omega$，コイル $L = 1$ mH，コンデンサ $C = 500\ \mu$F の直列回路の周波数 $\omega = 1000$ rad/s のときのインピーダンス Z.

このインピーダンス Z を図示すると，**図 4.16** のようになる．

3. フェーザと波形の対応関係

上記の Z に印加する電圧波形の振幅を $V_\mathrm{m} = 2.0$ V，周波数を $\omega = 1000$ rad/s とするとき，Z にかかる電圧と電流をフェーザ形式で表したときの関係を複素平面上に描け (実効値と位相の情報が必要)．それを基にして，電圧と電流の波形の関係を描け (振幅と位相の情報が必要).

略解

波形をフェーザ形式で表したとき，

$$\begin{aligned} &\text{絶対値} = \text{実効値} = \frac{\text{振幅}}{\sqrt{2}}, \\ &\text{偏角} = \text{初期位相} = \text{指定なしならばゼロ} \end{aligned}$$

である．従って，フェーザ形式で表した電圧 V は，

$$\begin{aligned} \text{実効値}\ V_\mathrm{e} &= \frac{V_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ &= 1.4\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

より，

$$V = \sqrt{2}\angle 0^\circ = (1.4\angle 0.0^\circ)\ \mathrm{V}$$

となる．

一方，$Z = (\sqrt{2}\angle -45^\circ)\ \Omega$ であるから，オームの法則により，

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{\sqrt{2}\angle 0^\circ}{\sqrt{2}\angle -45^\circ} = (1.0\angle 45^\circ)\ \mathrm{A}$$

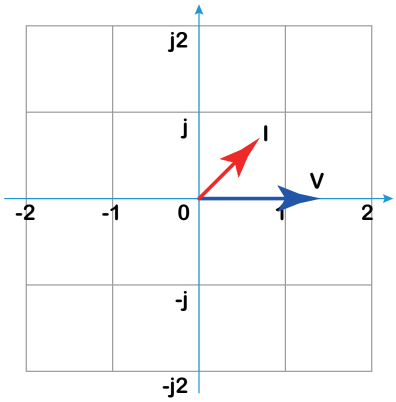


図 4.17 抵抗 $R = 1\ \Omega$，コイル $L = 1$ mH，コンデンサ $C = 500\ \mu$F の直列回路に周波数 $\omega = 1000$ rad/s，振幅 $V_{\mathrm{m}} = 2$ V の交流電圧を印加したときの電圧と電流のフェーザの関係.

となる.

冗長だが，学習のために以上をまとめると，

$$
\begin{aligned}
&\text{フェーザ形式の電圧 } V && = (1.4\angle 0.0^\circ)\ \mathrm{V},\\
&\text{フェーザ形式の電流 } I && = (1.0\angle 45^\circ)\ \mathrm{A},\\
&\text{電圧の実効値 } V_{\mathrm{e}} = |V| && = 1.4\ \mathrm{V},\\
&\text{電圧の振幅 } V_{\mathrm{m}} = \sqrt{2}V_{\mathrm{e}} && = 2.0\ \mathrm{V},\\
&\text{電圧の初期位相 } \theta && = 0^\circ,\\
&\text{電流の実効値 } I_{\mathrm{e}} = |I| && = 1.0\ \mathrm{A},\\
&\text{電流の振幅 } I_{\mathrm{m}} = \sqrt{2}I_{\mathrm{e}} && = 1.4\ \mathrm{A},\\
&\text{電流の初期位相 } \phi && = 45^\circ
\end{aligned}
$$

となる.

フェーザ形式の電圧と電流を複素平面上に描けば，**図 4.17** のようになる.

電圧と電流のフェーザと波形の関係は，

$$
\begin{aligned}
V = V_{\mathrm{e}}\angle\theta &\iff v(t) = V_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \theta),\\
I = I_{\mathrm{e}}\angle\phi &\iff i(t) = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}
$$

であるから，電圧波形と電流波形の関係は，**図 4.18** のようになる.

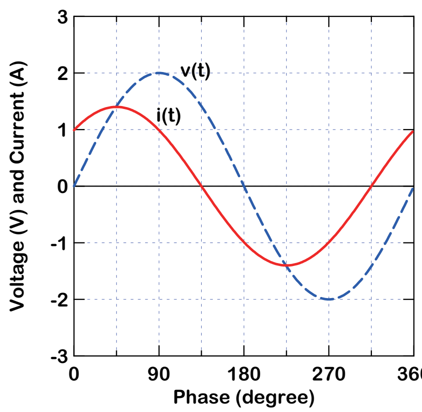


図 4.18 抵抗 $R = 1\ \Omega$，コイル $L = 1$ mH，コンデンサ $C = 500\ \mu$F の直列回路に周波数 $\omega = 1000$ rad/s，振幅 $V_{\mathrm{m}} = 2$ V の交流電圧を印加したときの電圧と電流の波形.

B. アドミタンス

1. 回路素子のアドミタンス

抵抗 $R = 1\ \Omega$，コイル $L = 0.5$ mH，コンデンサ $C = 1000\ \mu$F があるとき，それぞれの回路素子のアドミタンスを求めよ．交流電圧・電流の周波数は $\omega = 1000$ rad/s とする．有効数字 2 桁で答えよ．

略解

抵抗 R のアドミタンスは，

$$\frac{1}{R} = 1.0\ \mathrm{S}$$

となる．

コイル L のアドミタンスは，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{j}\omega L} &= -\mathrm{j}\,\frac{1}{(1000)\times(0.5\times 10^{-3})}\\ &= -\mathrm{j}\ 2.0\ \mathrm{S}\end{aligned}$$

となる．

コンデンサ C のアドミタンスは，

$$\begin{aligned}\mathrm{j}\omega C &= \mathrm{j}\ (1000)\times(1000\times 10^{-6})\\ &= \mathrm{j}\ 1.0\ \mathrm{S}\end{aligned}$$

となる．

2. 並列回路のアドミタンス

R，L，C の並列合成インピーダンス Y を求め，直角座標形式と極座標形式で表せ．Y を複素平面上で図示せよ．

略解

直角座標形式では，

$$Y = (1.0 - \mathrm{j}1.0)\ \mathrm{S}$$

となる．

極座標形式では，

$$\begin{aligned}Y &= \sqrt{2}\angle -45^\circ\\ &= (1.4\angle -45^\circ)\ \mathrm{S}\end{aligned}$$

となる．

このアドミタンス Y を複素平面上で表せば，**図 4.19** のようになる．

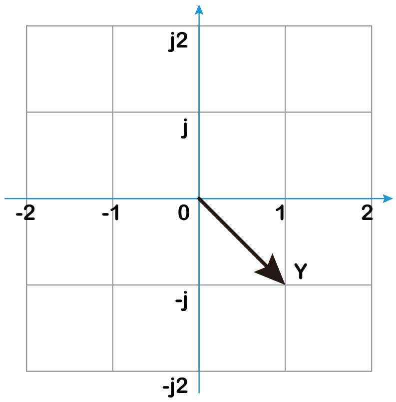


図 4.19 抵抗 $R = 1\ \Omega$，コイル $L = 0.5$ mH，コンデンサ $C = 1000\ \mu$F の並列回路の周波数 $\omega = 1000$ rad/s におけるアドミタンス Y．

3. フェーザと波形の対応関係

上記の Y に印加する電圧波形の振幅を $V_\mathrm{m} = 2.0$ V，周波数を $\omega = 1000$ rad/s とするとき，Y にかかる電圧と電流をフェーザ形式で表したときの関係を複素平面上に描け (実効値と位相の情報が必要)．それを基にして，電圧と電流の波形の関係を描け (振幅と位相の情報が必要).

略解

波形をフェーザ形式で表したとき，

$$\begin{aligned}&\text{絶対値} = \text{実効値} = \frac{\text{振幅}}{\sqrt{2}},\\ &\text{偏角} = \text{初期位相} = \text{指定なしならばゼロ}\end{aligned}$$

である．従って，フェーザ形式で表した電圧 V は，

$$\begin{aligned}\text{実効値}\ V_\mathrm{e} &= \frac{V_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\\ &= 1.4\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

より，

$$V = \sqrt{2}\angle 0^\circ = (1.4\angle 0.0^\circ)\ \mathrm{V}$$

となる．

一方，$Y = (\sqrt{2}\angle -45^\circ)$ S であるから，オームの法則により，

$$I = \frac{V}{Z} = VY = (\sqrt{2}\angle 0^\circ)\ (\sqrt{2}\angle -45^\circ) = (2.0\angle -45^\circ)\ \mathrm{A}$$

となる．

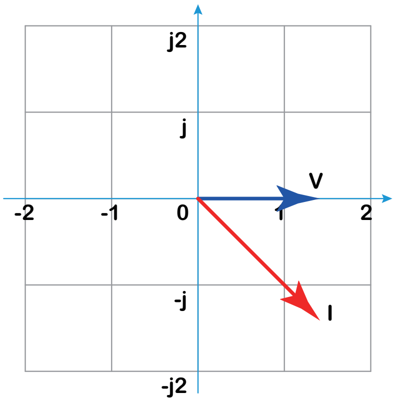


図 4.20 抵抗 $R = 1\ \Omega$，コイル $L = 0.5$ mH，コンデンサ $C = 1000\ \mu$F の並列回路に，周波数 $\omega = 1000$ rad/s，振幅 $V_\mathrm{m} = 2.0$ V の交流電圧を印加したときの電圧と電流のフェーザの関係．

冗長だが，学習のために以上をまとめると，

$$
\begin{aligned}
&\text{フェーザ形式の電圧 } V && = (1.4\angle 0.0^\circ)\ \mathrm{V}, \\
&\text{フェーザ形式の電流 } I && = (1.0\angle 45^\circ)\ \mathrm{A}, \\
&\text{電圧の実効値 } V_\mathrm{e} = |V| && = 1.4\ \mathrm{V}, \\
&\text{電圧の振幅 } V_\mathrm{m} = \sqrt{2}V_\mathrm{e} && = 2.0\ \mathrm{V}, \\
&\text{電圧の初期位相 } \theta && = 0^\circ, \\
&\text{電流の実効値 } I_\mathrm{e} = |I| && = 2.0\ \mathrm{A}, \\
&\text{電流の振幅 } I_\mathrm{m} = \sqrt{2}I_\mathrm{e} && = 2.8\ \mathrm{A}, \\
&\text{電流の初期位相 } \phi && = -45^\circ
\end{aligned}
$$

となる．

フェーザ形式の電圧と電流を複素平面上に描けば，**図 4.20** のようになる．

電圧と電流のフェーザと波形の関係は，

$$
\begin{aligned}
V = V_\mathrm{e}\angle\theta &\iff v(t) = V_\mathrm{m}\sin(\omega t + \theta), \\
I = I_\mathrm{e}\angle\phi &\iff i(t) = I_\mathrm{m}\sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}
$$

であるから，電圧波形と電流波形の関係は，**図 4.21** のようになる．

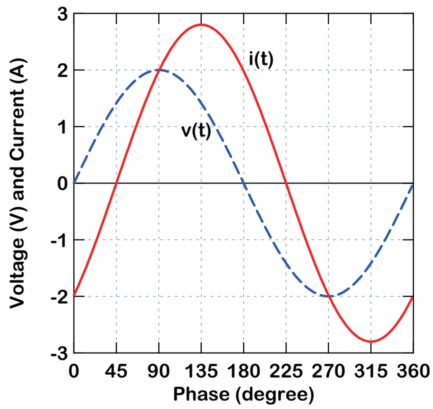


図 4.21 抵抗 $R = 1\ \Omega$，コイル $L = 0.5$ mH，コンデンサ $C = 1000\ \mu$F の並列回路に周波数 $\omega = 1000$ rad/s，振幅 $V_\mathrm{m} = 2$ V の交流電圧を印加したときの電圧と電流の波形．

第 5 章

交流回路の直並列接続

本章では，以下のことを身につけることを目的とする．

5 つの「できる」

- Z と Y の計算
- 複素平面上の Z と Y の図示
- フェーザを用いた交流回路の計算
- 複素平面上のフェーザの図示
- フェーザと実関数（波形）との対応

4 つの「知っている」

移相回路，等価回路，

ブリッジ回路，共振回路

5.1　直並列回路

本節では，幾つかの直列回路，並列回路について，合成インピーダンスを表す式を示し，その複素平面上での描像を示す．また，フェーザ形式で表した場合の電圧と電流の複素平面上での描像を示す．これらの事例に触れることで「フェーザ」と「インピーダンス」という概念に慣れてもらいたい．

5.1.1　RC 直列回路

図 5.1 に示すような抵抗 R とコンデンサ C の直列回路の合成インピーダンス Z は次式で表される．

$$Z = R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}. \tag{5.1}$$

ここで，Z の大きさ $|Z|$ と偏角 $\arg Z$ は次式で表される．なお，図中では偏角を θ と表記した．

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \tag{5.2}$$

$$\arg Z = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\omega CR}\right). \tag{5.3}$$

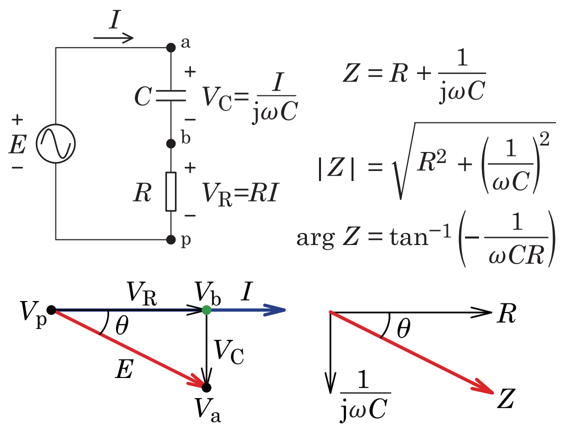


図 5.1 RC 直列回路図とそのインピーダンスを表す式，フェーザ形式で表した電流と電圧の複素平面上での関係，インピーダンスの複素平面上での描像．

5.1.2　RC 並列回路

図 5.2 に示すような抵抗 R とコンデンサ C の並列回路の合成アドミタンス Y は次式で表される．並列の場合は，アドミタンスで扱った方が式がシンプルになる（見通しがよい，などという）ので，アドミタンスで表しているが，必要ならばインピーダンスで表してもかまわない．

$$Y = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C. \tag{5.4}$$

ここで，Y の大きさ $|Y|$ と偏角 $\arg Y$ は次式で表される．なお，図中では偏角を θ と表記した．

$$|Y| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}, \tag{5.5}$$

$$\arg Y = \tan^{-1}(\omega CR). \tag{5.6}$$

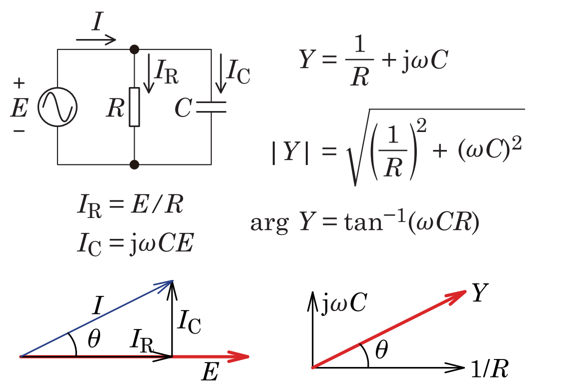


図 5.2 RC 並列回路図とそのアドミタンスを表す式，フェーザ形式で表した電流と電圧の複素平面上での関係，アドミタンスの複素平面上での描像．

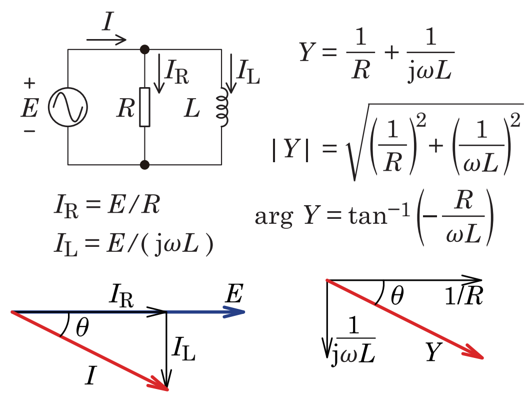


図 5.4 RL 並列回路図とそのアドミタンスを表す式，フェーザ形式で表した電流と電圧の複素平面上での関係，アドミタンスの複素平面上での描像．

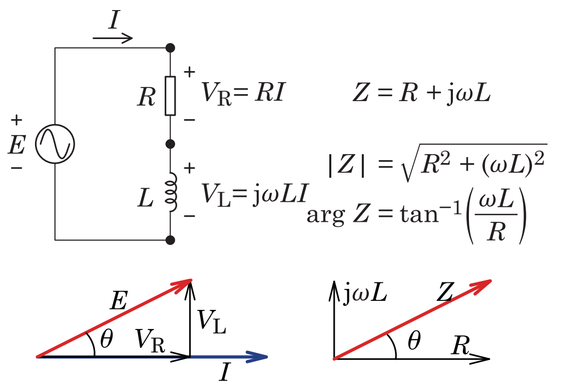


図 5.3 RL 直列回路図とそのインピーダンスを表す式，フェーザ形式で表した電流と電圧の複素平面上での関係，インピーダンスの複素平面上での描像．

5.1.3 RL 直列回路

図 5.3 に示すような抵抗 $\boldsymbol{R}$ とコイル $\boldsymbol{L}$ の直列回路の合成インピーダンス $\boldsymbol{Z}$ は次式で表される．

$$Z = R + \mathrm{j}\omega L. \tag{5.7}$$

ここで，Z の大きさ $|Z|$ と偏角 $\arg Z$ は次式で表される．なお，図中では偏角を θ と表記した．

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \tag{5.8}$$

$$\arg Z = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right). \tag{5.9}$$

5.1.4 RL 並列回路

図 5.4 に示すような抵抗 $\boldsymbol{R}$ とコイル $\boldsymbol{L}$ の並列回路の合成アドミタンス $\boldsymbol{Y}$ は次式で表される．並列の場合は，アドミタンスで扱った方が式がシンプルになる（見通しがよい，などという）ので，アドミタンスで表しているが，必要ならばインピーダンスで表してもかまわない．

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} = \frac{1}{R} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega L}. \tag{5.10}$$

ここで，Y の大きさ $|Y|$ と偏角 $\arg Y$ は次式で表される．なお，図中では偏角を θ と表記した．

$$|Y| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}, \tag{5.11}$$

$$\arg Y = \tan^{-1}\left(-\frac{R}{\omega L}\right). \tag{5.12}$$

5.2 つなぎ方に関する留意事項

図 5.5 は，$\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{C}$ を接続する順番が異なる二つの RC 直列回路である．合成インピーダンス，回路全体に流れる電流 $\boldsymbol{I}$ と電源電圧 $\boldsymbol{E}$ の関係は，どちらも全く同じである．また，$\boldsymbol{R}$ だけに注目したときの $\boldsymbol{R}$ の端子間の電圧 V_{R} と $\boldsymbol{R}$ に流れる電流 $\boldsymbol{I}$ も，二つの回路で比較しても差異はない．また，$\boldsymbol{C}$ だけに注目したときの $\boldsymbol{C}$ の端子間の電圧 V_{C} と $\boldsymbol{C}$ に流れる電流 $\boldsymbol{I}$ についても，同様に，差異が無い．

これら二つの回路は等価とみてよいのだろうか？

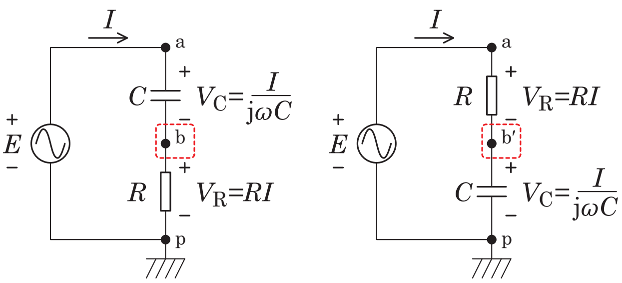


図 5.5 CR 直列回路と RC 直列回路．どちらも合成インピーダンスは同じであるが，p を接地電位 (= 0 V) とした場合の b と b′ の電位が異なる．

答えはこの回路の何処に注目しているかで異なる．

p と a の端子間しか問題にしないのであれば，等価である．しかし，b や b′ も考慮する場合には，等価ではない[*1]．これは，p を基準としたときの b の電位 V_{bp} と，p を基準としたときの b′ の電位 $V_{\mathrm{b'p}}$ が異なるからである．以下では，V_{bp} と $V_{\mathrm{b'p}}$ がどのように異なるのか，について説明する．

まず，説明のための前準備を行う．前の段落にて，何の説明もなく V_{bp} や $V_{\mathrm{b'p}}$ という書き方をしたが，二つの添え字で二点間の電圧やある点から見た「電位」を表すときのルールを定めておく．V_{bp} とは，「p から b を見たときの電圧（電位差）」，もしくは，「b の電位（但し，p を基準としてますよ）」である．従って，添え字の順番を逆にすると符号が変わるので留意すること[*2]．

図 5.6(a) と**図 5.6**(b) は，R と C の接続順番が異なる二つの回路の電圧と電流のフェーザ図である．説明をし易くするために，電流 I が複素平面上で水平になるような電圧が印加されているものとする．(a) と (b) のどちらの場合も，R と C を個別に抜き出して考えた場合の電圧と電流の関係は同じであり，次式のようになる．

$$V_{\mathrm{R}} = RI, \tag{5.13}$$

$$V_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} I. \tag{5.14}$$

以上で，前準備は終わりである．ここから説明の本論に入る．ある節点を基準としてそこから回路に沿って別の節点に移動するとき，回路素子と出会う順番が異なると，途中の電位が異なってくる，というのが説明の要点である．山登りに例えれば，**図 5.7** のように，山頂に向けて坂道を登るときに，異なる経路をたどると，最終的に到達する山頂の高さは同じであるが，途中の高さが異なる，というようなイメージである．これを複素平面上にフェーザ形式の電圧と電流を描くことで説明する．

図 5.6(a) の場合も**図 5.6**(b) の場合も，p から a に向かって電位勾配を登っていくと，最終的に到達する a の電位 V_{ap} は，どちらの場合も同じである (同じ山の頂上に到達する)．しかし，**図 5.6**(a) の場合には，p から登っていくときに最初に通る回路素子が抵抗 R であるのに対し，**図 5.6**(b) の場合には，最初に通る回路素子はコンデンサ C である．抵抗 R における電位勾配が式 (5.13) で与えられるのに対し，コンデンサ C における電位勾配は式 (5.14) で与えられ，抵抗の場合と異なる．従って，b と b′ の電位が異なるのである．どのように異なるか

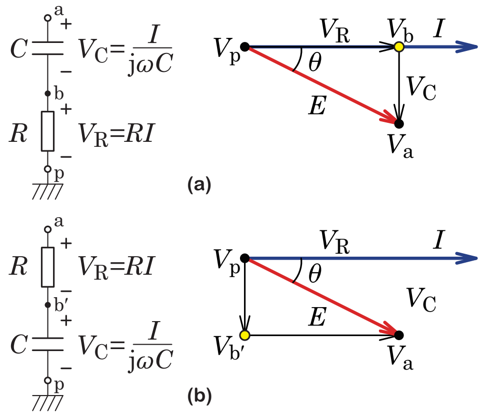


図 5.6 R と C の接続順番が異なる二つの回路の電圧と電流のフェーザ図．

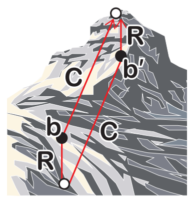


図 5.7 異なる素子を通って電位勾配を登ることを，異なる経路で山を登ることに例えると，イメージとしてはこんな感じである．通る経路がことなると，到達地点の高さは同じだが，途中の高さが異なる．

[*1] b や b′ を考慮する具体的な例としては，例えば，後で b（或いは b′）に何かを接続して使う場合などである．

[*2] 坂の勾配を言うときに，同じ勾配であっても，坂の上から見れば，その勾配は「下り坂」になるが，坂の下から見れば，その勾配は「上り坂」である，というのと同じである．

を見てみよう．

図 5.6(a) の場合には，p から b に向かうときに感じる電位勾配は，$V_{\mathrm{bp}} = V_{\mathrm{R}}$ である．抵抗では電圧と電流の間に位相差が生じないので，複素平面上で表したフェーザ形式の電流 I と V_{bp} は，電流が描かれている軸と同じ軸上に描かれることになる．一方，**図 5.6**(b) の場合には，p から b′ に向かうときに感じる電位勾配は，$V_{\mathrm{b'p}} = V_{\mathrm{C}}$ である．コンデンサでは電流に対して電流の位相が 90° 遅れるので，複素平面上で表したフェーザ形式の電流 I と $V_{\mathrm{b'p}}$ は，電流が描かれている軸に対して −90° だけ回転した方向に描かれることになる．

以上をまとめると，以下のようになる．

> **複数の回路素子を接続する場合，接続の順番が異なっていても，合成インピーダンスに違いは無いが，回路素子同士を接続している節点の電位が異なる**

このことをうまく利用すると，節点の電位の大きさは変えずに，位相だけを変える，という回路が出来る．これを移相回路という．以下の節では，このような特定の用途のために「うまい具合に作った回路」を紹介する．

5.3 移相回路 (その 1)

移相回路 (phase-shifter) の回路図を**図 5.8** に示す．R の値や ωC の値によって E に対する V の位相が変わる回路である．各部の電圧をフェーザ形式で表し，複素平面上で描くと，**図 5.9** のようになる．V_{R} と V_{C} が変わっても，p に対する b の電位 V_{bp} と p に対する b′ の電位 $V_{\mathrm{b'}}$ が補助線として描いた円周上を動くだけとなる．従って，$|V| = |V_{\mathrm{bp}} - V_{\mathrm{b'p}}| = |E|$ となり，$|V|$ の絶対値は変化せず，E に対する V の角度（即ち，E に対する V の位相）だけが変化する．

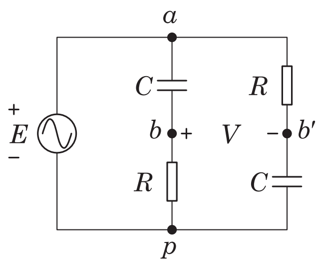


図 5.8 移相回路 (Phase-Shifter) の回路図．

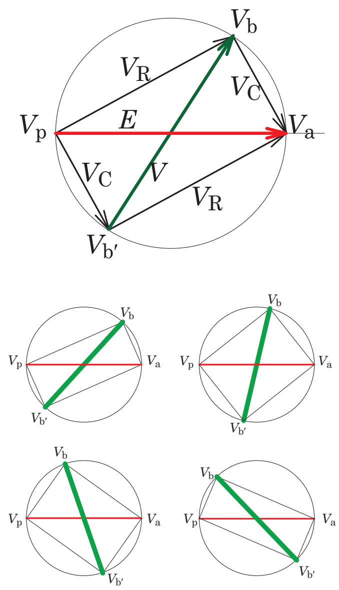


図 5.9 移相回路のフェーザ・ダイヤグラム．

5.4 移相回路 (その 2)

図 5.10 は，先の移相回路のマイナーチェンジ版である．動作機構は同じであるが，V_{bo} の大きさ (絶対値) が $|E|$ ではなく $|E|/2$ になる点が異なる．

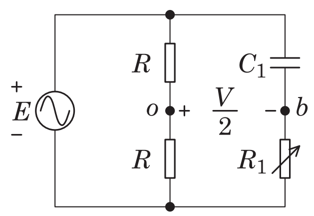


図 5.10 移相回路 (その 2) の回路図．

V_{bo} の絶対値が E の半分になることは，以下の式にて説明される．

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{bo}} &= \frac{R_1}{R_1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}} E - \frac{E}{2} \\
&= \frac{R_1 - \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}}{R_1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}} \frac{E}{2} \\
&= \frac{\mathrm{j}\omega C_1 R_1 - 1}{\mathrm{j}\omega C_1 R_1 + 1} \frac{E}{2}.
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

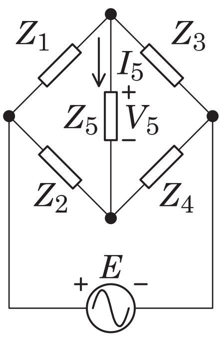


図 5.11 ブリッジ回路.

これより,

$$|V_{\mathrm{bo}}| = \frac{|E|}{2} \tag{5.16}$$

となる.

5.5 ブリッジ回路

図 5.11 のような回路をブリッジ回路という．Z_5 を流れる電流がゼロの状態（これを平衡状態という）になるように Z_1，Z_2，Z_3，Z_4 を調節する．平衡状態になる条件は，次式で与えられる．

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}. \tag{5.17}$$

こんな回路を作って何が嬉しいのか？

ブリッジ回路は，ブリッジ回路の１〜４のインピーダンスの内，どれか一つが未知のインピーダンスであるときに，残りの３つのインピーダンスが正確にわかっていれば，その未知のインピーダンスを算出することができる．抵抗，インダクタンス，更には，印加されている交流電圧の周波数を測定する回路として，ホイートストンブリッジ (Wheatstone bridge)，マクスウェルブリッジ (Maxwell bridge)，ウィーンブリッジ (Wien bridge) が知られている．他にも様々なブリッジが存在するが，本章では，これら三つのブリッジを紹介する．（適宜更新する予定）

5.5.1 ホイートストンブリッジ

図 5.12 はホイートストンブリッジと呼ばれるブリッジ回路である．このブリッジの目的は，抵抗測定である．平衡条件式は，

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \tag{5.18}$$

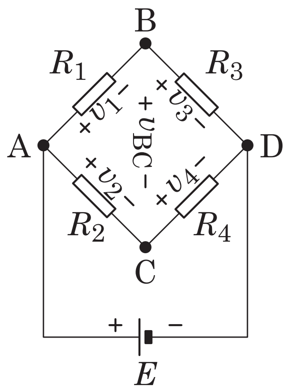


図 5.12 未知の抵抗値を高精度で求めるためのホイートストンブリッジ.

である．R_1 が未知の抵抗であるとするとき，平衡条件を満たす R_2，R_3，R_4 が高精度でわかっていれば，平衡式の変形版である

$$R_1 = \frac{R_3}{R_4} R_2 \tag{5.19}$$

によって，R_1 を高精度で決定出来る，というのがこのブリッジの御利益である．

課題

ホイートストンブリッジの平衡条件を導出せよ

略解

図 5.12 の v_3 と v_4 は，二つの抵抗で電圧を分割したときの電圧に相当するから，次式で与えられる．

$$v_3 = \frac{R_3}{R_1 + R_3} E, \tag{5.20}$$

$$v_4 = \frac{R_4}{R_2 + R_4} E. \tag{5.21}$$

これらを使って，v_{BC} を表すと，以下のようになる．

$$v_{\mathrm{BC}} = v_3 - v_4. \tag{5.22}$$

平衡条件の $v_{\mathrm{BC}} = 0$ を満たすとすると，次式が成り立つ．

$$\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4} = 0. \tag{5.23}$$

この式を変形すれば，以下の平衡条件の式となる．

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \tag{5.24}$$

この平衡条件は，この形にする必要性は全くない．$R_1 R_4 = R_2 R_3$ と書いても何の問題も無い．ただ，覚

図 **5.13** 275597 携帯用ホイートストンブリッジ (横河メータ& インスツルメンツ株式会社) [1]．1 Ω〜10 MΩ までの広範囲を測定可能 (有効数字 4 桁).

えやすいように，ブリッジ回路図の中での R_i の配置と式の中の R_i の配置が同様になる式が好んで紹介の時に書かれるようである．

豆知識

実際に売られているホイートストンブリッジの実物写真を**図 5.13** に示す [1]．$R_1 = \mathrm{A.BCD} \times 10^{\mathrm{E}}\ \Omega$ とした場合，四つのダイヤルが R_1 の有効数字部分を決定するダイヤルであり，$R_2 = \mathrm{A.BCD}$ の桁の 1 桁目 A，2 桁目 B，3 桁目 C，4 桁目 D を設定するつまみと考えればよい．左上のつまみは，R_3/R_4 の設定つまみに相当し，R_1 を上のように表したときの E を設定することに相当する．これにより，抵抗 R_1 の値を，有効数字 4 桁の $R_1 = \mathrm{A.BCD} \times 10^{\mathrm{E}}\ \Omega$ という形で計測することができるのである．左下のメーターは，節点 B と C の間に電流が流れない (即ち，同電位の) 状態になっているかどうかを見るための検流計である．

5.5.2　ウィーンブリッジ

図 5.14 はウィーンブリッジと呼ばれるブリッジ回路である．このブリッジの目的は周波数測定である．平衡条件式は，

$$\omega = \frac{1}{R_3 C_3} \tag{5.25}$$

である．但し，$R_1 = 2R_2$，$R_3 = R_4$，$C_3 = C_4$ という条件を満たすものとする．

課題

ウィーンブリッジの平衡条件を導出せよ

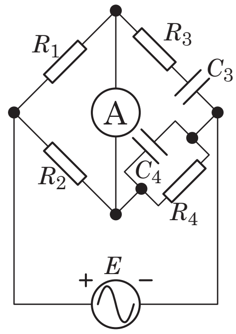


図 5.14 周波数を回路素子定数から求めるためのウィーンブリッジ．

略解

平衡条件を単純に書き下すと次式のようになる．

$$\left(R_3 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_3}\right)\left(\frac{1}{R_4} + \mathrm{j}\omega C_4\right) = \frac{R_1}{R_2}. \tag{5.26}$$

これを平衡条件がわかりやすい以下のような形式に式変形する．

$$\frac{R_3}{R_4} + \frac{C_4}{C_3} + \mathrm{j}\left(\omega R_3 C_4 - \frac{1}{\omega R_4 C_3}\right) = \frac{R_1}{R_2}. \tag{5.27}$$

左辺と右辺の実部と虚部がそれぞれ等しい，という条件から，

$$\frac{R_3}{R_4} + \frac{C_4}{C_3} = \frac{R_1}{R_2}, \tag{5.28}$$

$$\omega R_3 C_4 = \frac{1}{\omega R_4 C_3} \tag{5.29}$$

となる．ここで，$R_1 = 2R_2$，$R_3 = R_4$，$C_3 = C_4$ の但し書きを利用すると，

$$\omega = \frac{1}{R_3 C_3} \tag{5.30}$$

となり，R_3 と C_3 から周波数 ω が求められることがわかる．

5.5.3　マクスウェルブリッジ

図 5.15 はマクスウェルブリッジと呼ばれるブリッジ回路である．実体写真は，**図 5.16** に示すようなものである [2]．抵抗 R_2，R_3，R_4 とコンデンサ C_4 を利用して，未知の誘導性インピーダンス $Z = R_1 + \mathrm{j}\omega L_1$ の抵抗成分 R_1 とインダクタンス L_1 を求めるために使用される．用いている交流電源の周波数 ω の情報が必要ないことが特徴である．

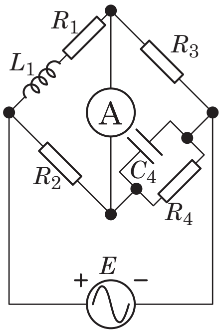


図 5.15 誘導性インピーダンスを求めるために用いられるマクスウェルブリッジ.

図 5.16 マクスウェルブリッジ [2].

課題

マクスウェルブリッジの平衡条件を導出せよ

略解

平衡条件の式を書き下すと，かなり複雑だが，以下のようになる．

$$\frac{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1}{\dfrac{1}{R_4} + \mathrm{j}\omega C_4} = R_2 R_3, \tag{5.31}$$

$$\frac{R_1 R_4 + \mathrm{j}\omega L_1 R_4}{1 + \mathrm{j}\omega C_4 R_4} = R_2 R_3. \tag{5.32}$$

従って，

$$R_1 R_4 + \mathrm{j}\omega L_1 R_4 = R_2 R_3 (1 + \mathrm{j}\omega C_4 R_4). \tag{5.33}$$

これより，

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4}, \tag{5.34}$$

$$L_1 = C_4 R_2 R_3 \tag{5.35}$$

となり，R_1 と L_1 が R_2，R_3，R_4，C_4 から求められることがわかる．

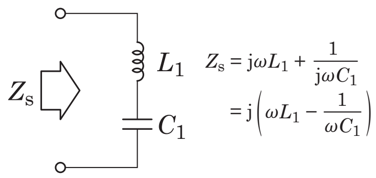


図 5.17 LC 直列回路.

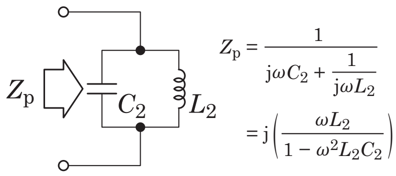


図 5.18 LC 並列回路.

5.6 共振回路

図 5.17 と**図 5.18** は，それぞれ，LC 直列回路，LC 並列回路である．コイル L とコンデンサ C で構成される回路要素は，インピーダンスの大きさがある周波数でゼロになる，あるいは，ある周波数で無限大になる，という特性を持つ．このような特性を「共振特性」という．

図 5.17 に示した LC 直列回路の場合には，合成インピーダンス Z_s は，

$$\begin{aligned} Z_s &= \mathrm{j}\omega L_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} \\ &= \mathrm{j}\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) \end{aligned} \tag{5.36}$$

となり，() 内がある特定の周波数の時にゼロになることがわかる．

図 5.18 に示した LC 並列回路の場合には，合成インピーダンス Z_p は，

$$\begin{aligned} Z_p &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L_2}} \\ &= \mathrm{j}\left(\frac{\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C_2}\right) \end{aligned} \tag{5.37}$$

となり，() 内がある特定の周波数の時に無限大になることがわかる．

図 5.17 に示した LC 直列回路と**図 5.18** に示した LC 並列回路のインピーダンスは，虚部しか持たないため，インピーダンスはリアクタンス成分だけを持っていることになる．

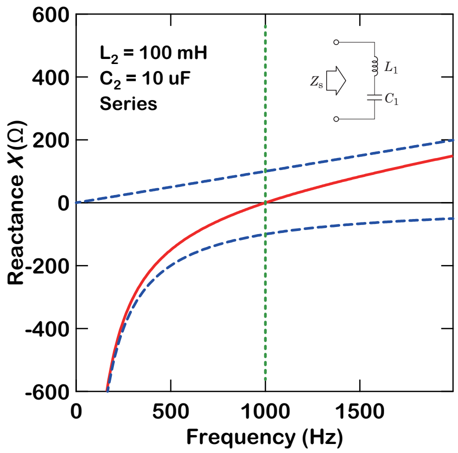


図 **5.19** LC 直列回路の周波数特性.

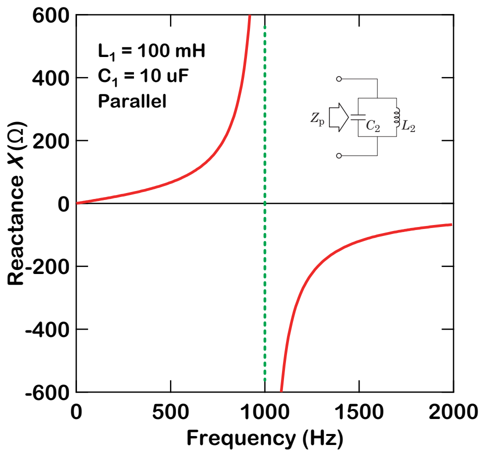


図 **5.20** LC 並列回路の周波数特性.

図 5.19，**図 5.20** は，$L_1 = 100$ mH，$C_1 = 10\ \mu$F，$L_2 = 100$ mH，$C_2 = 10\ \mu$F として Z_S，Z_P を計算し，それぞれのリアクタンス成分の大きさの周波数特性を図示したものである．このような特性全体を「共振特性」と言う．また，この特性の場合，ちょうど $f = 1$ kHz の時にリアクタンス成分がゼロ，または，無限大になっている．そのような周波数を「共振周波数」という．そのような周波数に設定されている状態を「共振している」というコトバで表現する．「共振」については，別途，章を改めて詳しく説明する．

5.7 計算練習 (その 1) RC 直列回路

図 5.21 に示した回路について, 以下の問に答えよ．なお，電源 E の波形は，$e(t) = E_{\mathrm{m}} \sin \omega t$ で表され，$E_{\mathrm{m}} = 10\sqrt{2}$ V，$\omega = 5000$ rad/s とする．また，$C = 10$ μF, $R = 10$ Ω とする．有効数字は 3 桁とする[*3].

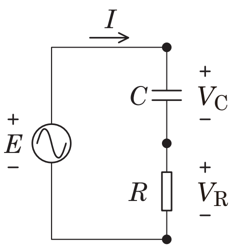


図 5.21 計算練習用の RC 直列回路.

1. $e(t)$ のフェーザ形式を E とするとき，E を $r\angle\theta$ の極座標形式で表せ.
2. C と R の合成インピーダンス Z を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
3. フェーザ形式の電流 I を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
4. C にかかる電圧 (フェーザ形式)V_{C} を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
5. R にかかる電圧 (フェーザ形式)V_{R} を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
6. E，V_{C}，V_{R} の関係を複素平面上で図示せよ.
7. フェーザ形式の電流 I に対応する電流波形 $i(t)$ を表す式を書け.
8. $e(t)$ と $i(t)$ の波形の概形を図示せよ.
9. Z，E，I の関係を複素平面上で図示せよ.

略解 1

電圧波形を表す式 $e(t) = E_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta)$ に対応するフェーザ表記が $E = \frac{E_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\angle\theta$ であるから，この場合の E は，以下のように表される.

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ = 10\angle 0^\circ \\
&= (10.0\angle 0.00^\circ)\ \mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

略解 2

この場合の合成インピーダンス Z を表す式は,

$$Z = R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

である．従って，Z は以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
Z &= 10 + \frac{1}{j(5000) \times (10 \times 10^{-6})} \\
&= 10 - \mathrm{j}\frac{1}{5 \times 10^{3} \times 10^{-5}} \\
&= 10 - \mathrm{j}\frac{1}{5 \times 10^{-2}} = 10 - \mathrm{j}0.2 \times 10^{2} \\
&= 10 - \mathrm{j}20 = 22.36\angle -63.43^\circ \\
&= (22.4\angle -63.4^\circ)\ \Omega.
\end{aligned}
$$

略解 3

オームの法則 $I = E/Z$ において，$E = (10\angle 0^\circ)$ V，$Z = (22.36\angle -63.43^\circ)\,\Omega$ であるから, I は以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{E}{Z} = \frac{10\angle 0^\circ}{22.36\angle -63.43^\circ} \\
&= \frac{10}{22.36}\angle 63.43^\circ = 0.4472\angle 63.43^\circ \\
&= (0.447\angle 63.4^\circ)\ \mathrm{A}.
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

略解 4

C のインピーダンスを Z_{C} とすると，オームの法則より，C にかかる電圧は $V_{\mathrm{C}} = Z_{\mathrm{C}} I$ で求められる．Z_{C} は,

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathrm{C}} &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \\
&= \frac{1}{\mathrm{j}5000 \times 10 \times 10^{-6}} = -\mathrm{j}20 \\
&= (20.0\angle -90.0^\circ)\ \Omega
\end{aligned}
$$

となる．従って，V_{C} は以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{C}} &= Z_{\mathrm{C}} I \\
&= (20\angle -90^\circ) \times (0.4472\angle 63.43^\circ) \\
&= 8.944\angle -26.57^\circ \\
&= (8.94\angle -26.6^\circ)\ \mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

[*3] 問題の中の数値に $\sqrt{2}$ が入っていたり，5000 なる表記が含まれており，有効数字 3 桁の数値表現法に従っていないが，解答の際にこれらの数値を使う場合には，有効数字 3 桁の数値として扱って欲しい．以降の問題も同様.

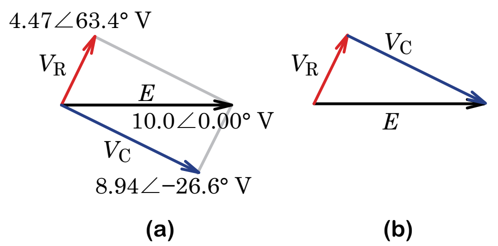


図 5.22 計算練習用の RC 直列回路の電圧 (フェーザ) の複素平面上での関係．(a) 節点間の電位差のみを考慮した作図例．(b) 節点の電位を考慮した作図例．

略解 5

オームの法則より，R にかかる電圧は $V_{\mathrm{R}} = RI$ で求められる．従って，V_{R} は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{R}} &= Z_{\mathrm{R}} I = 10 \times 0.4472\angle 63.43^\circ \\
&= 4.472\angle 63.43^\circ \\
&= (4.47\angle 63.4^\circ)\ \mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

略解 6

これまでに得た E，V_{C}，V_{R} は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
E &= (10.0\angle 0.00^\circ)\ \mathrm{V}, \\
V_{\mathrm{C}} &= (8.94\angle -26.6^\circ)\ \mathrm{V}, \\
V_{\mathrm{R}} &= (4.47\angle 63.4^\circ)\ \mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

$E = V_{\mathrm{C}} + V_{\mathrm{R}}$ に留意して，これらの関係を複素平面上で図示すれば，**図 5.22** のようになる．

略解 7

フェーザ形式の電流;

$$I = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\angle\phi$$

は，波形で表したときの電流 $i(t)$ が次式で表されることを意味している．

$$i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi).$$

$I = (0.4472\angle 63.43^\circ)$ A であったから，振幅 I_{m} と位相 ϕ は，それぞれ以下のようになる．

$$I_{\mathrm{m}} = 0.4472 \times \sqrt{2} = 0.632\ \ \mathrm{A}, \qquad \phi = 63.4^\circ$$

従って，$i(t)$ は次式のようになる．

$$i(t) = 0.632 \sin(\omega t + 63.4^\circ)\ \ \mathrm{A}.$$

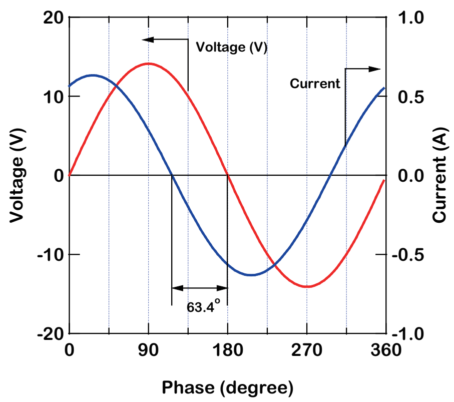


図 5.23 計算練習用の RC 直列回路の電圧波形と電流波形の関係．

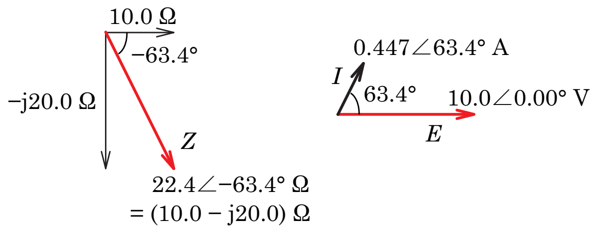


図 5.24 計算練習用の RC 直列回路の Z，E，I の関係．

略解 8

与えられた電圧波形 $e(t)$ と得られた電流波形 $i(t)$ は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
e(t) &= 10\sqrt{2}\sin\omega t = 14.1\sin\omega t\ \ \mathrm{V}, \\
i(t) &= 0.632\sin(\omega t + 63.4^\circ)\ \ \mathrm{A}.
\end{aligned}
$$

これらを図示すると，**図 5.23** に示すような波形となる．

略解 9

インピーダンス Z，電圧 E，電流 I は，それぞれ次式の通りである．

$$
\begin{aligned}
Z &= 10.0 - \mathrm{j}20.0 = (22.4\angle -63.4^\circ)\ \ \Omega, \\
E &= (10.0\angle 0.00^\circ)\ \ \mathrm{V}, \\
I &= (0.447\angle 63.4^\circ)\ \ \mathrm{A}.
\end{aligned}
$$

これらを図示すれば，**図 5.24** のようになる．

5.8 計算練習 (その 2) RC 並列回路

図 5.25 に示した回路について, 以下の問に答えよ．なお，電源 E の波形は，$e(t)=E_{\mathrm{m}}\sin\omega t$ で表され，$E_{\mathrm{m}}=10\sqrt{2}$ V，$\omega=5000$ rad/s とする．また，$C=100\ \mu$F，$R=10\ \Omega$ とする．有効数字は 3 桁とする．

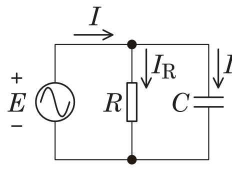


図 5.25 計算練習用の RC 並列回路.

1. $e(t)$ のフェーザ形式を E とするとき，E を $r\angle\theta$ の極座標形式で表せ.
2. C と R の合成アドミタンス Y を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
3. フェーザ形式の電流 I を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
4. C に流れる電流 (フェーザ形式)I_{C} を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
5. R に流れる電流 (フェーザ形式)I_{R} を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
6. I，I_{C}，I_{R} の関係を複素平面上で図示せよ.
7. フェーザ形式の電流 I に対応する電流波形 $i(t)$ を表す式を書け.
8. $e(t)$ と $i(t)$ の波形の概形を図示せよ.
9. Y，E，I の関係を複素平面上で図示せよ.

略解 1

電圧波形を表す式 $e(t)=E_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\theta)$ に対応するフェーザ表記が $E=\frac{E_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\angle\theta$ であるから，この場合の E は以下のように表される.

$$E=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ=(10.0\angle 0.00^\circ)\ \ \mathrm{V}.$$

略解 2

この場合の合成アドミタンス Y を表す式は,

$$Y=\frac{1}{R}+\mathrm{j}\omega C$$

である．従って，Y は以下のようになる.

$$\begin{aligned}Y&=\frac{1}{10}+\mathrm{j}(5000)\times(100\times10^{-6})\\&=0.1+\mathrm{j}5\times10^{3}\times10^{-4}\\&=0.1+\mathrm{j}0.5\\&=0.5099\angle 78.69^\circ\\&=(0.510\angle 78.7^\circ)\ \ \mathrm{S}.\end{aligned}$$

略解 3

オームの法則 $I=YE$ において，$E=(10\angle 0^\circ)$ V，$Y=(0.5099\angle 78.69^\circ)$ S であるから，I は以下のようになる.

$$\begin{aligned}I&=YE=(0.5099\angle 78.69^\circ)\times(10\angle 0^\circ)\\&=5.099\angle 78.69^\circ\\&=(5.10\angle 78.7^\circ)\ \ \mathrm{A}.\end{aligned}$$

略解 4

C のアドミタンスを Y_{C} とすると，オームの法則より，C に流れる電流は，$I_{\mathrm{C}}=Y_{\mathrm{C}}E$ で求められる．Y_{C} は,

$$\begin{aligned}Y_{\mathrm{C}}&=\mathrm{j}\omega C\\&=\mathrm{j}5000\times100\times10^{-6}=\mathrm{j}0.5\\&=(0.500\angle 90.0^\circ)\ \ \mathrm{S}.\end{aligned}$$

従って，I_{C} は以下のようになる.

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{C}}&=Y_{\mathrm{C}}E\\&=(0.5\angle 90^\circ)\times(10\angle 0^\circ)\\&=(5.00\angle 90.0^\circ)\ \ \mathrm{A}.\end{aligned}\qquad(5.39)$$

略解 5

オームの法則より，R に流れる電流は $I_{\mathrm{R}}=E/R$ で求められる．従って，I_{R} は以下のようになる.

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{R}}&=\frac{E}{R}=\frac{10\angle 0^\circ}{10}\\&=(1.00\angle 0.00^\circ)\ \ \mathrm{A}.\end{aligned}\qquad(5.40)$$

略解 6

これまでに得た I，I_{C}，I_{R} は以下の通りである.

$$\begin{aligned}I&=(1.00+\mathrm{j}5.00)=(5.10\angle 78.7^\circ)\ \ \mathrm{A},\\I_{\mathrm{C}}&=\mathrm{j}5.00=(5.00\angle 90.0^\circ)\ \ \mathrm{A},\\I_{\mathrm{R}}&=1.00=(1.00\angle 0.00)\ \ \mathrm{A}.\end{aligned}$$

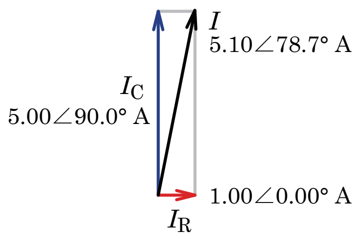


図 5.26 計算練習用の RC 並列回路の電流 (フェーザ) の複素平面上での関係.

$I = I_R + I_C$ に留意して，これらを複素平面上で図示すれば，**図 5.26** のようになる.

略解 7

フェーザ形式で表した電流;

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle \phi$$

は，波形で表したときの電流 $i(t)$ が次式で表されることを意味している.

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi).$$

$I = (5.099\angle 78.69°)$ A であったから，振幅 I_m と位相 ϕ は，それぞれ以下のようになる.

$$I_m = 5.099\sqrt{2} = 7.21 \text{ A}, \quad \phi = 78.7°.$$

従って，$i(t)$ は次式のようになる.

$$i(t) = 7.21 \sin(\omega t + 78.7°) \text{ A}.$$

略解 8

与えられた電圧波形 $e(t)$ と得られた電流波形 $i(t)$ は以下の通りである.

$$e(t) = 10\sqrt{2} \sin \omega t = 14.1 \sin \omega t \text{ V},$$
$$i(t) = 7.21 \sin(\omega t + 78.7°) \text{ A}.$$

これらを図示すると，**図 5.27** のようになる.

略解 9

アドミタンス Y，電圧 E，電流 I は，それぞれ次式の通りである.

$$Y = (0.100 + j0.500) = (0.510\angle 78.7°) \text{ S},$$
$$E = (10.0\angle 0.00°) \text{ V},$$
$$I = (5.10\angle 78.7°) \text{ A}.$$

これらを図示すれば，**図 5.28** のようになる.

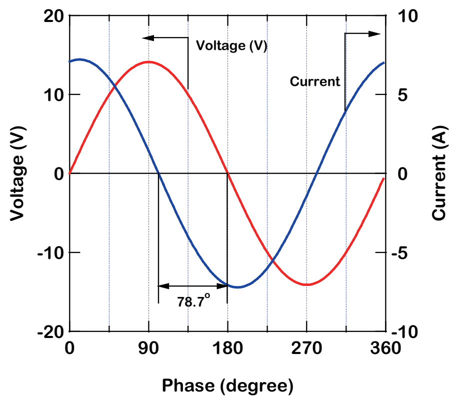


図 5.27 計算練習用の RC 並列回路の電圧波形と電流波形の関係.

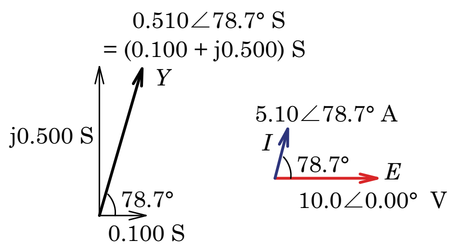


図 5.28 計算練習用の RC 並列回路の Y，E，I の関係.

5.9 計算練習 (その 3) RL 直列回路

図 5.29 に示した回路について, 以下の問に答えよ．なお，電源 E の波形は，$e(t) = E_{\mathrm{m}} \sin\omega t$ で表され，$E_{\mathrm{m}} = 10\sqrt{2}$ V，$\omega = 5000$ rad/s とする．また，$L = 10$ mH, $R = 10\ \Omega$ とする．有効数字は 3 桁とする．

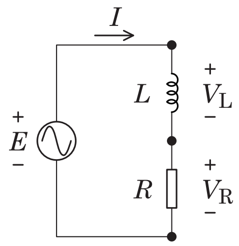


図 5.29 計算練習用の RL 直列回路.

1. $e(t)$ のフェーザ形式を E とするとき，E を $r\angle\theta$ の極座標形式で表せ.
2. L と R の合成インピーダンス Z を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
3. フェーザ形式の電流 I を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
4. L にかかる電圧 (フェーザ形式)V_{L} を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
5. R にかかる電圧 (フェーザ形式)V_{R} を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
6. E，V_{L}，V_{R} の関係を複素平面上で図示せよ.
7. フェーザ形式の電流 I に対応する電流波形 $i(t)$ を表す式を書け.
8. $e(t)$ と $i(t)$ の波形の概形を図示せよ.
9. Z，E，I の関係を複素平面上で図示せよ.

略解 1

電圧波形を表す式 $e(t) = E_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta)$ に対応するフェーザ表記が $E = \frac{E_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\angle\theta$ であるから，この場合の E は，以下のようになる.

$$E = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ = (10.0\angle 0.00^\circ)\ \ \mathrm{V}$$

となる.

略解 2

この場合の合成インピーダンス Z を表す式は,

$$Z = R + \mathrm{j}\omega L.$$

である．従って,

$$\begin{aligned} Z &= 10 + \mathrm{j}(5000) \times (10 \times 10^{-3}) \\ &= 10 + \mathrm{j}50 \\ &= 50.99\angle 78.69^\circ \\ &= (51.0\angle 78.7^\circ)\ \ \Omega. \end{aligned}$$

略解 3

オームの法則 $I = E/Z$ において，$E = (10\angle 0^\circ)$ V，$Z = (50.99\angle 78.69^\circ)\ \Omega$ であるから，I は以下のようになる.

$$\begin{aligned} I &= \frac{E}{Z} = \frac{10\angle 0^\circ}{50.99\angle 78.69^\circ} \\ &= \frac{10}{50.99}\angle -78.69^\circ \\ &= 0.1961\angle -78.69^\circ \\ &= (0.196\angle -78.7^\circ)\ \ \mathrm{A}. \end{aligned} \tag{5.41}$$

略解 4

L のインピーダンスを Z_{L} とすると，オームの法則より，L にかかる電圧は $V_{\mathrm{L}} = Z_{\mathrm{L}} I$ で求められる．Z_{L} は,

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{L}} &= \mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}5000 \times 10 \times 10^{-3} \\ &= \mathrm{j}50.0 \\ &= (50.0\angle 90.0^\circ)\ \ \Omega. \end{aligned}$$

となる．従って，V_{L} は以下のようになる.

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{L}} &= Z_{\mathrm{L}} I \\ &= (50\angle 90^\circ) \times (0.1961\angle -78.69^\circ) \\ &= 9.805\angle 11.31^\circ \\ &= (9.81\angle 11.3^\circ)\ \ \mathrm{V}. \end{aligned} \tag{5.42}$$

略解 5

オームの法則より，R にかかる電圧は $V_{\mathrm{R}} = RI$ で求められる．従って，V_{R} は以下のようになる.

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{R}} &= Z_{\mathrm{R}} I \\ &= 10 \times (0.1961\angle -78.69^\circ) \\ &= 1.961\angle -78.69^\circ \\ &= (1.96\angle -78.7^\circ)\ \ \mathrm{V}. \end{aligned}$$

略解 6

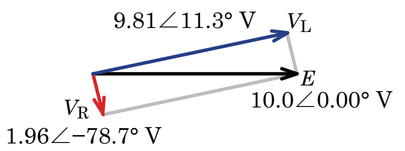


図 5.30 計算練習用の RL 直列回路の電圧 (フェーザ) の複素平面上での関係.

これまでに得た $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{V}_{\mathrm{L}}$, $\boldsymbol{V}_{\mathrm{R}}$ は以下の通りである.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= (10.0\angle 0.00^\circ)\ \mathrm{V}, \\ \boldsymbol{V}_{\mathrm{L}} &= (9.81\angle 11.3^\circ)\ \mathrm{V}, \\ \boldsymbol{V}_{\mathrm{R}} &= (1.96\angle -78.7^\circ)\ \mathrm{V}. \end{aligned} \tag{5.43}$$

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{L}} + \boldsymbol{V}_{\mathrm{R}}$ に留意して，これらを複素平面上で図示すれば，**図 5.30** のようになる.

略解 7

フェーザ形式の電流;

$$\boldsymbol{I} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\angle\phi$$

は，波形で表したときの電流 $i(t)$ が次式で表されることを意味している.

$$i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \phi).$$

$\boldsymbol{I} = (0.1961\angle -78.69^\circ)$ A であったから，振幅 I_{m} と位相 ϕ は，それぞれ以下のようになる.

$$I_{\mathrm{m}} = 0.1961\sqrt{2} = 0.277\ \mathrm{A}, \quad \phi = -78.7^\circ.$$

従って，$i(t)$ は次式のようになる.

$$i(t) = 0.277 \sin(\omega t - 78.7^\circ)\ \mathrm{A}.$$

略解 8

与えられた電圧波形 $e(t)$ と得られた電流波形 $i(t)$ は以下の通りである.

$$\begin{aligned} e(t) &= 10\sqrt{2}\sin\omega t = 14.1\sin\omega t\ \ \mathrm{V}, \\ i(t) &= 0.277\sin(\omega t - 78.7^\circ)\ \ \mathrm{A}. \end{aligned}$$

これらを図示すれば，**図 5.31** のようになる.

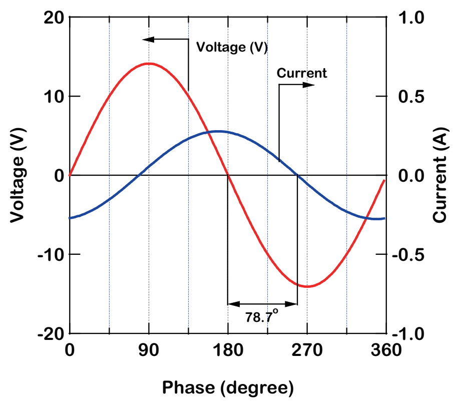


図 5.31 計算練習用の RL 直列回路の電圧波形と電流波形の関係.

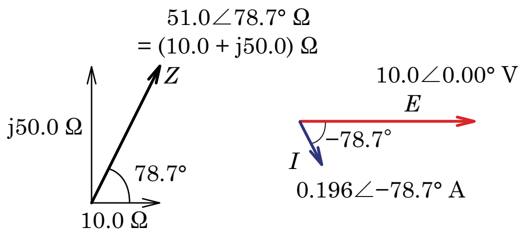


図 5.32 計算練習用の RL 直列回路の $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{I}$ の関係.

略解 9 インピーダンス $\boldsymbol{Z}$，電圧 $\boldsymbol{E}$，電流 $\boldsymbol{I}$ は，それぞれ次式の通りである.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z} &= (10.0 + \mathrm{j}50.0) = (51.0\angle 78.7^\circ)\ \Omega, \\ \boldsymbol{E} &= (10.0\angle 0.00^\circ)\ \mathrm{V}, \\ \boldsymbol{I} &= (0.196\angle -78.7^\circ)\ \mathrm{A}. \end{aligned}$$

これらを図示すれば，**図 5.32** のようになる.

5.10 計算練習 (その 4) RL 並列回路

図 5.33 に示した回路について，以下の問に答えよ．なお，電源 E の波形は，$e(t) = E_{\rm m} \sin\omega t$ で表され，$E_{\rm m} = 10\sqrt{2}$ V, $\omega = 5000$ rad/s とする．また, $L = 1$ mH, $R = 10$ Ω とする．有効数字は 3 桁とする．

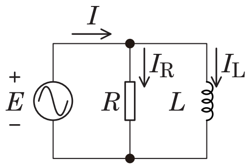


図 5.33 計算練習用の RL 並列回路.

1. $e(t)$ のフェーザ形式を E とするとき，E を $r\angle\theta$ の極座標形式で表せ.
2. L と R の合成アドミタンス Y を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
3. フェーザ形式の電流 I を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
4. L に流れる電流 (フェーザ形式)$I_{\rm L}$ を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
5. R に流れる電流 (フェーザ形式)$I_{\rm R}$ を $r\angle\theta$ の極座標形式で求めよ.
6. I，$I_{\rm L}$，$I_{\rm R}$ の関係を複素平面上で図示せよ.
7. フェーザ形式の電流 I に対応する電流波形 $i(t)$ を表す式を書け.
8. $e(t)$ と $i(t)$ の波形の概形を図示せよ.
9. Y，E，I の関係を複素平面上で図示せよ.

略解 1

電圧波形を表す $e(t) = E_{\rm m}\sin(\omega t + \theta)$ に対応するフェーザ形式が $E = \frac{E_{\rm m}}{\sqrt{2}}\angle\theta$ であるから，この場合の E は，以下のように表される.

$$E = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ = (10.0\angle 0.00^\circ)\ \text{V}$$

略解 2

この場合の合成アドミタンス Y を表す式は,

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{{\rm j}\omega L}.$$

である．従って，Y は以下のようになる.

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{10} + \frac{1}{{\rm j}(5000)\times(1\times10^{-3})} \\ &= 0.1 - {\rm j}0.2 \\ &= 0.2236\angle -63.43^\circ \\ &= (0.224\angle -63.4^\circ)\ \text{S}. \end{aligned}$$

略解 3

オームの法則 $I = YE$ において，$E = 10\angle 0^\circ$ V，$Y = 0.224\angle -63.4^\circ$ S であるから，I は以下のようになる.

$$\begin{aligned} I = YE &= (0.2236\angle -63.43^\circ)\times(10\angle 0^\circ) \\ &= 2.236\angle -63.43^\circ \\ &= (2.24\angle -63.4^\circ)\ \text{A}. \end{aligned} \tag{5.44}$$

略解 4

L のアドミタンスを $Y_{\rm L}$ とすると，オームの法則より，L に流れる電流は $I_{\rm L} = Y_{\rm L}E$ で求められる．$Y_{\rm L}$ は,

$$\begin{aligned} Y_{\rm L} &= \frac{1}{{\rm j}\omega L} = \frac{-{\rm j}}{5000\times1\times10^{-3}} \\ &= -{\rm j}0.2 \\ &= (0.20\angle -90.0^\circ)\ \text{S}. \end{aligned}$$

となる．従って，$I_{\rm L}$ は以下のようになる.

$$\begin{aligned} I_{\rm L} &= Y_{\rm L}E \\ &= (0.2\angle -90^\circ)\times(10\angle 0^\circ) \\ &= 2\angle -90^\circ \\ &= (2.00\angle -90.0^\circ)\ \text{A}. \end{aligned}$$

略解 5

オームの法則より，R に流れる電流は $I_{\rm R} = E/R$ で求められる．従って，$I_{\rm R}$ は以下のようになる.

$$\begin{aligned} I_{\rm R} &= \frac{E}{R} \\ &= \frac{10\angle 0^\circ}{10} \\ &= (1.00\angle 0.00^\circ)\ \text{A}. \end{aligned}$$

略解 6

これまでに得た I，$I_{\rm L}$，$I_{\rm R}$ は以下の通りである.

$$\begin{aligned} I &= (2.24\angle -63.4^\circ)\ \text{A}, \\ I_{\rm L} &= (2.00\angle -90.0^\circ)\ \text{A}, \\ I_{\rm R} &= (1.00\angle 0.00^\circ)\ \text{A}. \end{aligned}$$

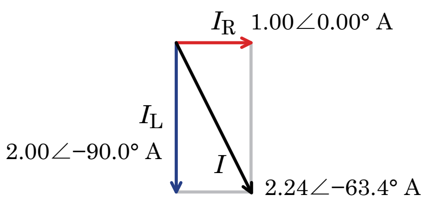


図 5.34 計算練習用の RL 並列回路の電流 (フェーザ) の複素平面上での関係.

$I = I_L + I_R$ に留意して，これらを複素平面上で図示すれば，**図 5.34** のようになる.

略解 7

フェーザ形式の電流;

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\angle\phi$$

は，波形で表したときの電流 $i(t)$ が次式で表されることを意味する.

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi).$$

$I = (2.236\angle - 63.43°)$ A であったから，振幅 I_m と位相 ϕ は，それぞれ以下のようになる.

$$I_m = 2.236\sqrt{2} = 3.16 \text{ A}, \quad \phi = -63.4°.$$

従って，$i(t)$ は以下のようになる.

$$i(t) = 3.16\sin(\omega t - 63.4°) \text{ A}.$$

略解 8

与えられた電圧波形 $e(t)$ と得られた電流波形 $i(t)$ は以下の通りである.

$$e(t) = 10\sqrt{2}\sin\omega t = 14.1\sin\omega t \text{ V},$$
$$i(t) = 3.16\sin(\omega t - 63.4°) \text{ A}.$$

これらを図示すれば，**図 5.35** のようになる.

略解 9

アドミタンス Y，電圧 E，電流 I は，それぞれ次式の通りである.

フェーザ形式で表した電圧と電流は次式の通りである.

$$Y = (0.100 + \mathrm{j}0.200) = (0.224\angle - 63.4°) \text{ S},$$
$$E = (10.0\angle 0.00°) \text{ V},$$
$$I = (2.24\angle - 63.4°) \text{ A}.$$

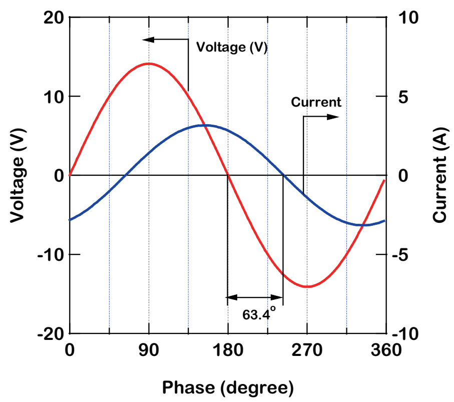


図 5.35 計算練習用の RL 並列回路の電圧波形と電流波形の関係.

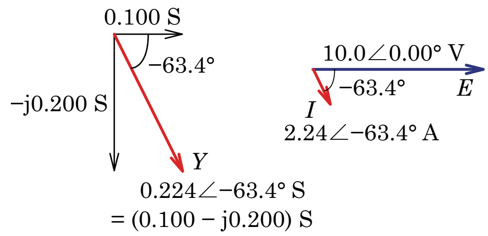


図 5.36 計算練習用の RL 並列回路の Y，E，I の関係.

これらを図示すれば，**図 5.36** のようになる.

豆知識

豆知識

インピーダンスとフェーザを同じ平面上に描かない

Z はインピーダンスであり，フェーザの電圧や電流とは意味が異なる．フェーザは，正弦波の特徴である振幅 (実効値に変換しているが) と位相を表す表現方法の一つであるが，インピーダンスは波形の特徴を表した物理量では無い．従って，インピーダンスとフェーザを同じ複素平面上に描くのは不適切であると筆者は考えている．

なお，より厳密に見れば，電圧と電流も単位の異なる物理量であるから，電圧と電流のフェーザを何の根拠も無しに同じ複素平面上に描くのはおかしい．多少無理矢理であるが，以下のような根拠があれば許されるかもしれない．即ち，長さに関しては，電流フェーザ用と電圧フェーザ用でそれぞれ異なるスケールを用いている，という根拠である．但し，電圧と電流はそもそも異なる物理量であるから，電圧と電流のフェーザの長さの大小を比べてもあまり意味がないことを認識して欲しい．

これに対し，電圧と電流のフェーザが成す角度に関しては共通のスケールとなっているので，矢印で表された二つのフェーザの間の角度は，その二つのフェーザを波形で表したときの位相差に対応する，という意味を持つ．

異なる物理量である電圧と電流のフェーザを無理矢理同じ複素平面上で描くことがまかり通っている大きな理由は，後者の利便性があるからではないだろうか，と思う．実際，フェーザに慣れてくれば，フェーザの図を見ただけで，オシロスコープで観測される波形 (**図 5.23** に示すような) がどのように見えることになるか，ということがわかるようになる．

豆知識

学術論文における字体のルール

学術論文 (特に工学系) や厳格なテキストでは，式関係で用いる字体についても以下のような厳格なルールがある．

- **斜体，イタリック**
  物理量，変数，変関数を表す場合
  例：電流 I，電圧 V，電力 P，ボルツマン定数 k_{B}，$f(x)$，...
- **立体，ローマン**
  モノ，コト，既定関数，演算子，単位，数値
  例：$I_{\mathrm{m}} = 1\ \mathrm{A}$，$V_{\mathrm{e}} = 1\ \mathrm{V}$，$\sin\theta$，$\mathrm{d}x$，...
  I_{m} の下付の m は最大というコトを表すので I_m とは書かない．V_{e} の下付の e も実効値であるというコトを表すので V_e とは書かない．虚数単位の j(或いは，数学の場合には i) も，変数ではないので，j，i とは書かない．指数関数の $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ の e も変数ではないので，$e^{j\theta}$ とは書かない．k_{B} の下付の B も，Botlzmann という人の名前の頭文字であるから，k_B とは書かない．微分記号も以下のようになる．

$$\bigcirc\ \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \times\ \frac{di}{dt}$$

従って，本書のような電気回路の場合には，厳密に判定すると，以下のようになる．

×「抵抗 R を接続すると...」
○「抵抗 R を接続すると...」
○「抵抗値 R が増加すると...」
×「抵抗値 R が増加すると...」

本書では，「抵抗 R」のような書き方もしているが，厳格に書くと極めて冗長になるので，以下のように省略したものと思って欲しい (手抜きですが...).

- 厳密版：抵抗値が R の抵抗 R
  省略版：抵抗 R，あるいは単に R
- 厳密版：インダクタンスが L のコイル L
  省略版：コイル L，あるいは単に L
- 厳密版：キャパシタンスが C のコンデンサ C
  省略版：コンデンサ C，あるいは単に C

更に，数値と単位の間には必ずスペース (半角) を入れるというルールもある．本書でもこのルールに則っていないところがまだ残っていますが，随時，直していきます．

豆知識

電気回路の音響への応用

エレキギターを扱う人であれば，**図 5.37** に示すようなエフェクターの一つであるフェイズシフター，もしくは，フェイザーというものがあるのを知っている思う．これは，本稿で触れた移相回路を原理とするデバイス

図 5.37 フェイズシフター (BOSS PH-3) [3].

である．但し，位相をずらしただけでは，波形に変化は現れない．従って，音色も変化しない．このデバイスでは，もとの音響信号と位相をずらした音響信号を干渉させる．しかし，正弦波の位相をずらして足しても，強め合うか弱め合うかのどちらかである．従って，色々な周波数の混合波形である音響信号の全ての周波数成分が同じ位相だけずれても，音が強くなるか弱くなるかだけである．

エフェクターのフェイズシフターを通すと音色が変わるのは，周波数によって位相シフト量が異なるからである．これにより，ある周波数帯域の音は強め合い，ある周波数帯域の音は弱め合うことになる．

ただ，これだけでは，原音からの違いは時間的に変化しないため，面白みのない音になる．エフェクターでは，位相のずれを周期的に変化させることでふわふわしたワウ的な効果を与えている．似たデバイスとして，フランジャーがあるが，こちらは信号遅延回路を原理として使っている．

事前基盤知識確認事項

[1] フェーザ形式による表現の復習

$i(t)=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\theta)$ なる電流のフェーザ形式による表現を書き，複素平面上で描け．

略解

$$I=\frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\quad \text{または}\quad I=\frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\angle\theta.$$

これを複素平面上で図示すれば，**図 5.38** のようになる．

[2] フェーザ形式による表現の復習

$v(t)=V_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\theta)$ なる電圧のフェーザ形式による表現を書き，複素平面上で描け．

略解

$$V=\frac{V_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\quad \text{または}\quad V=\frac{V_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\angle\theta.$$

これを複素平面上で図示すれば，**図 5.39** のようになる．

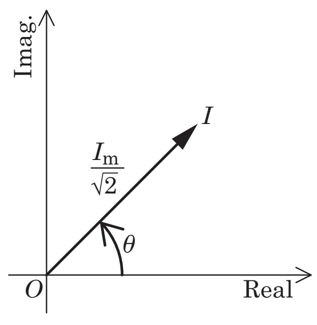


図 5.38 $i(t)=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\theta)$ のフェーザ表現．

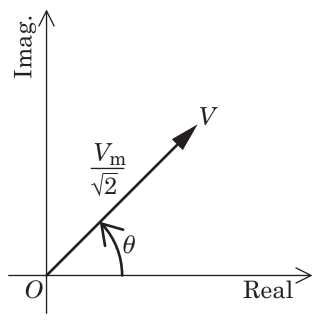


図 5.39 $v(t)=V_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\theta)$ のフェーザ表現．

[3] インピーダンスの復習

R, L, C で構成される直列回路の合成インピーダンス Z を表す式を書け．Z の両端の電圧とそこを流れる電流をフェーザ形式で表したものを V，I とするとき，V，I，Z の間に成り立つ式を書け．

略解

$$Z=R+\mathrm{j}\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$
$$V=ZI$$

[4] アドミタンスの復習

R, L, C で構成される並列回路の合成アドミタンス Y を表す式を書け．Y の両端の電圧とそこを流れる電流をフェーザ形式で表したものを V，I とするとき，V，I，Y の間に成り立つ式を書け．

略解

$$Y=\frac{1}{R}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}+\mathrm{j}\omega C$$
$$I=YV$$

事後学習内容確認事項

簡単な四則演算によるフェーザを用いた計算結果からオシロスコープで観測されるはずの波形を予測する．

A. 直列接続

$v(t) = V_\mathrm{m} \sin \omega t$ で，$V_\mathrm{m} = 10\sqrt{2}$ V，$\omega = 5000$ rad/s とする．抵抗 $R = 1\ \Omega$，コンデンサ $C = 400\ \mu$F の RC 直列回路について以下の問いに答えよ．有効数字 3 桁で答えよ．

1. 波形とフェーザの関係

$v(t)$ のフェーザ表記を V とするとき，V を極座標形式 ($r\angle\theta$ の形式) で表せ．

略解

振幅 V_m から実効値 V_e を求めると，

$$V_\mathrm{e} = \frac{V_\mathrm{m}}{\sqrt{2}} = 10.0V$$

電圧の初期位相はゼロであるから，

$$V = (10.0\angle 0.00^\circ)\ \mathrm{V}$$

2. 直列インピーダンス

RC 直列合成インピーダンス Z の値を直角座標形式と極座標形式で書け．Z を複素平面上で図示せよ．

略解

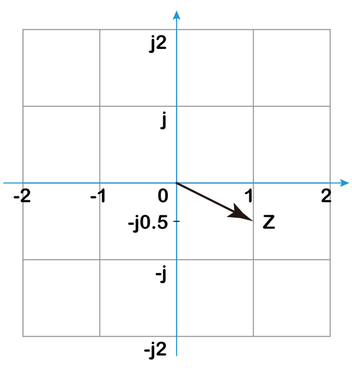


図 5.40 周波数 $\omega = 5000$ rad/s における抵抗 $R = 1\ \Omega$ とコンデンサ $C = 400\ \mu$F の直列接続インピーダンス Z．

$$\begin{aligned} Z &= R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \\ &= (1.00 - \mathrm{j}0.500)\ \Omega \end{aligned}$$

極座標形式では，

$$\begin{aligned} Z &= 1.118\angle -26.57^\circ \\ &= (1.12\angle -26.6^\circ)\ \Omega \end{aligned}$$

これを図示すると**図 5.40** のようになる．

3. 交流版オームの法則

Z に流れる電流のフェーザ表記を I とする．I を極座標形式で表せ．V と I を複素平面上で表せ．

略解

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{Z} = \frac{10\angle 0^\circ}{1.118\angle -26.57^\circ} \\ &= \frac{10}{1.118}\angle(0^\circ + 26.57^\circ) \\ &= 8.944\angle 26.57^\circ \\ &= (8.94\angle 26.6^\circ)\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

これを図示すると**図 5.41** のようになる．

4. フェーザ形式から時間領域関数へ

フェーザ形式の I から，時間領域の $i(t)$ を求めよ．

略解

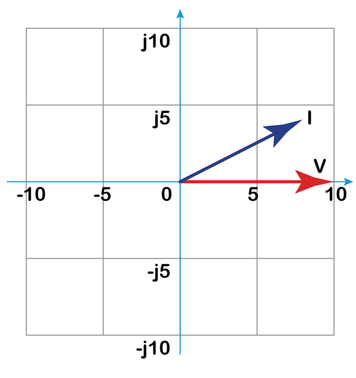


図 5.41 周波数 $\omega = 5000$ rad/s における抵抗 $R = 1\ \Omega$ とコンデンサ $C = 400\ \mu$F の直列接続インピーダンス Z にかかる V とそこに流れる I の関係．

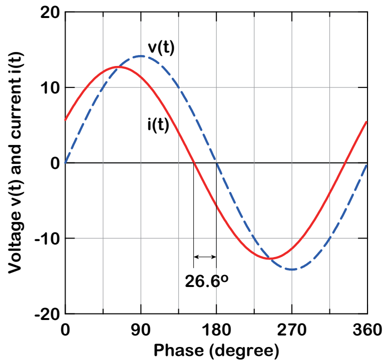


図 5.42 周波数 $\omega = 5000$ rad/s における抵抗 $R = 1\ \Omega$ とコンデンサ $C = 400\ \mu$F の直列接続インピーダンス Z にかかる電圧の波形 $v(t)$ と，そこに流れる電流の波形 $i(t)$ の関係．

$$I_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{e}}\sqrt{2} = 8.944 \times \sqrt{2} = 12.65 \\ = 12.7\ \mathrm{A}$$

よって，

$$i(t) = 12.7 \sin(\omega t + 26.6°)\ \mathrm{A}$$

これを図示すると**図 5.41** のようになる．

B. 並列接続

$i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin \omega t$ で，$I_{\mathrm{m}} = 10\sqrt{2}$ A，$\omega = 5000$ rad/s とする．抵抗 $R = 1\ \Omega$，コイル $L = 0.4$ mH の RL 並列回路について，以下の問いに答えよ．有効数字 3 桁で答えよ．

1. 波形とフェーザの関係

$i(t)$ のフェーザ表記を I とするとき，I を極座標形式 ($r\angle\theta$ の形式) で表せ．

略解

振幅 I_{m} から実効値 I_{e} を求めると，

$$I_{\mathrm{e}} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} = 10.0A$$

電流の初期位相はゼロであるから，

$$I = (10.0\angle 0.00°)\ \mathrm{A}$$

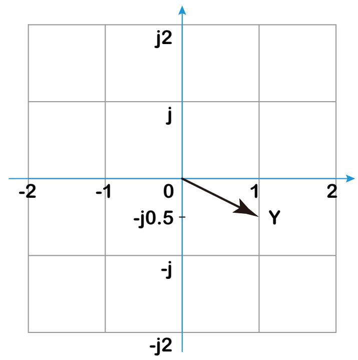


図 5.43 周波数 $\omega = 5000$ rad/s における抵抗 $R = 1\ \Omega$ とコイル $L = 0.4$ mH の並列接続アドミタンス Y．

2. 並列インピーダンス

RL 並列合成アドミタンス Y の値を直角座標形式と極座標形式で書け．Y を複素平面上で図示せよ．

略解

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} \\ = (1.00 - \mathrm{j}0.500)\ \mathrm{S}$$

極座標形式では，

$$Y = 1.118\angle -26.57° \\ = (1.12\angle -26.6°)\ \mathrm{S}$$

これを図示すると**図 5.43** のようになる．

3. 交流版オームの法則

Y にかかる電圧のフェーザ表記を V とする．V を極座標形式で表せ．I と V を複素平面上で表せ．

略解

$$V = \frac{I}{Y} = \frac{10\angle 0°}{1.118\angle -26.57°} \\ = \frac{10}{1.118}\angle(0° + 26.57°) \\ = 8.944\angle 26.57° \\ = (8.94\angle 26.6°)\ \mathrm{V}$$

これを図示すると**図 5.44** のようになる．

4. フェーザ形式から時間領域関数へ

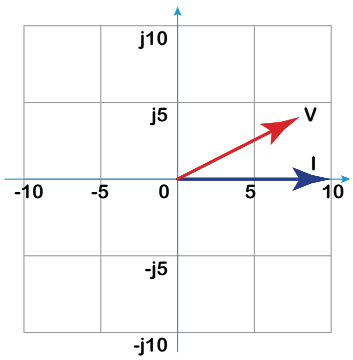


図 5.44 周波数 $\omega = 5000$ rad/s における抵抗 $R = 1\ \Omega$ とコイル $L = 0.4$ mH の並列接続アドミタンス Y に流れる電流 I と，そこにかかる電圧 V の関係．

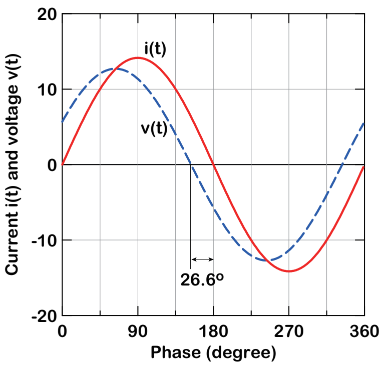


図 5.45 周波数 $\omega = 5000$ rad/s における抵抗 $R = 1\ \Omega$ とコイル $L = 0.4$ mH の並列接続アドミタンス Y に流れる電流の波形 $i(t)$ と，そこにかかる電圧の波形 $v(t)$ の関係．

フェーザ形式の V から，時間領域の $v(t)$ を求めよ．

略解

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{m}} &= V_{\mathrm{e}}\sqrt{2} = 8.944 \times \sqrt{2} = 12.65 \\
&= 12.7\ \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

よって，

$$v(t) = 12.7 \sin(\omega t + 26.6^\circ)\ \mathrm{V}$$

これを図示すると**図 5.45** のようになる．

参考文献

[1] https://www.yokogawa.com/jp-ymi/gmi/dc/gmi-2755-001-jp.htm?nid=left

[2] http://bestoinstruments.com/product/Maxwells-Inductance.aspx

[3] http://jp.boss.info/

第 6 章

交流電力

本章では，正弦波交流の場合に特有の電力を表すパラメータについて学ぶ.

- **複素電力** S
  フェーザ形式の電圧 $\boldsymbol{E}$ とフェーザ形式の電流 $\boldsymbol{I}$ の共役複素数 $\boldsymbol{I}^*$ の積:

$$S = \boldsymbol{E}\boldsymbol{I}^*.$$

  本章では，電圧として電源のみを扱っているので電圧を $\boldsymbol{E}$ で表しているが，より一般的な電圧の記号 $\boldsymbol{V}$ で表すならば，$S = \boldsymbol{V}\boldsymbol{I}^*$ となる.
- **皮相電力** $|S|$
  上記複素電力の絶対値（大きさ）．フェーザ形式の電圧と電流の大きさだけをかけ算したもの.
- **有効電力** P
  複素電力の実部．実際に消費される電力は，皮相電力ではなく，この有効電力となる.
- **無効電力** Q
  複素電力の虚部．実際には消費されない成分. *1
- **力率** $\cos\theta$
  複素電力の実部と虚部がなす偏角の cos．皮相電力に力率をかけることによって有効電力となる．力率の値は 100 倍して % で表すことが多い.
- 複素平面上におけるこれらのパラメータの関係については，後述の**図 6.4** を参照のこと.

6.1　交流電力の復習

コイルやコンデンサが関与する交流回路の場合，電力が消費ばかりとは限らないことを以前に紹介した．本章では，それを正弦波交流の場合についてもう少し詳しく学ぶ.

*1 英語では Reactive Power という．日本語の「無効」という意味合いとは異なる.

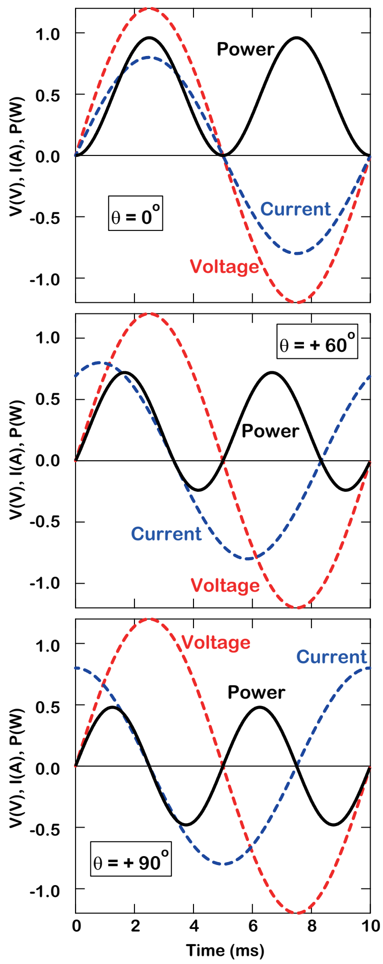


図 6.1 電圧波形と電流波形の位相差が 0°, 60°, 90°, −90° の場合における電力の波形．同じ振幅の電圧と電流波形であっても，位相差によって電力の時間平均値が異なることが読み取れる.

図 6.1 は，電圧と電流の振幅は変えずに，位相だけを

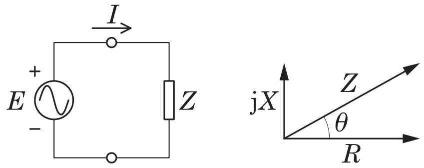


図 6.2 瞬時電力計算例題のための図.

変えて，電力を計算した結果である．この図から，電圧と電流の振幅が同じであっても，両者の位相差が異なると，電力波形が変わり，その平均値も変わることが読み取れる．従って，交流電力を議論する場合には，平均してゼロになる成分（反射される成分）と平均してもゼロにならない成分（正味の消費電力）に分ける必要がある，ということを理解してもらえると思う．以下に，上記の成分を導出する例題を設定したので，各自で検証して欲しい．

課題

図 6.2 に示した交流回路の負荷インピーダンスにおける電力の瞬時値を表す式を導出し，**電力の一周期の平均値がゼロになる成分と，ゼロにならない成分があること**を示せ．なお，電源の周波数は ω，初期位相はゼロ，フェーザ形式の電圧値は $\boldsymbol{E}$ とする．負荷インピーダンスは

$$Z = R + \mathrm{j}X = |Z|\exp(\mathrm{j}\theta)$$

とする．

略解

瞬時値が要求されているので，時間領域の実関数 $e(t)$ と $i(t)$ を求めて，それらの積 $p(t) = e(t)i(t)$ を計算する，という方針をとる．

与えられた電圧とインピーダンスから，フェーザ形式での電流は，

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{|E|}{|Z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}} = \frac{|E|}{|Z|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} = |I|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} \tag{6.1}$$

となる．従って，時間領域の実関数で表した電圧と電流の波形，$e(t)$ と $i(t)$，は

$$e(t) = E_\mathrm{m}\sin\omega t, \tag{6.2}$$
$$i(t) = I_\mathrm{m}\sin(\omega t - \theta) \tag{6.3}$$

となる．ここで，$E_\mathrm{m} = \sqrt{2}\,|E|, I_\mathrm{m} = \sqrt{2}\,|I|$ とした．$e(t)$ と $i(t)$ の積を計算すると，

$$\begin{aligned} p(t) &= e(t)i(t) && (6.4)\\ &= 2|E||I|\sin\omega t\sin(\omega t - \theta) && (6.5)\\ &= |EI|\cos\theta - |EI|\cos(2\omega t - \theta) && (6.6) \end{aligned}$$

となる．上式から，以下のことがわかる．

- 第一項目：
$$|EI|\cos\theta$$
は時間に依存しない項である．即ち，平均しても残る項である．
- 第二項目：
$$|EI|\cos(2\omega t - \theta)$$
は時間に依存し，電源の周波数の二倍の周波数で変動する．従って，一周期で（或いは半周期でも）平均するとゼロになる成分である．

以上のように，交流電力の瞬時値の計算結果から，交流電力には平均するとゼロになる成分とゼロにならない成分があることがわかった．では，Z の大きさや偏角，即ち，R, L, C の組み合わせ具合によって，その成分はどのように異なるのであろうか？というのが次の検討課題である．

6.2 負荷が R, L, C の場合の瞬時電力と平均電力

前節の $e(t)i(t)$ の式を変形すると，

$$\begin{aligned} p(t) &= |EI|\cos\theta - |EI|\cos(2\omega t - \theta) && (6.7)\\ &= |EI|\cos\theta \\ &\quad -|EI|\cos\theta\cos 2\omega t - |EI|\sin\theta\sin 2\omega t && (6.8) \end{aligned}$$

となる．

6.2.1 R のみの場合

これは，

$$\theta = 0, \quad \cos\theta = 1, \quad \sin\theta = 0$$

に相当する．従って，電力の瞬時値と平均値は，以下のようになる．

- **瞬時値**
$$p(t) = |EI| - |EI|\cos 2\omega t \tag{6.9}$$

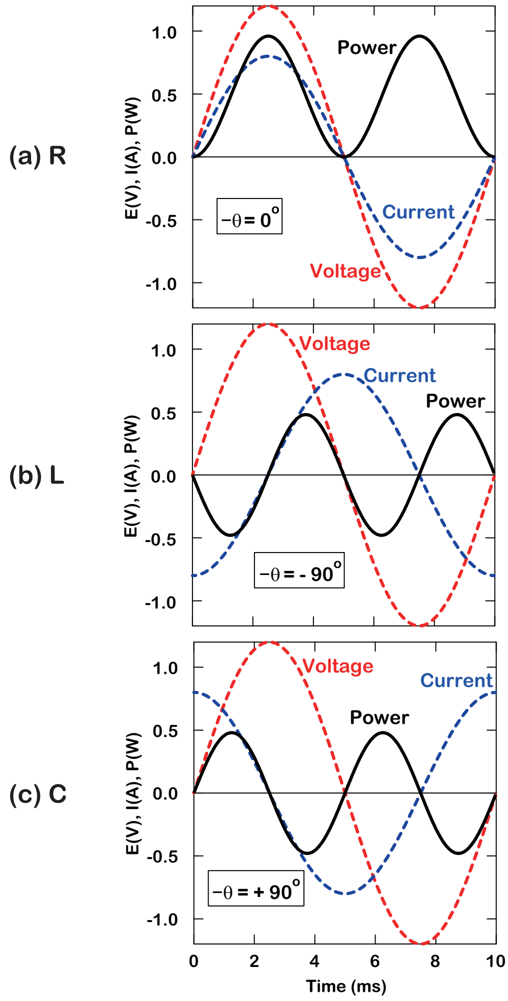


図 **6.3** R, L, C だけの回路素子の電圧，電流，電力波形．

- **平均値**

$$\langle p(t) \rangle = |EI| \tag{6.10}$$

具体的に図示すると**図 6.3**(a) のようになる．電力波形が常に正であり，電源周波数の二倍の周波数で変動していることがわかる．

6.2.2 L のみの場合

これは，

$$\theta = +\frac{\pi}{2}, \quad \cos\theta = 0, \quad \sin\theta = +1$$

に相当する．従って，電力の瞬時値と平均値は，以下のようになる．

- **瞬時値**

$$p(t) = -|EI| \sin 2\omega t \tag{6.11}$$

- **平均値**

$$\langle p(t) \rangle = 0 \tag{6.12}$$

具体的に図示すると**図 6.3**(b) のようになる．電力波形は，電源周波数の二倍の周波数で変動しており，その振動の中心がゼロであるため，平均値はゼロになってしまう．

6.2.3 C のみの場合

これは，

$$\theta = -\frac{\pi}{2}, \quad \cos\theta = 0, \quad \sin\theta = -1$$

に相当する．従って，電力の瞬時値と平均値は，以下のようになる．

- **瞬時値**

$$p(t) = +|EI| \sin 2\omega t \tag{6.13}$$

- **平均値**

$$\langle p(t) \rangle = 0 \tag{6.14}$$

具体的に図示すると**図 6.3**(c) のようになる．電力波形は，電源周波数の二倍の周波数で変動しており，その振動の中心がゼロであるため，平均値はゼロになってしまう．L の場合と異なる点は，電力波形の位相が異なっている点である．二倍の周波数となっているため，もとの電圧電流に対する位相で議論することはできないが，L の場合と C の場合で，電力の波形が反転していることは読み取れると思う．

6.3 交流電力を定義する三つのパラメータの導入

電力の瞬時値を表す式をもう一度見てみよう．

$$\begin{aligned} p(t) = |EI| \cos\theta - |EI| \cos\theta \cos 2\omega t \\ -|EI| \sin\theta \sin 2\omega t \end{aligned} \tag{6.15}$$

電力の波形を見てわかるように，電力波形は基本的に電源周波数の二倍の周波数で変動する．従って，二倍の周波数で変動することを前提として，平均するとゼロになる部分とそうでない部分に分けてみよう．この式を，以下のように分離する

- **変動するが，平均値がゼロにはならない成分**

$$
\begin{aligned}
&|EI|\cos\theta - |EI|\cos\theta\cos 2\omega t \\
&= |EI|\cos\theta\,(1-\cos 2\omega t) \\
&= |EI|\cos\theta\,(2\sin^2\omega t)
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

- **変動して，かつ，平均値がゼロになる成分**

$$-|EI|\sin\theta\ \sin 2\omega t$$

これより，交流電力の特徴を表すパラメータとして以下の三つのパラメータを定義する．

- **皮相電力** 実効値の単純積

$$|EI|$$

- **有効電力** 平均が非ゼロとなる振動成分の平均値

$$|EI|\cos\theta$$

- **無効電力** 平均がゼロとなる振動成分の振幅

$$|EI|\sin\theta$$

6.4 皮相電力

皮相電力とは，後述の複素電力 S の絶対値であり，フェーザ形式で表した電圧と電流の大きさをかけ算しただけの「見せかけの電力」である．

$$|S| = |EI| = |ZI^2| = |E^2/Z| \tag{6.17}$$

単位として，実効的に電力を消費する [W]（ワット）と区別するために **[VA]（ボルトアンペア）**という単位が使われている．

6.5 有効電力と力率

有効電力とは，実際に負荷で消費される電力であり，電力波形の平均値である．

$$P = |EI|\cos\theta = |S|\cos\theta \tag{6.18}$$

この電力は，実効的に電力を消費するものであるから，**[W]（ワット）**と同じ単位が用いられている．

$$\cos\theta \tag{6.19}$$

は**力率**と呼ばれており，皮相電力の内，どれだけの割合が実効的に消費される電力なのかを表す指標となっている．$\cos\theta$ は 0 から 1 の間の値を取るが，それを 100 倍し，「%」を用いて表すことが多い．

力率の中の θ は，インピーダンスの偏角である．従って，インピーダンスの偏角と大きさが与えられれば，電圧もしくは電流の実効値を用いて，有効電力を計算することができる．

6.6 無効電力

無効電力は，蓄積と放出が繰り返される成分であり，実効的には消費されない成分である．

$$Q = |S|\sin\theta \tag{6.20}$$

単位としては，**[var]（バール）**という単位が用いられている[*2]．

$$\sin\theta \tag{6.21}$$

はリアクタンス率という名前が付いているが，ほとんど利用されない．

6.7 複素電力の定義

電圧と電流がフェーザ形式で与えられているとき，それらの積を計算すると電力らしきものが得られると想定される．その際，前節までで導入した三つの電力成分とつじつまの合う形で電圧と電流の積，即ち，電力を定義しなければならない．

皮相電力 $|S|$，有効電力 P，無効電力 Q，偏角 θ の関係を図示すると，**図 6.4**(a) のようになる．これとつじつまの合うように**複素電力**を定義すると，**図 6.4**(b) のようになる．

6.8 複素電力の計算式

前節のように複素電力が定義されたが，それを計算するときに，単純にフェーザ形式の電圧とフェーザ形式の電流の積を計算したらよい，という訳では無い，というのがこの節である．

結論から先に述べると，複素電力を定義通りに算出す

[*2] 教科書によっては，最初の v が大文字になって，Var としているものもある．

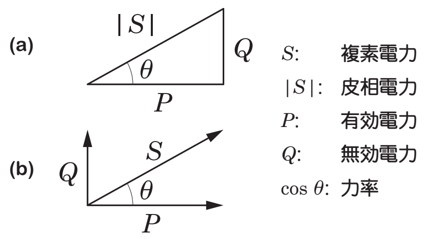


図 6.4 複素電力を定義するための図．(a) 皮相電力 $|S|$，有効電力 P，無効電力 Q，偏角 θ の関係と，(b) これらの関係を満足するように定義した複素電力の複素平面上での描像．

るためには，以下のように計算しなければならない．

$$S = E\bar{I} \qquad S = EI^* \tag{6.22}$$

ここで，$\bar{I}$ や I^* は I の共役複素数であることを示すものである．即ち，フェーザ形式の電圧とフェーザ形式の**電流の共役複素数をかけ算する**，という作法になる．

課題

電圧電流をフェーザ形式で表したときに，複素電力を計算するためには，それらの単純な積ではダメであり，電流を共役複素数にしてかけ算しなければならないことを示せ．

略解

電圧を $E = |E|\mathrm{e}^{\mathrm{j}0} = |E|$，負荷のインピーダンスを $Z = |Z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ とする．このとき，電流は，$I = |I|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$ となる．

E と I の単純な積を計算すると，

$$EI = |E||I|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} \tag{6.23}$$

となり，単純な EI の積を計算すると複素電力の偏角の符号が定義と逆になる．

一方，電流を複素共役にして計算すると，

$$EI^* = |E||I|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \tag{6.24}$$

となり，複素電力の定義と偏角の符号が一致することが確認できる．

豆知識

豆知識

古典電気計測

永久磁石による一定磁場の中に置かれたコイルに電流を流すと，電流と磁束密度の積に比例した力がコイルに作用する．**図 6.5**(a) は，こうした電磁気学的な作用を利用した昔ながらの可動コイル型の電流計である (電圧計にもなる).

但し，可動コイル型を交流に適用すると困ったことになる．コイルが追従できるほどの低周波であれば，針はその電流の振動に対応して左右に振動するであろう．しかし，周波数が高くなると，コイルは平均電流に対応した動きをするようになる．正弦波交流の平均値はゼロであるから，針はゼロを指したままとなり，意味がない．

交流電流や電圧は，平均すればゼロであるから，計測して意味があるのは，振幅に関する情報である．これを計測してくれるのが，**図 6.5**(b) に示した可動鉄片型と呼ばれるタイプである．このタイプでは，コイルに電流が流れることによって磁場が発生し，針に取り付けられた鉄片が磁化される．このときコイルと鉄片の間に働く引力が電流の二乗に比例した力となる．なぜなら，磁束密度は電流に比例し，電磁力は磁束密度と電流の積に比例するからである．電流が正弦波交流の時には，

$$\text{力} \propto (I_\mathrm{m}\sin\omega t)^2 = \frac{1}{2}I_\mathrm{m}^2(1-\cos 2\omega t)$$

となる．鉄片の動きが周波数に追従できない場合には，平均的な力がかかる．$\cos 2\omega t$ は平均するとゼロであるから，

$$\langle\,\text{力}\,\rangle \propto I_\mathrm{m}^2$$

となり，針の動きは，電流の振幅の二乗に比例したものとなる．目盛が等間隔ではなくなるが，鉄片の構造を工夫すると，電流の大きさに対する針の動きを線形にすることができる．

古典的な方法で交流電流や電圧を計測しようとすると，可動コイル型ではなく，可動鉄片型にする必要があるが，電力に関しては，可動コイル型が活躍する．可動コイル型の永久磁石の代わりに電磁石を用いると電力計となるのである．**図 6.5**(c) に示したように，電力を計りたい部分の電圧 v に比例した電流 v/R が電磁石の励磁用に流れるようにしておき，可動コイルには電力を計りたい部分を流れた (或いは流れる) 電流 i を流す．すると，磁束密度が電圧 v に比例することとなり，コイルに作用する力は，v と i の積となる．可動コイルの動きが追従できない周波数であれば，計測される針の振れは，v と i の積の時間平均値に比例することになる．これにより，電力が計測される．

現在は，このようなアナログ回路はほぼ皆無であり，ほとんどデジタルサンプリングした電圧と電流を演算回路で処理した結果が表示されている．

このような古いデバイスを豆知識としてわざわざ登場させたのは，かつては，電磁気学と電気回路をうまく組み合わせたデバイスが存在していたことを知って頂くためである．

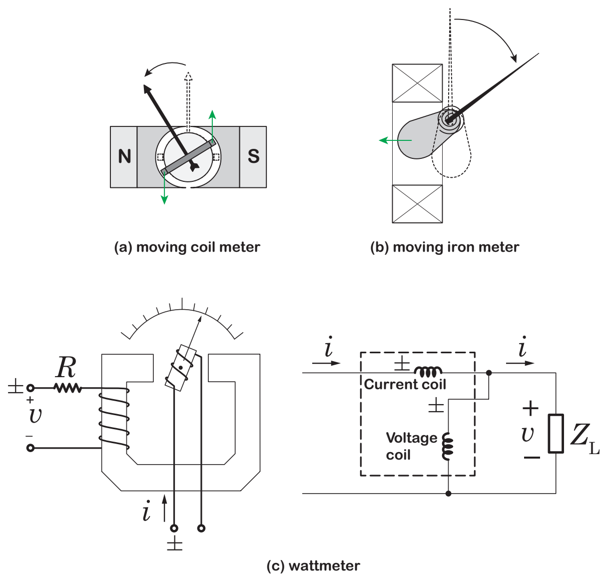


図 6.5 古典的な電流・電圧・電力計測デバイス [1,2]．(a) 可動コイル型，(b) 可動鉄片型，(c) ワットメータ．

豆知識

皮相電力と無効電力

皮相電力や無効電力という名前は，有効電力と比較するとあまり重要ではないように見える．皮相電力は「見かけの電力」なので，「見かけなのだから，大して注目しなくてよい」のだろうか？無効電力も「無効」なのだから，無視してよい」のだろうか？以下では，そうでは無いことを以下の二つの例を挙げて示す．

[A] 電力会社の電源容量は皮相電力できまる
[B] 電線での電圧降下は無効電力で調整する

豆知識

[A] 電力会社の電源容量は皮相電力できまる

電力を供給する場合には，当然であるが，電源 (発電機を含む) が必要である．第 10 章の 10.4 節でも述べているが，現実の電源は，出せる電圧や電流に上限がある．電源を利用できる上限を「電源容量」というコトバで表現している．多くの場合，電源容量というコトバを使った場合，ある規格の電圧がきまっており，その電圧を出す電源がどれだけ電流をだせるかという「電流容量」の方を指す場合が多い．ここでは，この電流容量を決めているのが有効電力ではなく，皮相電力である，ということを述べる．

負荷として抵抗 R のみが接続される場合には，その負荷での消費電力は，有効電力のみである．その値は，フェーザ形式の電圧を $\boldsymbol{E}$ とし，フェーザ形式の電流を I_{R} とすれば，

$$I_{\mathrm{R}} = \frac{\boldsymbol{E}}{R}$$

である．従って，電源側の電流容量としては，**図 6.6**(a) に示すように，交流電流瞬時値の最大値 (即ち，振幅)；

$$\sqrt{2}|I_{\mathrm{R}}| = \frac{\sqrt{2}|\boldsymbol{E}|}{R}$$

をまかなうだけの電流容量があればよいことになる．

一方，この抵抗に無効電力の源であるコイル (またはコンデンサ，以下省略) が並列に接続されたらどうなるであろうか．抵抗には上記と同じ電流が流れる．コイルには電圧に対して 90° 位相がずれた電流が流れる．この電流は，既に確認したように，電圧とかけ算して時間平均値をとるとゼロになる．そのため，無効電力なる名前が付いたりしている．しかし，電力がゼロでも，電流はゼロではない．抵抗だけのときと比較すると余分な電流が流れる．従って，電力会社としては，当たり前だが，この余分に流れる無効電力の分も考慮した電流容量をもつ電源を準備しなければならない．

では，具体的には，どれだけの電流容量を確保する必要があるのか？位相がずれた電流を足し合わせると，単純に振幅を足し合わせた正弦波とはならない．位相のずれ具合も考慮して足し合わせた電流の最大振幅が，確保すべき電流容量となる．この位相のずれも考慮して足し算した電流の最大振幅に関係するのが皮相電力であるため，皮相電力が電源容量確保の指標となっている．そのことを以下に示す．

図 6.6(b) に示すように，抵抗 R に対して並列に接続されたリアクタンス $\mathrm{j}X$ がある場合を考える．抵抗 R に流れる電流に加えて，$\mathrm{j}X$ にも電流が流れる．すると，負荷を流れる電流の合計 I_{L} は，フェーザ形式で計算すれば，

$$I_{\mathrm{L}} = I_{\mathrm{R}} + \mathrm{j}I_{\mathrm{X}}$$

となる．この I_{L} の大きさの $\sqrt{2}$ 倍，即ち，

$$\sqrt{2}|I_{\mathrm{L}}| = \sqrt{2(|I_{\mathrm{R}}|^2 + |I_{\mathrm{X}}|^2)}$$

が電流の振幅となり，確保すべき最低限の電流容量ということになる．一方，皮相電力

$$|\boldsymbol{E}I| = |\boldsymbol{E}||I_{\mathrm{L}}|$$

は，$|\boldsymbol{E}|$ とこの $|I_{\mathrm{L}}|$ のかけ算である．一般に，電圧の大きさ $|\boldsymbol{E}|$ は先に決まっている場合が多いので，皮相電力が判れば $|I_{\mathrm{L}}|$ が決まることになる．従って，以下のように言うことができるのである．

電源側に要求される電流容量は皮相電力で決まる．

一般に，皮相電力は有効有効よりも大きく，無効電力が大きい程，皮相電力は大きくなる．従って，電源側 (即ち，電力会社側) としては，有効電力ではなく，皮相電力を考慮した電流容量の電源を消費者に対して準備しておく必要がある．

電源は，その電流容量が大きくなると大規模化し，その価格も高くなる．従って，電力会社側としては，電力を消費する側の人達に対して，以下のように言いたくなるのである．

- 「なるべく無効電力を小さくしてね」
- 「無効電力の大きい負荷をつなげたら，追加料金をもらいますよ」
- 「無効電力の小さい負荷をつなげたら割引しますよ」

これらを，本章で学んだ「力率」という用語を使って表現すれば，以下のようになる．

- 「なるべく力率を大きくしてね (最大は 1 だけど)」
- 「力率の小さい負荷をつなげたら，追加料金をもらいますよ」

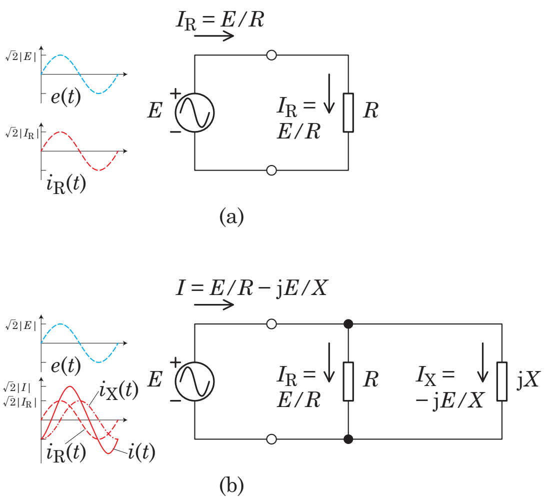


図 6.6 (a) 負荷が抵抗 R だけの場合，即ち，有効電力しかない場合の電源電圧と電源電流．(b) 抵抗 R にリアクタンス $\mathrm{j}X$ が並列に接続された場合の電源電圧と電源電流．

- 「力率の大きい負荷をつなげたら，割引しますよ」

上記の割引は，「**力率割引**」と称されており，実際に実施されている．興味があれば，各自でネット検索してみよ．参考までに，関西電力の電気供給約款の関連部分を以下に引用しておく [3].

> 電気機器の力率をそれぞれの入力によって別表 6 (加重平均力率の算定) により加重平均してえた値が，85 パーセントを上回る場合 ((4) ロにより契約電力を定める場合を含みます．) は，基本料金を 5 パーセント割引し，85 パーセントを下回る場合は，基本料金を 5 パーセント割増しいたします．この場合，電気機器の力率は，別表 7 (進相用コンデンサ取付容量基準) の基準に適合した容量の進相用コンデンサが取り付けてあるものについては 90 パーセント，取り付けてないものについては 80 パーセント，電熱器については 100 パーセントといたします．

課題

力率改善コンデンサ (その 1)

上記のように力率を 1 に近づけることは，電気料金も割引なることから，一般には，「良いこと」とされている．従って，力率を 1 に近づけることを「**力率改善**」というコトバで表現する．**図 6.7** に示したように，抵抗と正のリアクタンスが並列接続された負荷の場合に力率改善をするためにはどうすればよいか？

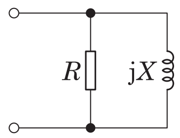


図 6.7 力率改善コンデンサの接続に関する問題 1.

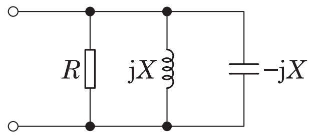


図 6.8 力率改善コンデンサの接続に関する問題 1 の解答.

略解

図 6.8 のように符号が反対で，大きさが同じリアクタンスを更に並列に接続すればよい．そうすれば，合成インピーダンスの虚部はゼロとなり，力率は 1 となる．

一般に，非抵抗型の電力利用事業の多くは，「モーター」を利用した事業である[*3]．従って，多くの場合，負荷に含まれるリアクタンス成分は正である．従って，そのような負荷の力率改善を行う場合には，コンデンサが用いられることになる．そのようなコンデンサのことを「**力率改善コンデンサ**」と称している．

課題

力率改善コンデンサ (その 2)

上記の問題の場合，力率を最適値である 1 にすることが可能であるが，そうでない場合もある．例えば，**図 6.9**(a)(b) に示すように，リアクタンスと抵抗が直列接続

[*3] 当初，「鉄道に代表されるような」という枕コトバをつけてしまっていた．これは大きな誤り．一般の鉄道で使うモーターは直流モーターでした．但し，新幹線だけは異なります．初期の 100 系までは直流モーターでしたが，300 系から交流モーターになっています．また，交流モーターが随所で使われているという例を挙げるなら，「鉄道」ではなく，工場の旋盤，ポンプ，空調用ファンなどを例としてあげるべきでした．

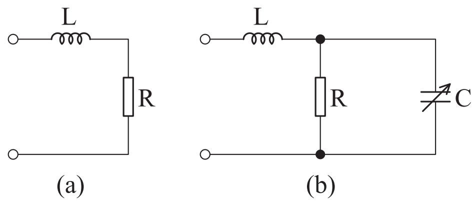


図 6.9 力率改善コンデンサの接続に関する問題 2.

された負荷に対して，力率改善コンデンサが抵抗の両端にしか接続できない場合を想定してみよう．この場合，力率を 1 にすることは可能なのだが，どんな R と ωL でも可能というわけではなく，$R \geq 2\omega L$ でなければ，力率 1 を達成することはできない．そのことを示せ．

略解

コンデンサを接続した場合の端子間のインピーダンス Z は次式で与えられる．

$$Z = \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{1/R + \mathrm{j}\omega C} = \mathrm{j}\omega L + \frac{R}{1 + \mathrm{j}\omega CR}$$
$$= \frac{R}{1+\omega^2 C^2 R^2} + \mathrm{j}\omega\left(L - \frac{CR^2}{1+\omega^2 C^2 R^2}\right). \quad (6.25)$$

力率が 1 であるとは，Z の虚部がゼロということである．従って，力率を 1 にするためには，次式が成り立つような C を用いればよいことになる．

$$L - \frac{CR^2}{1+\omega^2 C^2 R^2} = 0. \quad (6.26)$$

これを変形すれば，以下のような C に関する二次方程式が得られる．

$$(\omega^2 R^2 L)\, C^2 - R^2\, C + L = 0. \quad (6.27)$$

これを満たす C は，単純に二次方程式の解の公式を当てはめると，次式のように表されることになる．

$$C = \frac{R^2 \pm \sqrt{(R^2)^2 - 4(\omega^2 R^2 L)L}}{2(\omega^2 R^2 L)}$$
$$= \frac{R^2 \pm R\sqrt{R^2 - (2\omega L)^2}}{2(\omega^2 R^2 L)}$$
$$= \frac{R^2 \pm R\sqrt{(R+2\omega L)(R-2\omega L)}}{2(\omega^2 R^2 L)}. \quad (6.28)$$

このとき，ルートの中の $(R - 2\omega L)$ が負になった場合には，コンデンサの容量 C が複素数になるため，実現不可能となる．従って，R と ωL の間には，以下の関係が成り立っている必要があるのである．

$$R \geq 2\omega L. \quad (6.29)$$

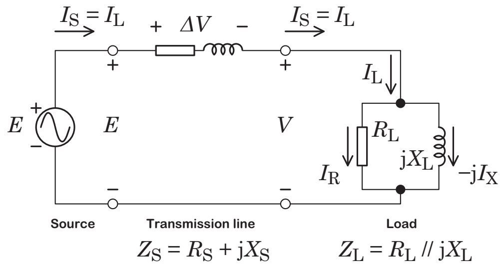


図 6.10 電線の抵抗成分とリアクタンス成分を考慮した負荷への給電回路．

豆知識

[B] 電線での電圧降下は無効電力で調整する [4]

電源から負荷への電力供給は，送電経路を通じて行われる．その際，送電経路は，電線や変圧器で構成されており，それらはインピーダンスを有する[*4]．従って，送電経路に電流が流れれば，必ず送電経路に電圧が発生するため，電源電圧と負荷電圧の大きさや位相に差が生じる．言い換えれば，電源電圧を一定に保っていても，負荷の有効電力や無効電力が変われば，負荷に印加される電圧が変わる．このとき，負荷に無効電力をうまく追加することにより，負荷電圧の大きさだけは変わらないようにすることができる．電源電圧に対する負荷電圧の位相は変わってしまうのだが，負荷電圧の大きさが変わらないことから，有効電力は変わらない，という特徴を有する．当然であるが，無効電力は変わる．しかし，後述の課題で示したように，無効電力が小さくなる方向 (即ち，力率が大きくなる方向) 方向に変わると，一石二鳥ということになる．このような措置を**無効電力補償**という．

課題

無効電力補償のメカニズム

上記の電圧変動の発生と補償のメカニズムを述べよ．

略解

電源 E と負荷インピーダンスの間に存在する送電経路のインピーダンス Z_S を抵抗 R_S とリアクタンス $\mathrm{j}X_\mathrm{S}$ の直列接続で表すと，**図 6.10** のようになる．ここで，負荷として抵抗 R_L とコイル $\mathrm{j}X$ の並列接続を想定する．

[*4] 後述の豆知識を参照されたし．

送電経路に流れる電流を I_S とすると，送電経路に発生する電圧，即ち，電源電圧 $\boldsymbol{E}$ と負荷電圧 $\boldsymbol{V}$ の差 $\Delta V = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{V}$ は,

$$\Delta V = (R_S + jX_S)\, I_S$$

となる．一方，負荷に流れる電流を I_L とすると，**図 6.10** の回路構成の場合には,

$$I_S = I_L$$

である．従って，電源電圧 $\boldsymbol{E}$ と負荷電圧 $\boldsymbol{V}$ の差 ΔV は，負荷電流 $\boldsymbol{I}$ を用いて

$$\Delta V = (R_S + jX_S)\, I_L$$

と表すことができる．

抵抗 R_L に流れる電流を I_R，コイル jX に流れる電流を $-jI_X$ とすると，負荷電流 $\boldsymbol{I}$ は,

$$I_L = I_R - jI_X$$

と表されるので,

$$\begin{aligned}\Delta V &= (R_S + jX_S)\,(I_R - jI_X)\\ &= (R_S I_R + X_S I_X) + j\,(X_S I_R - R_S I_X)\\ &= \Delta V_R + j\Delta V_X\end{aligned}$$

となる．ここで,

$$\begin{aligned}\Delta V_R &= R_S I_R + X_S I_X,\\ \Delta V_X &= X_S I_R - R_S I_X\end{aligned}$$

とした．

ここで，負荷の有効電力を P，無効電力を $-jQ$ とすれば,

$$\begin{aligned}P &= |V| I_R,\\ Q &= |V| I_X\end{aligned}$$

であるから，ΔV_R と ΔV_X は，有効電力 P と無効電力 Q を用いて，以下のように表される．

$$\begin{aligned}\Delta V_R &= \frac{R_S P + X_S Q}{|V|},\\ \Delta V_X &= \frac{X_S P - R_S Q}{|V|}.\end{aligned}$$

従って,

> 電源電圧と負荷電圧の差 ΔV は，負荷の有効電力 P と無効電力 Q によって変わる

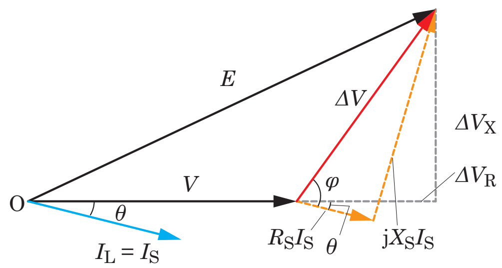


図 6.11 電線の抵抗成分とリアクタンス成分を考慮した負荷への給電回路に関するフェーザ・ダイヤグラム．

ということがわかる．この状況をフェーザ・ダイヤグラムで描くと，**図 6.11** のようになる．ここで，後述の計算を楽にするために，$\boldsymbol{V}$ の偏角がゼロになるように描いてある．

上述の ΔV は，フェーザで表したときの $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{V}$ の差 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{V}$ であるが，今問題にしているのは，電源電圧の大きさ $|\boldsymbol{E}|$ と負荷電圧の大きさ $|V|$ の差であるから，$|\boldsymbol{E}| - |V|$ を求める必要がある．フェーザ・ダイヤグラムから,

$$\Delta V = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{V} = \Delta V_R + j\Delta V_X$$

であるが，$\boldsymbol{V}$ を実部しか持たないようにフェーザ・ダイヤグラムを描いたので,

$$V = |V|$$

となる．従って,

$$\boldsymbol{E} = |V| + \Delta V_R + j\Delta V_X$$

より,

$$|\boldsymbol{E}|^2 = (|V| + \Delta V_R)^2 + \Delta V_X^2$$

となる．電源電圧の大きさと負荷電圧の大きさの差を知りたいのであれば，この式を解いて得られる $|V|$ が $|\boldsymbol{E}|$ とどれくらい違うのかがわかればよい．

解くための準備として，式を簡単化するために,

$$A = R_S P + X_S Q, \tag{6.30}$$

$$B = X_S P - R_S Q \tag{6.31}$$

とおくと,

$$|\boldsymbol{E}|^2 = \left\{|V| + \frac{A}{|V|}\right\}^2 + \left\{\frac{B}{|V|}\right\}^2 \tag{6.32}$$

となる．これは，$W = |V|^2$ に関する以下のような二次方程式となる．

$$W^2 + (2A - |\boldsymbol{E}|^2)W + (A^2 + B^2) = 0.$$

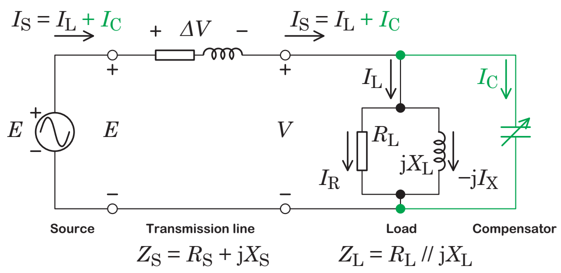


図 6.12 $|E| = |V|$ を満たすために新たな無効電力のもとになる補償素子を接続した回路.

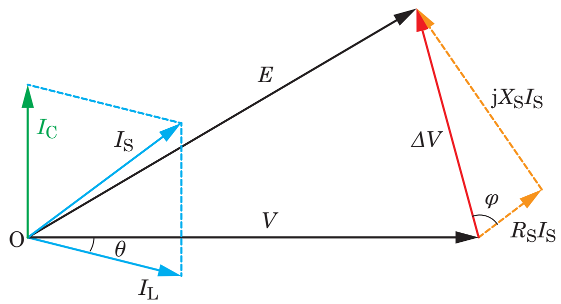


図 6.13 補償無効電力を追加し，電源電圧と負荷電圧の大きさが等しくなるようにしたときのフェーザ・ダイヤグラム.

これを解いて W を求めれば，$|V|$ が得られる.

$$a = 1,$$
$$b = 2A - |E|^2,$$
$$c = A^2 + B^2$$

とすれば,

$$|V|^2 = W = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

より,

$$|V| = \sqrt{W} = \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

となる．ここで，二次方程式の解の公式の中の符号 $\pm$ のどちらをとるかは，想定している問題に応じて選択する必要がある．後述の課題では，無効電力が 0 から徐々に大きくなり，負荷の電圧が $|E|$ から徐々に下がった場合を想定し，電源電圧の大きさに近い方を採用している.

次に，**「負荷での電圧を一定に保つには」**について考える．式で表せば，次式を満たせばよい，ということになる.

$$|E| = |V|.$$

その手段として，**図 6.12** に示すように，負荷と並列に新たな無効電力 Q_C のもとになる回路を接続し*5,

$$Q' = Q + Q_C$$

とする．すると,

$$|E|^2 = \left\{|V| + \frac{R_S P + X_S Q'}{|V|}\right\}^2 + \left\{\frac{X_S P - R_S Q'}{|V|}\right\}^2 \quad (6.33)$$

*5 接続すべき素子として，既にコンデンサが描かれている．解答のこの時点では，まだ何を接続したらよいのかは判っていないので，コンデンサを描いてしまうのはマズイのだが，答えとしては，コンデンサとなる．実際に，「進相コンデンサ」名称で販売されている.

となる．目的とすることは，$|E|^2 = |V|^2$ となるようにすることであるから，それを満たすような Q' を求めればよい．式 (6.33) において，$|E|^2 = |V|^2$ とすると，以下に示すような Q' に関する二次方程式が得られる.

$$aQ'^2 + bQ' + c = 0.$$

ここで，a，b，c は以下の通りである.

$$a = R_S^2 + X_S^2, \quad (6.34)$$
$$b = 2|V|^2 X_S, \quad (6.35)$$
$$c = (|V|^2 + R_S P)^2 + X_S^2 P^2 - |V|^4. \quad (6.36)$$

従って，Q' が以下のような値になるような無効電力を負荷と並列に接続すれば，$|E| = |V|$ が実現できる.

$$Q' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (6.37)$$

このとき，符号 $\pm$ のどちらを採用するかは，「負荷電圧の大きさを電源電圧の大きさと等しくする」ということ以外の要件できまることになる．例えば，力率が著しく下がったりしないか，などである．後述の課題にて具体的な検討例を示したので，詳しくはそちらを参考にして欲しい.

上記の Q'，もしくは追加された Q_C を数式で書くと，極めて複雑で見通しの悪いものとなるが，フェーザ・ダイヤグラムで描くと，**図 6.13** のようになる．この図から，電線での電圧 ΔV が発生するのは避けられないが，負荷とは独立した無効電力 Q_C(を担う電流 I_C) を追加することによって電線の電流 I_S の位相を調整し，赤と橙で描かれた三角形の大きさと角度を変えることで，$|E| = |V|$ を実現していることがわかるであろう.

具体的な数値を用いた計算をすると[*6]，新たに接続すべき無効電力の担い手は，電圧に対して電流の位相が進む素子，即ち，コンデンサとなることがわかる．既に学んだように，コンデンサの並列接続は，力率改善の働きもある．しかし，任意の負荷に対して，力率 1 と $|E| = |V|$ を両方一度に実現することは，残念ながらできない．一般には，力率を改善することで，同時に電圧も完璧ではないが回復する．そのため，力率改善の方を優先する場合が多い．

課題

負荷の電圧変動とその補償 (計算練習 1) [4]

電源電圧は $E = 10$ kV, 負荷の有効電力は $P = 25$ MW, 無効電力は $Q = +50$ MVar とする．これらの有効電力と無効電力の値から，力率は $25/\sqrt{25^2+50^2} = 0.4472$ となる．$Q > 0$ であるから，電圧に対して電流が遅れる「遅れ力率」である．即ち，負荷は，抵抗とコイルの並列接続負荷であるといえる．送電経路の抵抗とリアクタンスは，それぞれ，$R_\mathrm{S} = 0.0784\ \Omega$，$X_\mathrm{S} = 0.3922\ \Omega$ とする．このときの負荷電圧の大きさを求めよ (電源電圧の大きさよりも小さくなる).

次に，負荷電圧の大きさと電源電圧の大きさを等しくするための進相コンデンサの無効電力の値を求めよ．また，もともとの負荷と進相コンデンサを合わせた負荷の力率を求めよ[*7].

略解

まず，$|V|$ を求めよう．$|V|$ を求める際の係数 A と B は，式 (6.30)，式 (6.31) より，

$$A = R_\mathrm{S}P + X_\mathrm{S}Q = 21.57\ \mathrm{kV}^2,$$
$$B = X_\mathrm{S}P - R_\mathrm{S}Q = 5.885\ \mathrm{kV}^2$$

である．これらの係数と，$|E| = 10$ kV であることを用いて式 (6.32) を解けば，$|V|$ が得られる．二次方程式の解の公式の符号として + をとるか − をとるかによって，以下の二つの解が得られる．

$$|V|^2 = 45.59\ \mathrm{kV}^2 \to |V| = 6.782\ \mathrm{kV}\ \ (+\text{ の場合})$$
又は
$$|V|^2 = 10.87\ \mathrm{kV}^2 \to |V| = 3.297\ \mathrm{kV}\ \ (-\text{の場合})$$

となる．どちらも解であるが，ここでは，無効電力が 0 から徐々に 50 Mvar に増えていった場合を考えることにする．すると，無効電力が 0 のときには，負荷電圧の大きさは $|E|$ と同じであり，そこから徐々に減少するので，最初に解として合致するのは絶対値の大きい方である．そこで，電源電圧の大きさである 10 kV に近い方が現実的な解であると考えられる．以上より，電線に電流が流れたことによって，負荷の電圧の大きさは，電源電圧の大きさの 10 kV よりも約 3.2 kV 小さい $|V| = 6.78$ kV となる，と結論される．

次に，負荷電圧と電源電圧の位相差を求めておこう．A，B を用いれば，位相を含めた電圧の差 ΔV は，

$$\Delta V = \frac{A}{|V|} + \mathrm{j}\frac{B}{|V|} = (3.181 + \mathrm{j}0.8678)\ \mathrm{kV}$$

となる．E については，問題設定の際にその大きさが $|E| = 10$ kV であるという情報だけを与えており，V との位相差を未知としていたが，この ΔV が既知となることで，V に対する E の位相差が以下のように求められる．E をフェーザで書けば，

$$\begin{aligned} E = V + \Delta V &= (9.963 + \mathrm{j}0.8678)\ \mathrm{kV} \\ &= (10.00\angle 4.978^\circ)\ \mathrm{kV} \end{aligned}$$

となるので，負荷電圧 V に対して電源電圧が約 5° の進んでいることになる．見方を変えれば，電源電圧 E に対して負荷電圧 V が約 5° 遅れている，ということになる．

なお，このときの負荷電流 I_L は，

$$\begin{aligned} I_\mathrm{L} = \frac{P - \mathrm{j}Q}{|V|} &= (3.686 - \mathrm{j}7.373)\ \mathrm{kA} \\ &= (8.243\angle -63.43^\circ)\ \mathrm{kA} \end{aligned}$$

となることから，負荷の力率 PF は (すでに判っていることであるが),

$$\mathrm{PF} = \cos(-63.43^\circ) = 0.447\ (\text{遅れ})$$

となる．参考までに，これらを考慮してフェーザ・ダイヤグラムを描くと，**図 6.14**(a) のようになる．

次に，負荷電圧の大きさ $|V|$ を $|E|$ と同じ 10 kV にするために必要な補償用の無効電力 Q_C として如何なる値

[*6] 後述の演習問題を参照されたし．
[*7] 問題設定と略解の途中では (桁落ちなどの影響を抑えるために) 有効数字を 4 桁にしているが，解答の有効数字は，現実的なものとして 3 桁にしてある

のものを付けたらよいのかを計算してみよう．そのために，式 (6.37) の Q' を算出しよう．式 (6.34)~ (6.36) の係数は以下のようになる．

$$\begin{aligned}a &= R_S^2 + X_S^2\\ &= 0.160\ \Omega^2,\\ b &= 2|V|^2 X_S\\ &= 2\times(10\times10^3)\times 0.3922\\ &= 7.844\times10^7\ \mathrm{V^2\Omega}\\ c &= (|V|^2 + R_S P)^2 + X_S^2 P^2 - |V|^4\\ &= ((10\times10^3)^2 + 0.0784\times(25\times10^6))^2\\ &\quad +(0.3922\times25)^2 - (10\times10^3)^4\\ &= 4.920\times10^{14}\ \mathrm{V^4}.\end{aligned}$$

これらを式 (6.37) に代入して二次方程式の解の公式を適用すると，符号の + をとるか − をとるかによって，以下の二つの解が得られる．

$$\begin{aligned}Q' &= -6.354\ \mathrm{Mvar}\ \ (+\text{ の場合})\\ &\quad\text{又は}\\ &= -483.9\ \mathrm{Mvar}\ \ (-\text{の場合}).\end{aligned}$$

従って，追加すべき無効電力は，

$$\begin{aligned}Q_C &= Q' - Q\\ &= -6.534 - 50 = -56.35\ \mathrm{Mvar}\ \ (+\text{ の場合})\\ &\quad\text{又は}\\ &= -483.9 - 50 = -534.0\ \mathrm{Mvar}\ \ (-\text{の場合})\end{aligned}$$

となる．無効電力が負であるから，どちらの場合も，進み力率となるコンデンサを接続すればよいことがわかる．後述の補足説明にあるように，後者の Q'(− 符号を採用した場合) を採用すると，力率が著しく悪くなる．従って，前者の Q'(+ 符号を採用した場合) を採用することにする．即ち，結論としては，

$$Q_C = -56.4\ \mathrm{Mvar}$$

なる無効電力を付け加えることによって，負荷電圧の大きさを電源電圧の大きさと同じにすることができる，となる．

次に，このコンデンサも含めた負荷の力率がどのようになるのかを見てみよう．コンデンサを含めた負荷に流れる電流は，元々の負荷に流れる電流 I_L と新たに付け加えたコンデンサに流れる電流 I_C の和として求められる．コンデンサに流れる電流 I_C は，

$$I_C = \frac{-\mathrm{j}Q_C}{|V|} = \mathrm{j}\frac{56.35\ \mathrm{Mvar}}{10\ \mathrm{kV}} = \mathrm{j}5.635\ \mathrm{kA}$$

となる．一方，もともとの負荷に流れる電流 I_L は，電圧が $V = 10$ kV となったことにより，

$$\begin{aligned}I_L = \frac{P - \mathrm{j}Q}{|V|} &= (2.500 - \mathrm{j}5.000)\ \mathrm{kA}\\ &= (5.590\angle -63.43^\circ)\ \mathrm{kA}\end{aligned}$$

となる．I_L と I_C の和 (即ち，電線を流れる電流 I_S である) は，

$$\begin{aligned}I_S = I_L + I_C &= (2.500 + \mathrm{j}0.635)\ \mathrm{kA}\\ &= (2.579\angle 14.25^\circ)\ \mathrm{kA}\end{aligned}$$

となる．従って，コンデンサを含めた負荷の力率は，

$$\mathrm{PF} = \cos 14.25^\circ = 0.969\ (\text{進み})$$

となる．あるいは，以下のように計算しても同じである．

$$\mathrm{PF} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q_0^2}} = \frac{25}{\sqrt{25^2 + (-6.354)^2}} = 0.969.$$

無効電力補償の措置を講じる前の力率が 0.447 であったのに対し，措置を講じた後の力率が 0.969 となっている．即ち，無効電力補償の措置を講じることによって，負荷電圧の大きさが電源のそれと同じになると同時に，力率も改善されていることがわかる．

ちなみに，このときの ΔV を求めてみると，以下のようになる．

$$\begin{aligned}A &= R_S P + X_S Q_0 = -0.5322\ \mathrm{kV^2}\\ B &= X_S P - R_S Q_0 = 10.30\ \mathrm{kV^2}\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{A}{|V|} + \mathrm{j}\frac{B}{|V|} = \frac{-0.5322}{10} + \mathrm{j}\frac{10.30}{10}\\ &= (-0.05322 + \mathrm{j}1.030)\ \mathrm{kV}\\ &= (1.031\angle 92.96^\circ)\ \mathrm{kV}\end{aligned}$$

となる．従って，電源電圧 E をフェーザで書くと，

$$\begin{aligned}E = V + \Delta V &= (9.947 + \mathrm{j}1.030)\ \mathrm{kV}\\ &= (10.00\angle 5.912^\circ)\ \mathrm{kV}\end{aligned}$$

となる．

上の結果から，コンデンサを付け加えて電源電圧の大きさと負荷電圧の大きさを同じにした場合には，負荷電圧 V に対して電源電圧 E の位相が約 6° 進むことになったことがわかる．逆に言えば，電源電圧 E に対する負荷電圧の位相が 6° 遅れることになった，ということになる．これらを考慮してフェーザ・ダイヤグラムを描くと，**図 6.14**(b) のようになる．

補足説明

もう一つの Q' を選択するとどうなるか

Q' を求めるための二次方程式の解として出てきたもう一つの解，

$$Q' = -483.9\ \mathrm{Mvar}$$

を採用するとどうなるのかをここで検証する．この場合，

$$Q_{\mathrm{C}} = Q' - Q = -534.0\ \mathrm{Mvar}$$

となる．この無効電力もコンデンサで実現できるものであるが，そこに流れる電流 I_{C} は，

$$I_{\mathrm{C}} = -\mathrm{j}\frac{Q_{\mathrm{C}}}{|V|} = \mathrm{j}\frac{534.0\ \mathrm{Mvar}}{10\ \mathrm{kV}} = \mathrm{j}53.40\ \mathrm{kA}$$

となる．この値は，先ほどの解で出てきた I_{C} の大きさよりも 10 倍ほど大きい値となっている．従って，無効電力用の電流として先ほどの解よりも大きい電流が流れることになる．これが電力会社にとって嫌なことである，ということは既に述べた通りである．従って，もしも I_{C} が小さい解が別にあるなら，そちらを採用した方が，電力会社としては有り難いのである．

これを力率という観点で見てみよう．もともとの負荷に流れる電流 I_{L} は，V が同じであるから，Q_{C} の有無によって変わらず，

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{L}} &= (2.500 - \mathrm{j}5.000)\ \mathrm{kA} \\ &= (5.590\angle -63.43^\circ)\ \mathrm{kA} \end{aligned}$$

である．したがって，電線を流れる電流 I_{S} は，

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{S}} = I_{\mathrm{L}} + I_{\mathrm{C}} &= (2.500 + \mathrm{j}48.40)\ \mathrm{kA} \\ &= (48.46\angle 87.04^\circ)\ \mathrm{kA} \end{aligned}$$

となる．

この電流がコンデンサを含めた負荷に流れるので，コンデンサを含めた負荷の力率は，

$$\mathrm{PF} = \cos 87.04^\circ = 0.0516$$

となり，かなり小さい値となることが確認できるであろう．

次に，E と V の位相差がどうなっているかを見てみよう．このときの ΔV を求めてみると，

$$\begin{aligned} A &= R_{\mathrm{S}}P + X_{\mathrm{S}}Q_0 = -187.9\ \mathrm{kV}^2 \\ B &= X_{\mathrm{S}}P - R_{\mathrm{S}}Q_0 = 47.75\ \mathrm{kV}^2 \end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{A}{|V|} + \mathrm{j}\frac{B}{|V|} = \frac{-187.9}{10} + \mathrm{j}\frac{47.75}{10} \\ &= (-18.79 + \mathrm{j}4.775)\ \mathrm{kV} \\ &= (19.38\angle 165.7^\circ)\ \mathrm{kV} \end{aligned}$$

となる．これらを用いて E をフェーザ形式でもとめてみると，

$$\begin{aligned} E = V + \Delta V &= (-8.79 + \mathrm{j}4.775)\ \mathrm{kV} \\ &= (10.00\angle 151.5^\circ)\ \mathrm{kV} \end{aligned}$$

となり，E と V の位相差が先ほどの解よりも著しく大きくなっていることがわかる．

課題

負荷の電圧変動とその補償 (計算練習 2) [4]

上の課題では，負荷の電圧の大きさを電源の電圧の大きさと同じにするような措置を講じると，完璧ではないが力率も改善されることを確認した．では，力率を 1 にすることを優先したら，負荷の電圧の大きさと電源の電圧の大きさの違いはどのようになるだろうか？

略解

$Q_{\mathrm{C}} = -Q$，即ち，$Q_0 = 0$ とすれば自動的に力率は 1 になる．従って，このときの負荷電圧の大きさ $|V|$ を求めればよい．式 (6.30)，式 (6.31) より，

$$\begin{aligned} A &= R_{\mathrm{S}}P = 1.960\ \mathrm{kV}^2 \\ B &= X_{\mathrm{S}}P = 9.805\ \mathrm{kV}^2 \end{aligned}$$

である．これらと $|E| = 10\ \mathrm{kV}$ を用いて式 (6.32) を解くと，

$$|V|^2 = 95.03\ \mathrm{kV}^2 \ \rightarrow\ |V| = 9.748\ \mathrm{kV}$$

となる．電源 $|E| = 10\ \mathrm{kV}$ と比較すると，約 0.252 kV の電圧降下となり，もとの 10 kV に対して 2.5% の電圧降下ということになる．

従って，もしも，2.5% 程度の電圧降下ならば負荷が適切に動作する許容範囲内である，というのであれば，負荷電圧の大きさを電源と同じにすることを優先するよりは，むしろ力率を 1 にする方を優先した方がよい，ということになる．

ちなみに，このときの ΔV を求めて見ると，以下のようになる．

$$\Delta V_R = 0.2010\ \mathrm{kV}, \quad \Delta V_X = 1.006\ \mathrm{kV}.$$

より，

$$\begin{aligned}\Delta V &= (0.2010 + \mathrm{j}1.006)\ \mathrm{kV}\\ &= (1.026\angle 78.70^\circ)\ \mathrm{kV}\end{aligned}$$

従って，電源 E をフェーザで書けば，

$$\begin{aligned}E = V + \Delta V &= (9.949 + \mathrm{j}1.006)\ \mathrm{kV}\\ &= (10.00\angle 5.773^\circ)\ \mathrm{kV}\end{aligned}$$

となる．

また，このときの負荷に流れる電流 I_L は，$V = 9.748$ kV であるから，

$$\begin{aligned}I_L = \frac{P - \mathrm{j}Q}{|V|} &= (2.565 - \mathrm{j}5.129)\ \mathrm{kA}\\ &= (5.735\angle 63.43^\circ)\ \mathrm{kA}\end{aligned}$$

となる．追加されたコンデンサに流れる電流は，$Q_C = -Q$ としているので，この電流の虚数部の符号が反対になった電流となる．即ち，

$$I_C = +\mathrm{j}5.129\ \mathrm{kA}$$

となる．これらを考慮してフェーザ・ダイヤグラムを描けば，**図 6.14(c)** のようになる．

豆知識

送電線のインピーダンス

送電線は単なる電線であり，理想的な電線は抵抗ゼロである．しかし，そんなものは実存しない．従って，電線には必ず抵抗成分がある．電線の材料をアルミ (抵抗率 $\rho = 2.82 \times 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$)，電線断面積を $S = 20\ \mathrm{mm}^2$ (半径 $a = 2.54$ mm)，単位長さ (1 m) 当たりの抵抗 R_S は，

$$R_{S(1\,\mathrm{m})} = \rho\frac{1}{S} = 1.39 \times 10^{-3}\ \Omega/\mathrm{m}$$

となる[*8]．

更に，「大地を帰路とする電線」は，電磁気学的には，単位長さ (1 m) 当たりに，以下のインダクタンスを有する [6]．

$$L_{S(1\,\mathrm{m})} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\log\left(\frac{2h}{a}\right) + \frac{\mu_S}{4}\right\}. \tag{6.38}$$

ここで，log は自然対数，h は大地との距離，a は電線の半径，μ_S は電線の比透磁率 (アルミの場合，$\mu_S = 1$)，μ_0 は真空の透磁率 ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m) である．例えば，電線の材料がアルミで，電線の大地からの高さを $h = 30$ m，電線の半径を先ほどと同様に $a = 2.54$ mm とすると，

$$L_{S(1\mathrm{m})} = 2.04 \times 10^{-5}\ \mathrm{H/m}$$

となる．

一般に，電線業界では，1 km 当たりの抵抗やインダクタンスで表すので，

$$R_{S(1\,\mathrm{km})} = 1.39\ \Omega/\mathrm{km}, \quad L_{S(1\,\mathrm{km})} = 0.0204\ \mathrm{H/km}$$

となる．周波数が 60 Hz の関西の場合，$\omega = 2\pi f = 377$ rad/s であるから，上の値を抵抗とリアクタンスに直せば，

$$R_{S(1\,\mathrm{km})} = 1.39\ \Omega/\mathrm{km}, \quad X_{S(1\,\mathrm{km})} = 7.68\ \Omega/\mathrm{km} \tag{6.39}$$

となる．

先述の課題「負荷の電圧変動とその補償 (計算練習 2)」の電線のインピーダンスの値 $(0.0784 + \mathrm{j}0.3922)\ \Omega$ は，参考文献 [4] からとってきたものであるが，上記の結果で電線の長さを 50 m とすると，

$$R_{S(50\,\mathrm{m})} = 0.0696\ \Omega, \quad X_{S(50\,\mathrm{m})} = 0.384\ \Omega,$$

となり，おおよそ参考文献の値と同じくらいになり，そのような長さの電線を想定した問題なのだなぁ，と推測することができる．

[*8] この例題の電線の材料を銅からアルミに変えました．なぜなら，銅の密度が 8.94 g/cm^3 であるのに対し，アルミの密度は，2.70 g/cm^3 と軽いため，長い架線に使う材料としては，軽いアルミの方が適するからです．現在の架線のほとんどはアルミが採用されています [5]．本テキストの古い版をご覧になった方は，銅が例題の材料として挙げられていたことから「このおっさん，わかっとらんなぁ」と思ったかもしれません．スミマセンでした (2017-05-30).

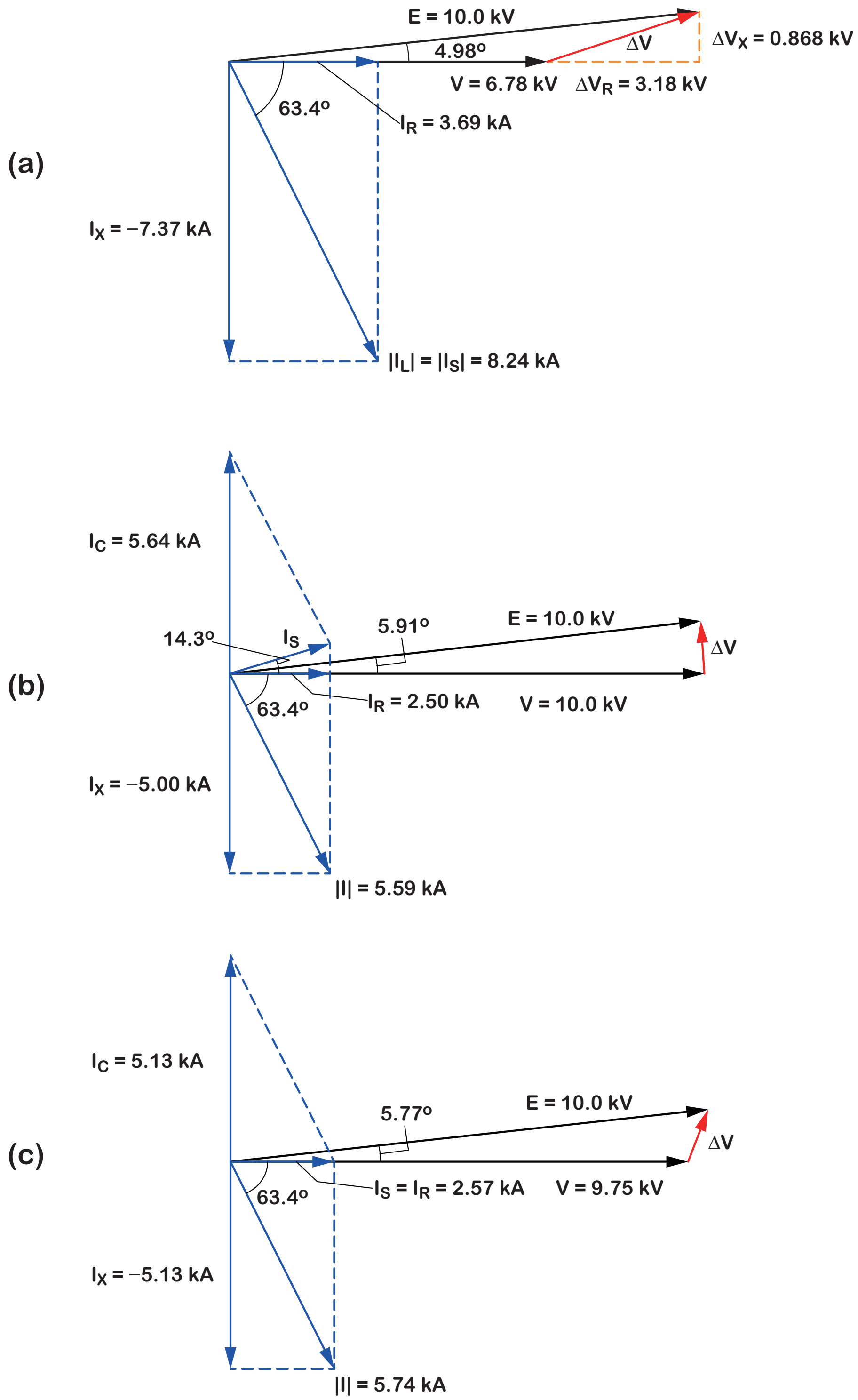


図 6.14 (a) 補償無効電力がない場合の電源電圧，負荷電圧，電流のフェーザ・ダイヤグラム．(b) 負荷電圧の大きさを電源と同じにすることを優先した補償無効電力がある場合の電源電圧，負荷電圧，電流のフェーザ・ダイヤグラム．(b) 力率を 1 にすることを優先した補償無効電力がある場合の電源電圧，負荷電圧，電流のフェーザ・ダイヤグラム．

事前基盤知識確認事項

[1] 交流電力の瞬時値を表す式

第 6.1 節の課題とする.

略解

第 6.1 節の課題の略解を見よ.

事後学習内容確認事項

1. 複素電力の計算

$V = 10\angle 0°$ V, $I = 50\angle 60°$ A のとき，複素電力 S をフェーザ形式 (極座標形式) で書け．皮相電力 $|S|$ を求めよ．

略解

$$\begin{aligned} S &= V I^* = (10\angle 0°)(50\angle -60°) \\ &= (500\angle -60°) \text{ VA} \end{aligned}$$

$$|S| = 500 \text{ VA}$$

複素電力と皮相電力の単位が VA であることに注意されたし．

2. 力率の計算

力率を % で表せ．

略解

$$\begin{aligned} \cos(-60°) &= 0.5 \\ &= 50.0\% \end{aligned}$$

3. 有効電力の計算

有効電力 P を求めよ．

略解

$$\begin{aligned} P &= |S|\cos(-60°) = 500 \times 0.5 \\ &= 250 \text{ W} \end{aligned}$$

有効電力の単位が W であることに注意されたし．

参考文献

[1] C. K. Alexander and M. N. O. Sadiku: *Fundamentals of Electric Circuits 5th Ed.* (McGraw-Hill, New York, NY, 2013) pp. 483–484.

[2] S. Tumanski: *Principles of Electrical Measurement* (Taylor & Francis, New York, NY, 2006) Chapter 3 *Classic electrical measurement*, pp. 73-119.

[3] 関西電力株式会社: 電気供給約款 (平成 27 年 6 月 1 日実施) (関西電力株式会社, 大阪, 2015) p. 28. http://www.kepco.co.jp/home/ryoukin/contract/

[4] T. J. E. Miller: in *Reactive Power Control In Electric Systems*, Ed. Timothy J. E. Miller (John Wiley & Sons, New York, NY, 1982) Chapter 1 *The theory of load compensation*, pp. 1–48.

[5] 中島 勝久: 最近のアルミニウム系導電材料, 電気学会雑誌 93, 257-264 (1973).

[6] 後藤 憲一, 山崎 修一郎: 詳解 電磁気学演習 (共立出版, 東京, 1970) p. 276.

第 7 章

共振回路

今までは，ω はいつも同じであった．ここでは，

- ω が変化する，
- 異なる ω の波形が関与する，

という状況を取り扱い，「共振」について学ぶ．

7.1 電気回路における「共振」とは？

電気回路における「共振」とは，

電圧や電流がある周波数で極値をとる

ことを言う．

以下では，この「共振」とは何なのか，何故そうなるのか，何に使うのか，を具体例を扱うことによって，より詳しく説明する．その前に，まず，本章の要を述べる．

7.2 本章の要 (共振周波数と Q 値)

図 7.1 のように，あるインピーダンスが周波数 ω の電源に接続されているものとし，そのインピーダンスを $Z = R + \mathrm{j}X$ であるとする．インピーダンスの絶対値 $|Z|$，もしくは，その逆数であるアドミタンスの絶対値 $1/|Z|$ を周波数に対してプロットすると，**図 7.2** のように，ある周波数 ω において極値をとることがある．**図 7.2** では極値が極大となるアドミタンスの絶対値をプロットしたが，インピーダンスの絶対値をプロットすると，極値が極小となる．インピーダンス，或いはアドミタンスが極値をとれば，自動的に電圧，或いは電流が極値を取ることになる．従って，「共振しているとき」とは，インピーダンス，または，アドミタンスが極値をとるとき，と言い換えてもよい．

本章で学ぶ事項の第一点目は，

インピーダンスが極値を持つのはその虚部が 0 となるときである，

ということである．第二点目は，

応用上，極大 (または極小) 特性の鋭さが重要であり，その鋭さを表すために Q 値という指標を使う，

ということである．

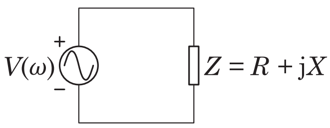


図 7.1 周波数 ω の電源に接続されたインピーダンス Z．

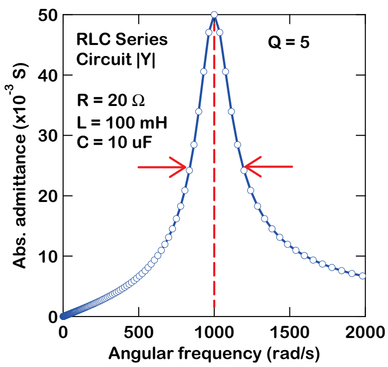
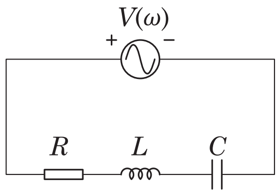


図 7.2 アドミタンスの大きさ (絶対値) が極値をもつ特性の一例．具体的には，$R = 20\ \Omega$，$L = 100$ mH，$C = 10$ μF の直列回路のアドミタンスの大きさ (絶対値) の周波数依存性である．



$$Z_\mathrm{s} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

図 7.3 RLC 直列共振回路.

7.3 直列共振回路とその周波数特性

7.3.1 直列共振回路

L と C が直列接続された回路は共振特性を持ち，その回路を直列共振回路という．一般的には，抵抗成分も含めて，**図 7.3** に示すような回路になる．この回路では，電圧源が与えられている．フェーザ形式の電圧の絶対値 $|V|$ が一定であるならば (普通はそうである)，インピーダンスの周波数依存性によって極値をとるのは電流である．回路のインピーダンスを Z_s とすると，

$$I = \frac{V}{Z_\mathrm{s}} \tag{7.1}$$

であるから，インピーダンスが極小なら電流が極大，インピーダンスが極大なら電流が極小となる．計算すればわかるが，この回路の場合には，インピーダンスが極小となる，即ち，アドミタンス $Y_\mathrm{s} = 1/Z_\mathrm{s}$ が極大となる[*1].

そこで，インピーダンス Z_s の絶対値 $|Z_\mathrm{s}|$ が極小になる，即ち，アドミタンス Y_s の絶対値 $|Y_\mathrm{s}|$ 極大になる条件を求めよう．Z_s は,

$$Z_\mathrm{s} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{7.2}$$

である．この式から，Z_s の j( ) の中，即ち，Z_s の虚部がゼロになるときに $|Z_\mathrm{s}|$ が極小値 (=R) となることがわかる．Z_s の虚部がゼロになる周波数を ω_0 とすると，次式が成り立っていることになる.

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0. \tag{7.3}$$

[*1] なお，上記特徴等を述べるときに「極大」「極小」というコトバを用いたが，本章の回路では全周波数帯域において「極大」または「極小」が一つしかないので「最大」または「最小」と読み替えても問題ない.

これより，共振周波数が L と C によって以下のように表されることがわかる.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{7.4}$$

上記の周波数 (厳密に言えば角周波数) を普通の周波数で表せば，以下のようになる.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{7.5}$$

7.3.2 直列共振回路の周波数特性の特徴

以上をまとめると，直列共振回路の特徴は以下の通りとなる.

- 共振周波数は $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ である．このとき,
- Z_s の虚部がゼロになる.
- $|Z_\mathrm{s}|$ が極小値 R となる.
- $|Y_\mathrm{s}|$ が極大値 $1/R$ となる.
- $|I|$ が極大値 $|V|/R$ となる.

7.3.3 直列共振回路の周波数特性の具体例

具体的に R, L, C の値を与えて，直列共振回路のインピーダンスとアドミタンスの大きさの周波数依存性を図示してみよう．ここでは，$L = 100$ mH，$C = 10$ μF とする．共振周波数は R によらないので，L と C を定めた時点で共振周波数が決まり,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-6}}} \tag{7.6}$$

$$= 1000 \text{ rad/s} \tag{7.7}$$

となる．**抵抗 R は共振周波数にはなんら影響を及ぼさないが，後述のように，その大小が共振特性に重大な影響を及ぼす**．そこで，R については幾つかの値を試した．具体的には，0 Ω，10 Ω，20 Ω 及び 50 Ω の 5 種類を試した.

以上の条件設定の下で計算したアドミタンスの周波数依存性を**図 7.4** に示す．この図から，R によらず $\omega_0 = 1000$ rad/s にてアドミタンスの絶対値 $|Y_\mathrm{s}|$ が極大値を取っていることがわかる．異なる R を用いた効果として目に見えてわかる点は，以下の二点かと思う.

- 直列共振時のアドミタンスの絶対値が異なる.
- **直列共振特性のピークのシャープさが低抵抗ほどシャープである**.

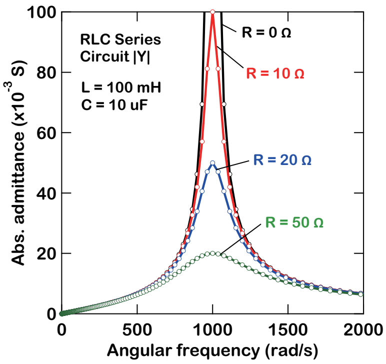


図 7.4 RLC 直列共振回路のアドミタンス (の絶対値) の周波数特性.

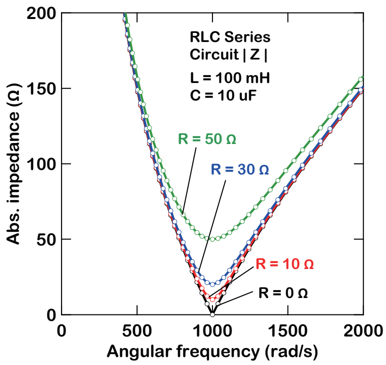


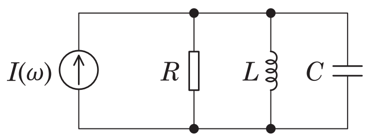
図 7.5 RLC 直列共振回路のインピーダンス (の絶対値) の周波数特性.

この二つの特徴のうち，後者が応用上極めて重要な点となる．このシャープさを定量的に評価するために Q 値なるパラメータを定義するのだが，これについては，並列共振周波数について述べた後に定義をすることにする．

7.4 並列共振回路とその周波数特性

7.4.1 並列共振回路

L と C が並列接続された回路も共振特性を持ち，その回路を並列共振回路という．一般的には，抵抗成分も含めて，**図 7.6** に示すような回路になる．この回路では，電流源が与えられている．フェーザ形式の電流の絶対値 $|I|$ が一定であるならば (普通はそうである)，インピーダンスの周波数依存性によって極値をとるのは電圧である．回路のインピーダンスを Z_p とすると，



$$Y_p = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

図 7.6 RLC 並列共振回路.

$$V = Z_p I \tag{7.8}$$

であるから，インピーダンスの大きさが極小になれば，電圧の大きさが極小となり，インピーダンスの大きさが極大になれば，電圧の大きさが極大となる．計算するとわかるが，この回路の場合には，インピーダンスの大きさが極大となる．即ち，アドミタンス $Y_p = 1/Z_p$ の大きさ $|Y_p|$ が極小となる．

そこで，アドミタンスの絶対値 $|Y_p|$ が極小となる条件を求めよう．Y_p は，

$$Y_p = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \tag{7.9}$$

である．この式から Y_p の j( ) の中，即ち Y_p の虚部がゼロになるときに $|Y_p|$ が極小値 (=$1/R$) となることがわかる．Y_p の虚部がゼロになる周波数を ω_0 とすると，次式が成り立っていることになる．

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0 \tag{7.10}$$

これより，共振周波数が L と C によって，以下のように表されることがわかる．

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{7.11}$$

上記の周波数 (厳密に言えば角周波数) を普通の周波数に直せば，以下のようになる．

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{7.12}$$

既に導出した直列共振回路の共振周波数の式と今回導出した並列共振周波数の式を見比べてみると，両方ともに同じ式となっていることがわかる．

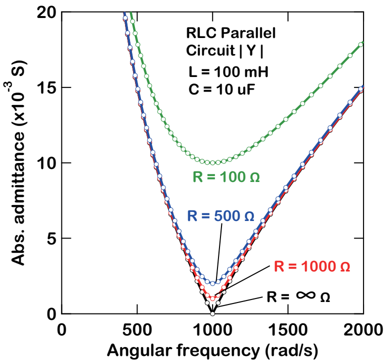


図 7.7 RLC 並列共振回路のアドミタンス (の絶対値) の周波数特性．

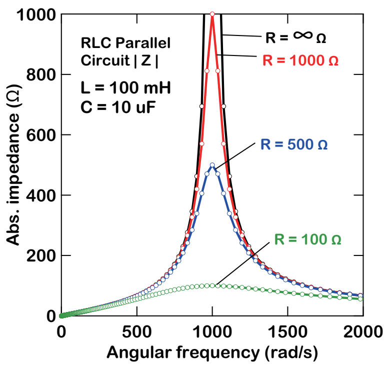


図 7.8 RLC 並列共振回路のインピーダンス (の絶対値) の周波数特性．

7.4.2　並列共振回路の周波数特性の特徴

以上をまとめると，並列共振回路の特徴は以下の通りとなる．

- 共振周波数は $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ である．
- $|Y_\mathrm{p}|$ が極小値 $1/R$ となる．
- $|Z_\mathrm{p}|$ が極大値 R となる．
- $|V|$ が極大値 $R|I|$ となる．

7.4.3　並列共振回路の周波数特性の特徴

具体的に R, L, C の値を与えて，並列共振回路のインピーダンスとアドミタンスの大きさの周波数依存性を図示してみよう．ここでは，$L = 100$ mH，$C = 10\ \mu$F とする．共振周波数は R によらないので，L と C を定めた時点で共振周波数が決まり，

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-6}}} \tag{7.13}$$

$$= 1000 \text{ rad/s} \tag{7.14}$$

となる．**抵抗 R は共振周波数にはなんら影響を及ぼさないが，後述のように，その大小が共振特性に重大な影響を及ぼす**．そこで，R については幾つかの値を試した．具体的には，100 Ω，500 Ω，1000 Ω 及び ∞ Ω の 5 種類を試した．

以上の条件設定の下で計算したアドミタンスの周波数依存性を**図 7.7** に示す．この図から，R によらず $\omega_0 = 1000$ rad/s にてアドミタンスの絶対値 $|Z_\mathrm{p}|$ が極大値を取っていることがわかる．異なる R を用いた効果として目に見えてわかる点は，以下の二点かと思う．

- 並列共振時のアドミタンスの絶対値が異なる．
- **並列共振特性のピークのシャープさが高抵抗ほどシャープである**．

この二つの特徴のうち，後者が応用上極めて重要な点となる．このシャープさを定量的に評価するために Q 値なるパラメータを定義するが，その前に，共振特性の鋭さがなぜ重要なのか，について少し触れておく．

7.5　共振回路の性質と用途

もう一度，直列共振回路と並列共振回路の性質をまとめると，以下のようになる．

- **直列共振回路**
  - 共振回路に交流電圧を印加すると，
  - $|I| = |Y_\mathrm{s}||V|$ が極大値をとり，
  - 共振周波数の時に電流が極めて良く流れる
- **並列共振回路**
  - 共振回路に交流電流を流すと，
  - $|V| = |Z_\mathrm{p}||I|$ が極大値をとり，
  - 共振周波数の時に電圧が極めて大きくなる

これらの性質を利用すると，**図 7.9** に示すように，複数の周波数成分が混在した信号からある周波数成分だけを取り出すことに利用することができる[*2]．そうした

[*2] これを理解するためには，まず，「複数の周波数成分が混在した信号」というものがどんなものであるのかや，任意の波形を表

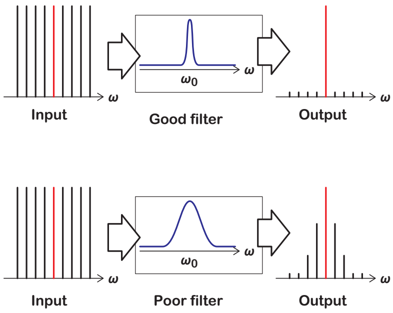


図 7.9 周波数選別に用いられるフィルタの機能と，共振特性の鋭さの良否がその性能に及ぼす影響．

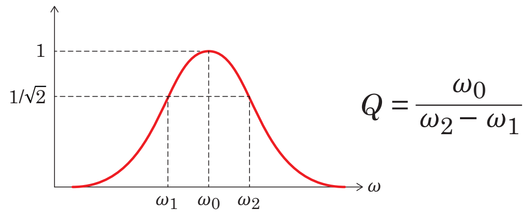


図 7.10 共振特性の鋭さを表す Q 値の定義．

機能は，通信機器などに含まれる同調回路やフィルタ回路として利用される．このような用途に共振回路を用いる場合，共振特性がシャープではなく幅をもったものになると，ある周波数の信号だけを取り出したいのに，その周波数に近い成分も同時に取り出されてしまう．従って，ある周波数を選別するという目的 (現実にはその目的が最も多い) に限定すれば，

> **共振特性はシャープなほど良い，**

ということが出来る．

共振周波数特性の鋭さを「鋭い」「鋭く無い」などのコトバで文学的に表現するのではなく，何らかの統一されたルールで求めた数値で示し，共振回路特性の良さを共通の土俵で比較できる指標が必要である．次の節では，この共振特性の鋭さを表すための指標として「Q 値 (Quality Factor)」なるものを定義する．

7.6 Q 値 (Quality Factor)

ある物理量に対して**図 7.10** のような共振特性があるとき，共振の鋭さを表すための指標として Q 値を以下のように定義する．「ある物理量」としては，インピーダンス，アドミタンス，電圧，電流などが想定される．

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}. \tag{7.15}$$

ここで，ω_0 は共振特性の中心周波数，即ち共振周波数である．ω_1，ω_2 は，その物理量が，共振周波数のときの値の $1/\sqrt{2}$ の大きさになる周波数であり，共振周波数よりも低周波数側にある方を ω_1，共振周波数よりも高周波数側にある方を ω_2 としている．

7.7 RLC 直列共振回路の Q 値と R の関係

図 7.11 は，$L = 100$ mH，$C = 10\ \mu$F，$R = 10\ \Omega$，$20\ \Omega$，$50\ \Omega$ の RLC 直列共振回路のアドミタンスの周波数特性である．同図からわかるように，

> **RLC 直列共振回路の鋭さは，抵抗値 R が小さいほど鋭い．即ち，抵抗値 R が小さいほど Q 値が大きい．**

この例の場合には，$R = 10\ \Omega$，$20\ \Omega$，$50\ \Omega$ に対して，$Q = 10, Q = 5, Q = 2$ となっている．

7.8 RLC 並列共振回路の Q 値と R の関係

図 7.12 は，$L = 100$ mH，$C = 10\ \mu$F，$R = 1000\ \Omega$，$500\ \Omega$，$100\ \Omega$ の RLC 並列共振回路のインピーダンスの周波数特性である．同図からわかるように，

> **RLC 並列共振回路の鋭さは，抵抗値 R が大きいほど鋭い．即ち，抵抗値 R が大きいほど Q 値が大きい．**

この例の場合には，$R = 1000\ \Omega$，$500\ \Omega$，$100\ \Omega$ に対して，$Q = 10$，$Q = 5$，$Q = 1$ となっている．

7.9 Q 値と抵抗の大きさ

前節において，共振特性のピークの鋭さと R の間には何らかの関係があることを示した．また，その鋭さを表す数値的指標である Q 値も当然ながら R との間に何らかの関係がある．結論から先に述べると，以下の関係

すことのできるフーリエ級数展開の理論を知っておく必要があるので，本章の付録に記した．

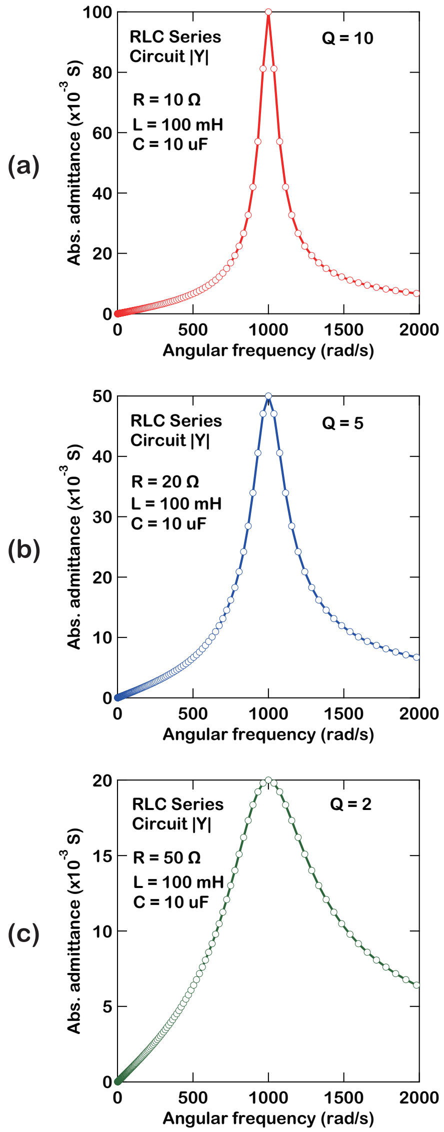


図 7.11 コイル (L = 100 mH) とコンデンサ (C = 10 μF) の直列接続回路に異なる抵抗値の抵抗 (R = 10 Ω, 20 Ω, 50 Ω) が直列接続されている回路の共振特性.

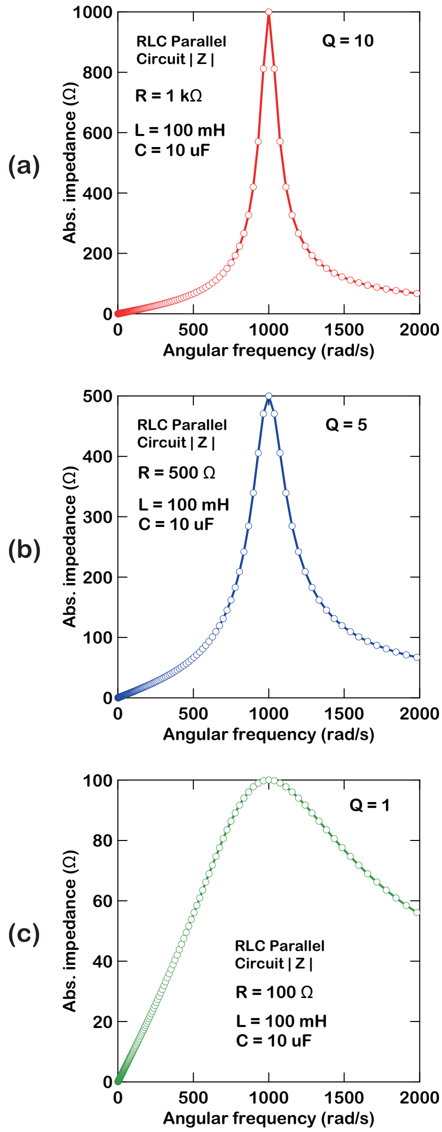


図 7.12 コイル (L = 100 mH) とコンデンサ (C = 10 μF) の並列接続回路に異なる抵抗値の抵抗 (R = 1000 Ω, 500 Ω, 100 Ω) が並列接続されている回路の共振特性.

があるのである．これらの関係の導出過程については，単純作業であるが，大変長くなるので，章末に課題としてまとめた．各自にて確認すること．

- **RLC 直列共振回路の Q 値**は次式で与えられる．

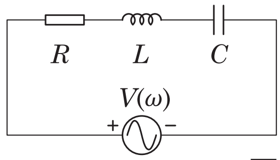
$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{7.16}$$

- **RLC 並列共振回路の Q 値**は次式で与えられる．

$$Q = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{7.17}$$

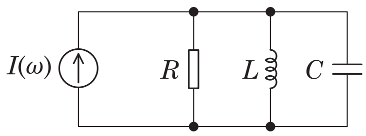
7.10 直列共振回路，並列共振回路の抵抗成分について

これまでに，**図 7.13** に示した RLC 直列共振回路と**図 7.14** に示した RLC 並列共振回路について，その共振周波数や共振特性の鋭さを表す Q 値を表す式の導出を行ってきた． その結果，Q 値が大きい，即ち，共振特性が鋭い回路を作るためには，以下のような回路を作ればよい，ということを示した．



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

図 7.13 RLC 直列共振回路と共振周波数 ω_0 及び Q 値を表す式.



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

図 7.14 RLC 並列共振回路と共振周波数 ω_0 及び Q 値を表す式.

- **直列共振回路では，R は小さい方がよい**（究極の状態は直列接続された抵抗が無い状態：$R = 0\ \Omega$）
- **並列共振回路では，R が大きい方がよい**（究極の状態は並列接続された抵抗が無い状態：$R = \infty\ \Omega$）

ということは，

> 最初から抵抗なんか接続せずに，LC 直列共振回路，LC 並列共振回路にすればよい

のである．そうすれば共振特性の鋭さを表す Q 値は無限大となり，究極の鋭さを持つ回路を作ることができる[*3].

では，なぜ，わざわざ抵抗の入った回路について勉強したのか？その理由は，

> **現実の回路素子を用いた場合には，コイルとコンデンサだけを接続したつもりでも，必ず抵抗成分が存在する**

からである．これについて，次節で説明する．

[*3] そのような回路を第 6 章の共振回路の紹介の節で既に示してある

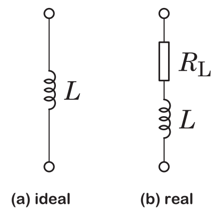


図 7.15 コイルの理想と現実.

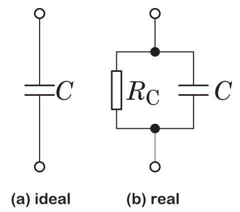


図 7.16 コンデンサの理想と現実.

7.11 コイルとコンデンサの理想と現実

コイル，コンデンサと思って回路素子をつなげても実際のコイルとコンデンサには，**図 7.15**，**図 7.16** に示すように，抵抗成分が含まれている．抵抗成分のあるコイルやコンデンサを損失のあるコイル，損失のあるコンデンサという言い方をする．

7.11.1 現実のコイルに内在する抵抗成分

コイルに内在する抵抗は，コイルの導線の抵抗成分である．導線は電流を流すことを目的としたものであるから，その抵抗成分は回路素子として利用される抵抗の抵抗値と比較すると極めて小さいものになっているがゼロではない．共振回路の特性を考えるときには，この小ささいがゼロではない抵抗成分が無視できないのである．

具体的に販売されているコイルの特性をカタログをみて確認してみよう．**図 7.17** は，TDK が販売しているコイルのカタログの一部である [1]．コイルのカタログであるから，インダクタンスがいくらか，という表が示されているが，同時に直流抵抗成分も記されていることを確認することができる．例えば，1 mH のインダクタンスの場合には，約 1 Ω の抵抗成分が含まれていることがわかる．

電気的特性

インダクタンス (μH)	インダクタンス 許容差	直流抵抗 (Ω)max.
10	±10%	0.019
15	±10%	0.022
22	±10%	0.031
33	±10%	0.044
47	±10%	0.059
68	±10%	0.073
100	±10%	0.1
150	±10%	0.15
220	±10%	0.26
330	±10%	0.32
470	±10%	0.48
680	±10%	0.73
1000	±10%	0.96
1500	±10%	1.4
2200	±10%	2.5
3300	±10%	3.3
5600	±10%	6.4

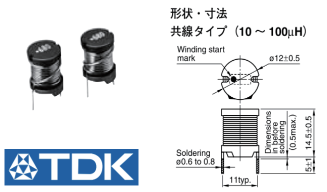


図 **7.17** 現実のコイル (TDK) [1].

品番	交流定格電圧 (Vac)	温度特性	静電容量 (pF)
DEJE3E2102Z□□□	250	E	1000 +80/-20%
DEJE3E2222Z□□□	250	E	2200 +80/-20%
DEJE3E2332Z□□□	250	E	3300 +80/-20%
DEJE3E2472Z□□□	250	E	4700 +80/-20%
DEJF3E2472Z□□□	250	F	4700 +80/-20%
DEJF3E2103Z□□□	250	F	10000 +80/-20%

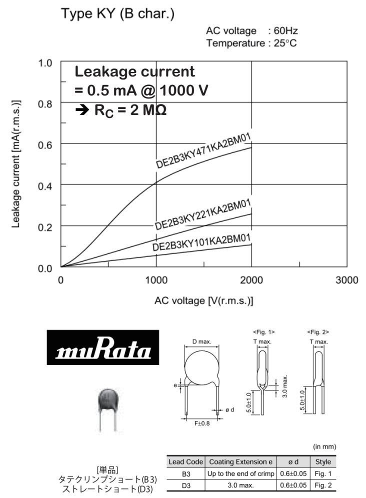


図 **7.18** 現実のコンデンサ (村田製作所) [2].

7.11.2　現実のコンデンサに内在する抵抗成分

コンデンサに内在する抵抗は，コンデンサの漏れ電流成分によるものである．コンデンサは二つの電極を向かい合わせたものであり，理想的コンデンサは直流的には絶縁体であるはずである．しかし，実際にコンデンサを作ると，電極間を直流電流が流れてしまうのである．この直流電流が流れてしまう，という状況を回路で表すと，理想的なコンデンサと並列に抵抗成分がある，という形で表される．この漏れ電流は極めて微々たるものであるが，現実的には，ゼロにすることができない．これを並列抵抗成分の値で言い表せば，並列抵抗成分は極めて大きいが，無限大にはできない，となる．

具体的に販売されているコンデンサの特性をカタログをみて確認してみよう．図 **7.18** は，村田製作所が販売しているコンデンサのカタログの一部である [2]．コンデンサのカタログであるから，キャパシタンスがいくらか，という表が示されているが，同時に印加電圧に対する漏れ電流がいくらか，という情報も記されていることが確認できる．**1000 V** 印加時に漏れ電流が **0.5 mA** 程度あるということは，約 **2 MΩ** の並列抵抗成分がある，ということを意味する．

7.12　現実の LC 共振回路の RLC 等価回路

現実に売られているコイルとコンデンサだけを接続した回路であっても，抵抗成分が潜んでいることを既に述べた．ここでは，その抵抗成分を考慮すると，以下のようにすることができる，ということを述べる．

- 現実の LC 直列回路は，図 **7.19** に示すように，等価的に RLC 直列共振回路にすることができる．
- 現実の LC 並列回路は，図 **7.20** に示すように，等価的に RLC 並列共振回路にすることができる．

このことを示すためには，多少準備が必要となる．そのため，以下の二つの節ではその準備を行い，その後，本番の説明を行う．

7.12.1　コイルとコンデンサの Q_X 値の定義

Q 値は，共振回路全体に対して定義されたものであったが，ここでは，コイルとコンデンサの単独の場合の Q_X 値を定義する．

図 **7.15** に示したようなコイルの場合，コイルの Q_X

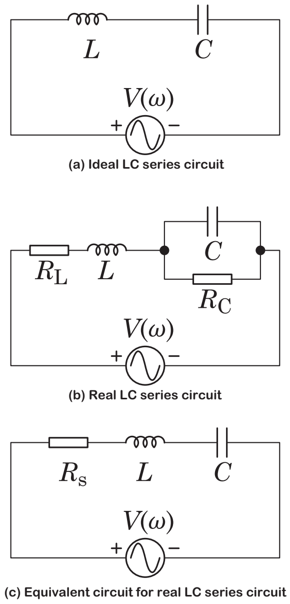


図 7.19 (a) 理想的な LC 直列回路，(b) 現実の LC 直列回路，(c) 現実の LC 直列回路の等価回路.

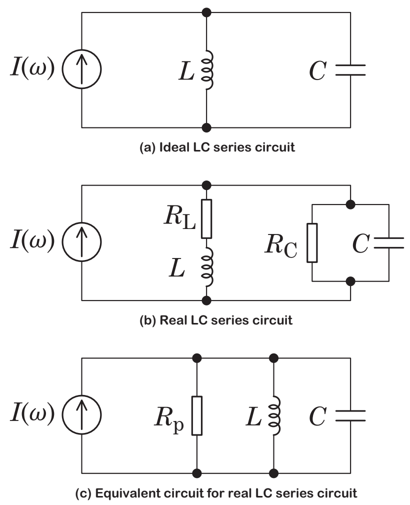


図 7.20 (a) 理想的な LC 並列回路，(b) 現実の LC 並列回路，(c) 現実の LC 並列回路の等価回路.

値は，以下のように定義されている.

$$Q_{\mathrm{L}} = \frac{|\,\text{リアクタンス成分}\,|}{\text{抵抗成分}} = \frac{\omega L}{R_{\mathrm{L}}}. \tag{7.18}$$

図 7.16 に示したようなコンデンサの Q_{X} 値は，以下のように定義されている.

$$Q_{\mathrm{C}} = \frac{|\,\text{サセプタンス成分}\,|}{\text{コンダクタンス成分}} = \frac{\omega C}{G_{\mathrm{C}}}. \tag{7.19}$$

ここで，$G_{\mathrm{C}} = 1/R_{\mathrm{C}}$ である.

共振回路全体の Q 値は，周波数 ω によらず，L，C，R だけで決まる定数であった．これに対し，ここで定義したコイルやコンデンサの単独の Q_{X} 値は，式からわかるように，一般的には ω に依存する.

しかし，ここで定義した Q_{X} 値は，ほとんどの場合，共振周波数 ω_0 の近傍だけの議論で用いる．そのため，議論する周波数帯域を共振周波数の近傍だけに限定し，有効数字が 2 ~ 3 桁の議論であれば (普通はそうである)，ω を ω_0(一定) としてしまっても全く問題が無い[*4]．即ち，上記のように限定されれば，Q_{X} 値を以下のようにしてしまってもよいのである.

$$Q_{\mathrm{L}} = \frac{\omega_0 L}{R_{\mathrm{L}}}, \tag{7.20}$$

$$Q_{\mathrm{C}} = \frac{\omega_0 C}{G_{\mathrm{C}}}. \tag{7.21}$$

以下では，このようにしてしまってもよい条件下での説明をする.

7.12.2 抵抗成分を有するリアクタンスの直列接続表現と並列接続表現の等価変換

現実のコイルには直列抵抗成分が，現実のコンデンサには並列抵抗成分が，それぞれ含まれている．従って，現実のコイルとコンデンサを**図 7.19**(a) や**図 7.20**(a) のように接続したつもりであっても，実際には，**図 7.19**(b) の**図 7.20**(b) のような等価回路で考えなければならない．この置き換えは，ほとんど頭を使う必要が無いので容易に理解できるであろう.

しかし，これらの回路を既に学んだ RLC 直列回路，RLC 並列回路にする，即ち，**図 7.19**(b) や**図 7.20**(b) を**図 7.19**(c) や**図 7.20**(c) にするためには，少し頭を使わねばならない.

即ち，現実の LC 直列回路を RLC 直列共振回路にするためには，並列抵抗成分を有するコンデンサを**図 7.21** に示すように等価な直列接続に変換をしなければならない．また，現実の LC 並列回路を RLC 並列共振回路にするためには，直列抵抗成分を有するコイルを**図 7.22**

[*4] 「問題が無い」とは，$x.xx \times 10^y$ と求められるべき数値があったとすると，その 4 桁目以降にしか影響を与えない (四捨五入の影響を考えると，厳密には 5 桁目以降となるかな)，ということを意味する．グラフ用紙に特性を描けば，描いた曲線の線の太さぐらいの影響しかない，ということである．工学ではこうした有効数字を考慮した具体的な近似の感覚を身につける必要があると思われる.

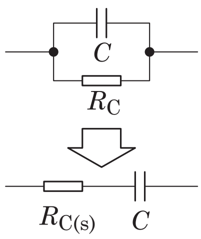


図 7.21 現実の LC 直列回路を RLC 直列回路で等価的に表すためには，並列抵抗成分を有するコンデンサを抵抗とコンデンサの直列回路に変換する必要がある.

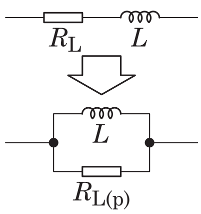


図 7.22 現実の LC 並列回路を RLC 並列回路で等価的に表すためには，直列抵抗成分を有するコイルを抵抗とコイルの並列回路に変換する必要がある.

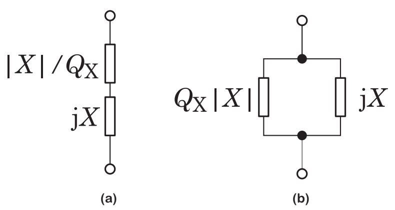


図 7.23 Q_{X} を用いた損失のある回路素子の等価回路.

に示すように等価な並列接続に変換をしなければならない.

以下では，この変換を近似を用いて行う手法について述べる．従って，厳密にいうと完璧な変換にはならない．しかし，後述するように，実用上は問題の無い変換ができるのである.

結論から先に言うと，抵抗成分のあるコイルやコンデンサを，近似的ではあるが**図 7.23** のように，直列・並列のどちらの回路でも等価的に表すことができるのである．このとき，便宜上 (すっきりと表すことができるので)，前節で導入した Q_{X} 値を使って抵抗成分を表している.

以下に，**図 7.23** (a), (b) に示した二つの回路が近似的に等価であることを示す．具体的には，**図 7.23** (b) に示した並列回路のインピーダンスが**図 7.23** (a) に示した直列回路のインピーダンスと同じになる，ということを示す.

図 7.23 (b) に示した並列回路のインピーダンスは,

$$Z = \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{j}X} + \dfrac{1}{Q_{\mathrm{X}}|X|}} = \frac{\mathrm{j}X}{1 + \mathrm{j}\dfrac{1}{Q_{\mathrm{X}}}\dfrac{X}{|X|}} \qquad (7.22)$$

となる．Q_{X} は本来 1 よりも十分に大きいはずであるから[*5]，$1/Q \ll 1$ となるはずである．また，$X/|X|$ の絶対値は 1 である．従って，$|w| \ll 1$ なる w についてなりたつ近似式

$$(1+w)^{-1} \simeq 1 - w \qquad (7.23)$$

を用いれば,

$$Z \simeq \mathrm{j}X\left(1 - \mathrm{j}\frac{X}{Q_{\mathrm{X}}|X|}\right) = \frac{|X|}{Q_{\mathrm{X}}} + \mathrm{j}X \qquad (7.24)$$

となる．この式を見れば，この式が表すインピーダンスの回路が**図 7.23** (a) になっていることはすぐにわかるであろう.

7.12.3 現実の LC 回路の等価的な RLC 回路への置き換え

前節のような変換を用いれば，**図 7.21** と**図 7.22** に示した変換が可能となる．即ち，**図 7.21** に示すように，並列抵抗成分を含む現実のコンデンサを等価的に直列抵抗とコンデンサで表したときの $R_{\mathrm{C(s)}}$ は，以下のようになる.

$$R_{\mathrm{C(s)}} = \frac{R_{\mathrm{C}}}{Q_{\mathrm{C}}^2}. \qquad (7.25)$$

また，**図 7.22** に示すように，直列抵抗成分を含む現実のコイルを等価的に並列抵抗とコイルで表したときの $R_{\mathrm{L(p)}}$ は，以下のようになる.

$$R_{\mathrm{L(p)}} = Q_{\mathrm{L}}^2 R_{\mathrm{L}}. \qquad (7.26)$$

従って，現実の LC 回路の抵抗成分を考慮した RLC 回路 (**図 7.19** と**図 7.20**) における R_{s} と R_{p} は，それぞ

[*5] 普通は，コイルの直列抵抗は ωL よりも十分小さく，コンデンサの並列抵抗は $1/\omega C$ よりも十分大きい．これが成り立たない周波数領域や回路素子定数の場合には，このような近似はできない.

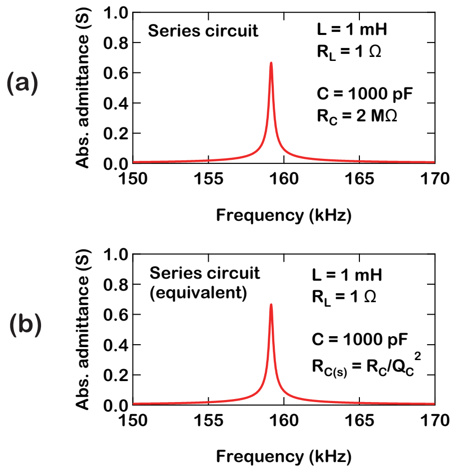


図 7.24 (a) 抵抗成分を持つ現実の LC 直列回路の近似無しの周波数特性と (b) それを等価的に RLC 直列回路に変換した回路の周波数特性.

れ，以下のようになる.

$$R_s = R_L + R_{C(s)} = R_L + \frac{R_C}{Q_C^2}, \tag{7.27}$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_{L(p)}} = \frac{1}{R_C} + \frac{1}{Q_L^2 R_L}. \tag{7.28}$$

即ち，上記のような抵抗成分を用いれば，既に学んだ RLC 直列・並列回路を用いて現実の LC 直列・並列回路を扱うことができるのである.

なお，注意して欲しい点は，上記の議論にて「はずである」が何度も出ていた点である．これはあくまでも近似であり，「はずである」が成り立たない条件下では，上記のような近似は出来ない，ということを理解しておいて欲しい.

「はずである」が成り立っている場合には，上記の近似が成り立つのであるが，本当に成り立っているかどうかを数値的に確認してみよう．確認のために用いた回路素子の定数は，先述の具体的なコイルとコンデンサのカタログ値から抜粋した．即ち，$L = 1$ mH，$R_L = 1$ Ω，$C = 1000$ pF，$R_C = 2$ MΩ である．共振周波数（角周波数）は，抵抗成分の有無にかかわらず，L と C だけで決まり，$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 10^6$ rad/s となる．普通の周波数に直せば，$f_0 = \omega_0/(2\pi) = 159$ kHz となる．従って，計算する周波数帯域は，この 160 kHz 近辺を計算すればよい.

図 7.24 (a) と (b) は，それぞれ，現実の LC 直列回路の周波数特性を近似無しで計算した結果と，**図 7.19** (c) に示したような等価回路に近似して計算した周波数特性である．両者を比較すれば，大差が無いことがわかる．また，**図 7.25** (a) と (b) は，それぞれ，現実の LC 並列回路の周波数特性を近似無しで計算した結果と，**図 7.20** (c) に示したような等価回路に近似して計算した周波数特性である．両者を比較すれば，この場合も，大差が無いことがわかる.

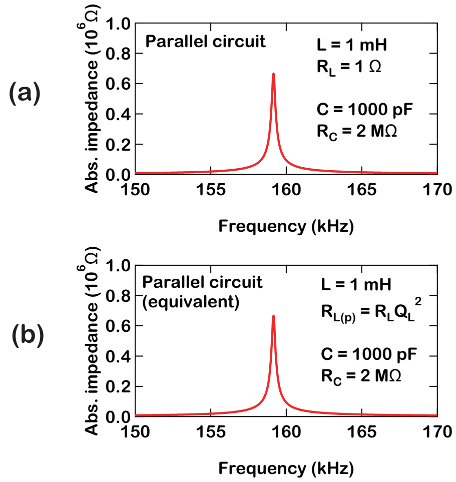


図 7.25 (a) 抵抗成分を持つ現実の LC 並列回路の近似無しの周波数特性と (b) それを等価的に RLC 並列回路に変換した回路の周波数特性.

課題

RLC 直列共振回路の Q と R，L，C の関係を導出せよ．

略解

回路全体のアドミタンスの大きさが，共振周波数 ω_0 における極大値 (最大値でもある) に対して $1/\sqrt{2}$ となる周波数 (角周波数) ω_1 と ω_2 を求め，Q 値の定義式 (7.15) 代入すればよい．

RLC 直列共振回路のインピーダンスの絶対値は，次式で与えられる．

$$|Z_\mathrm{s}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{7.29}$$

従って，アドミタンスの絶対値は，以下のようになる．

$$\begin{aligned} |Y_\mathrm{s}| &= \frac{1}{|Z_\mathrm{s}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \end{aligned} \tag{7.30}$$

共振周波数 ω_0 のときに，

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \tag{7.31}$$

となり，$|Y_\mathrm{s}|$ が極大値（最大値）をとる．その大きさは，

$$|Y_{\mathrm{s}0}| = \frac{1}{R} \tag{7.32}$$

となる．一方，Q の定義から，$\omega = \omega_1$，ω_2 のとき，

$$\frac{|Y_\mathrm{s}|}{|Y_{\mathrm{s}0}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{7.33}$$

であるから，このようになる ω_1 と ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) を求めて，Q の定義式に代入すればよい．

$|Y_\mathrm{s}|/|Y_{\mathrm{s}0}|$ を計算すると，

$$\begin{aligned} \frac{|Y_\mathrm{s}|}{|Y_{\mathrm{s}0}|} &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}\right)^2}} \end{aligned} \tag{7.34}$$

であるから，以下のようになる ω を求めればよい．

$$\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR} = \pm 1. \tag{7.35}$$

まず，

$$\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR} = +1 \tag{7.36}$$

となる ω を求めてみよう．上式を変形すると，

$$\omega^2 - \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0 \tag{7.37}$$

となる．この二次方程式の解を求めると，

$$\omega = \frac{1}{2}\left\{\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}\right\} \tag{7.38}$$

となる．ω が負の解は物理的には意味が無いので，ω が正となる解を選ぶことになる．上の解のうち ω が正となるのは，$\pm$ の符号が $+$ のときである．従って，上記の二次方程式の解のうち，物理的に意味のある解は，以下の一つとなる．

$$\omega = \frac{1}{2}\left\{\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}\right\}. \tag{7.39}$$

ここで，この ω が Q 値の定義式における ω_1 なのか，ω_2 なのかを判定しておく必要がある．そのためには，上式で表される ω が式 (7.4) で与えられる直列共振周波数 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ よりも大きいか，小さいか，を判定する必要がある．上式の $4/LC$ の 4 をルートの外に出すと，$1/\sqrt{LC}$ という式が現れるため，その判定がし易い．即ち，

$$\omega = \frac{1}{2}\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \tag{7.40}$$

となるので，この ω は $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ よりも大きい，ということがわかる．従って，この ω は，Q 値の定義における ω_2 の方である．即ち，

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}\right\} \tag{7.41}$$

となる．

次に，

$$\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR} = -1 \tag{7.42}$$

となる ω を求めてみよう (これが ω_1 になるはず)．先ほどと同様に上式を変形すれば，次式が得られる．

$$\omega^2 + \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0. \tag{7.43}$$

この二次方程式の解は，次式の通りである．

$$\omega = \frac{1}{2}\left\{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}\right\}. \tag{7.44}$$

先ほどと同様に，物理的に意味のある正の ω 選ぶことになる．この式では，± 符号の + の時に正の ω になることがわかる．従って，物理的に意味のある解は，以下の通りとなる．

$$\omega = \frac{1}{2}\left\{-\frac{R}{L}+\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2+\frac{4}{LC}}\right\}. \tag{7.45}$$

既に $\omega_2(>\omega_0)$ の方が求められているので，上式の ω が $\omega_1(<\omega_0)$ であろう，ということは容易に推測されるが，きちっと確かめてみよう．少しだけ式変形をすると，

$$\omega = -\frac{1}{2}\frac{R}{L}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{R}{L}\right)^2+\frac{1}{LC}} \tag{7.46}$$

となる．これより，この ω が $1/\sqrt{LC}$ よりも小さい，ということがわかる．即ち，この ω は Q 値の定義式の中の ω_1 の方となる．即ち

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left\{-\frac{R}{L}+\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2+\frac{4}{LC}}\right\} \tag{7.47}$$

となる．

以上の計算で得られた ω_1 と ω_2 を用いて $\omega_2-\omega_1$ を計算すると，

$$\omega_2-\omega_1 = \frac{R}{L} \tag{7.48}$$

となる．従って，これを Q 値の定義式 (7.15) に代入すれば，

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1} = \frac{\omega_0 L}{R} \tag{7.49}$$

となる．ここで，ω が共振周波数 ω_0 の場合には，

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \tag{7.50}$$

であることを利用すると，以下のようにも書くことができる．

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}. \tag{7.51}$$

また，式 (7.4) で示したように $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ であることを利用すれば，以下のように書くこともできる．

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{7.52}$$

課題

RLC 並列共振回路の Q と R，L，C の関係を導出せよ．

略解

RLC 並列共振回路のアドミタンスの絶対値は，次式で与えられる．

$$|Y_\mathrm{p}| = \sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2} \tag{7.53}$$

従って，インピーダンスの絶対値は，以下のようになる．

$$\begin{aligned}|Z_\mathrm{p}| &= \frac{1}{|Y_\mathrm{p}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}}.\end{aligned} \tag{7.54}$$

共振周波数 ω_0 のときに，

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0 \tag{7.55}$$

となり，$|Z_\mathrm{p}|$ が極大値（最大値）をとる．その大きさは，

$$|Z_\mathrm{p0}| = R \tag{7.56}$$

となる．一方，Q の定義から，$\omega=\omega_1$，ω_2 のとき，

$$\frac{|Z_\mathrm{p}|}{|Z_\mathrm{p0}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{7.57}$$

であるから，このようになる ω_1 と ω_2 $(\omega_1<\omega_2)$ を求めて，Q の定義式に代入すればよい．

$|Z_\mathrm{p}|/|Z_\mathrm{p0}|$ を計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{|Z_\mathrm{p}|}{|Z_\mathrm{p0}|} &= \frac{1}{R\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2 R^2}}\end{aligned} \tag{7.58}$$

であるから，以下のようになる ω を求めればよい．

$$R\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right) = \pm 1. \tag{7.59}$$

まず，

$$R\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right) = +1 \tag{7.60}$$

となる ω を求めよう．上式を変形すると，

$$\omega^2 LCR - \omega L - R = 0 \tag{7.61}$$

となる．この二次方程式の解を求めると，

$$\omega = \frac{1}{2LCR}\left\{L \pm \sqrt{L^2+4LCR^2}\right\} \tag{7.62}$$

となる．ω が負の解は物理的には意味が無いので，ω が正となる解を選ぶことになる．上の解のうち ω が正となるのは，$\pm$ の符号が $+$ のときである．従って，上記の二次方程式の解のうち，物理的に意味のある解は，以下の一つとなる．

$$\omega = \frac{1}{2LCR}\left\{L + \sqrt{L^2+4LCR^2}\right\}. \tag{7.63}$$

ここで，この ω が Q 値の定義式における ω_1 なのか，ω_2 なのかを判定しておく必要がある．そのためには，上式で表される ω が式 (7.11) で与えられる並列共振周波数 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ よりも大きいか，小さいか，を判定する必要がある．上式の $4/LC$ の 4 をルートの外に出すと，$1/\sqrt{LC}$ という式が現れるため，その判定がし易い．即ち，

$$\omega = \frac{1}{2CR} + \sqrt{\left(\frac{1}{2CR}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \tag{7.64}$$

となるので，この ω が $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ よりも大きい，ということがわかる．従って，この ω は，Q 値の定義における ω_2 の方である．即ち，

$$\omega_2 = \frac{1}{2LCR}\left\{L + \sqrt{L^2+4LCR^2}\right\} \tag{7.65}$$

となる．

次に，

$$R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = -1 \tag{7.66}$$

となる ω を求めよう (これが ω_1 になるはず)．先ほどと同様に上式を変形すれば，次式が得られる．

$$\omega^2 LCR + \omega L - R = 0. \tag{7.67}$$

この二次方程式の解は，次式の通りである．

$$\omega = \frac{1}{2LCR}\left\{-L \pm \sqrt{L^2+4LCR^2}\right\}. \tag{7.68}$$

先ほどと同様に，物理的に意味のある正の ω 選ぶことになる．この式では，$\pm$ 符号の $+$ の時に正の ω になることがわかる．従って，物理的に意味のある解は，以下の通りとなる．

$$\omega = \frac{1}{2LCR}\left\{-L + \sqrt{L^2+4LCR^2}\right\}. \tag{7.69}$$

既に $\omega_2(>\omega_0)$ の方が求められているので，上式の ω が $\omega_1(<\omega_0)$ であろう，ということは容易に推測されるが，きちっと確かめてみよう．少しだけ式変形をすると，

$$\omega = -\frac{1}{2CR} + \sqrt{\left(\frac{1}{2CR}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \tag{7.70}$$

となる．これより，この ω が $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ よりも小さい，ということがわかる．即ち，この ω が Q 値の定義式の中の ω_1 の方となる．即ち，

$$\omega_1 = \frac{1}{2LCR}\left\{-L + \sqrt{L^2+4LCR^2}\right\} \tag{7.71}$$

となる．

以上の計算で得られた ω_1 と ω_2 を用いて $\omega_2 - \omega_1$ を計算すると，

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{CR} \tag{7.72}$$

となる．従って，これを Q 値の定義式 (7.15) に代入すれば，

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \omega_0 CR \tag{7.73}$$

となる．ここで，ω が共振周波数 ω_0 の場合には，

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \tag{7.74}$$

であることを利用すると，以下のようにも書くことができる．

$$Q = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L}. \tag{7.75}$$

また，式 (7.11) で示したように $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ であることを利用すれば，以下のようにも書くことができる．

$$Q = \omega_0 CR = R\sqrt{\frac{C}{L}}. \tag{7.76}$$

豆知識

豆知識

「実用公式」

工学分野では，普段よく使う単位で表した数値を入れれば，普段よく使う単位の計算結果が得られる実用公式を使うことがある．LC 共振回路の共振周波数 (角周波数ではなく，普通の周波数) を求める実用公式としては，以下のものが教科書に紹介されている．

$$f_0 = \frac{5.033}{\sqrt{L[\mathrm{mH}]\,C[\mathrm{pF}]}}\ [\mathrm{MHz}] \tag{7.77}$$

豆知識

「損失率 d」

図 7.23 に示したような抵抗成分を有するリアクタンス (即ち，損失のあるリアクタンス) について，損失率 d なるものが次式で定義されている．

$$d = \frac{1}{Q_\mathrm{X}} \tag{7.78}$$

損失率 d は，近似的には複素電力の章で学んだ力率と同義である，ということが以下のようにして導かれる．

図 7.23 (a) に注目すると，このインピーダンスで消費される電力の力率は，次式で与えられる．

$$\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}} \tag{7.79}$$

ここで，$R = |X|/Q_\mathrm{X}$ とした．これを計算すると，

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{X^2}{R^2}}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+Q_\mathrm{X}^2\left(\dfrac{X}{|X|}\right)^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+Q_\mathrm{X}^2}}\end{aligned} \tag{7.80}$$

ここで，$Q_\mathrm{X} \gg 1$ であるから，以下のような近似ができる．

$$\cos\theta \simeq \frac{1}{\sqrt{Q_\mathrm{X}^2}} = \frac{1}{Q_\mathrm{X}} \tag{7.81}$$

豆知識

「なぜ $1/\sqrt{2}$？」

共振特性のピークの幅を定義するときに，なぜ「$1/\sqrt{2}$ になるところ」にするのであろうか？一般には，ピークの鋭さを表す指標を定義するときには，「1/2 になるところ」を使い，「**半値幅 (full width at half maximum: FWHM)**」と呼ばれている．電気回路では，電流，電圧，インピーダンス，アドミタンスなどが 1/2 になるところではなく，$1/\sqrt{2}$ になるところを使う．その理由は，

> 電気信号の FWHM を定義するときは，電圧や電流が 1/2 になる周波数を使って計算するよりも，電力が 1/2 になる周波数を使って計算した方が意味があるから，

である．

「電力が 1/2 になる周波数の方が意味がある」とはどういうことだろうか．電気信号によってある場所からある場所に情報伝送する場合を考えてみよう．このとき，情報伝送を担っている「ある物理量」が伝送されるが，その伝送される「ある物理量」とは，電圧や電流ではなく，それらの積で表される「電力」なのである[*6]．

従って，Q 値を議論するときに対象となる物理量が電力の場合には，

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}$$

における分母は，一般的な物理量の Q 値を計算するときと同様に，上述の「半値幅」が使われる．即ち，ω_1 と ω_2 は，対象とする電力が 1/2 になる周波数である．

一方，対象とする物理量が電圧，電流，インピーダンス，アドミタンスの場合には，それらは，電圧と電流の積で決まる電力という物理量の片方だけ（即ち電流だけ，もしくは電圧だけ）にしか対応していない．そのため，その共振特性は，情報伝送を担っている物理量（即ち，電力）の共振特性を正確に表したものにはならない．しかし，電力は電圧と電流のかけ算であるから，それが 1/2 になるときには，かけ算する前の V と I はそれぞれ $1/\sqrt{2}$ になる．従って，広がりの幅を計算するときの条件を「1/2 だけ下がるところ」ではなく，「$1/\sqrt{2}$ だけ下がるところ」に置き換えてあげれば，電圧か電流のどち

[*6] これについて説明すると長くなるので，他の書物等で確認して欲しい．

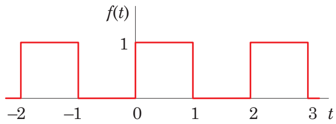


図 7.26 矩形波の例.

らかの共振特性だけからでも，電力の共振特性から得られるのと同じ Q 値を得ることができる．以上のような背景により，電圧や電流，インピーダンスやアドミタンスの周波数依存性から伝送される物理量の Q 値を計算するときは，計算式の分母（共振特性の広がり）を「〇〇が 1/2 になる周波数」を用いて計算するのではなく，「〇〇が $1/\sqrt{2}$ になる周波数」を用いて計算すべきである，という考え方になっている．

豆知識

「フーリエ級数展開」

任意の周期関数は，異なる周波数の三角関数の無限級数で表すことができる．

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \}. \quad (7.82)$$

或いは，等価な式として，以下のような表し方もある．

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n). \quad (7.83)$$

但し，

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (7.84)$$

$$\phi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right). \quad (7.85)$$

また，複素数を指数部に持つ指数関数で表す方式もある．

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}. \quad (7.86)$$

但し，

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = |c_n| \angle \phi_n, \quad (7.87)$$

$$|c_n| = \frac{A_n}{2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}, \quad (7.88)$$

$$\phi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right). \quad (7.89)$$

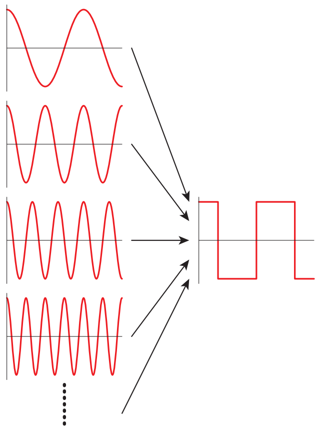


図 7.27 異なる周波数の sin 関数の足し合わせによる矩形波の合成の概念図.

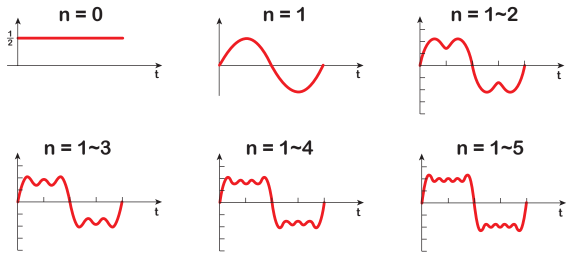


図 7.28 $n = 0$ と，$n = 1$ から $n = 5$ まで sin 関数の足し合わせをした計算結果.

例えば，**図 7.26** に示すような矩形波は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)\pi t] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(\pi t) + \frac{2}{3\pi} \sin(3\pi t) \\ &\quad + \frac{2}{5\pi} \sin(5\pi t) + \cdots \end{aligned} \quad (7.90)$$

概念的には，**図 7.27** に示したようなイメージである．

実際に，$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ まで足し算した結果を**図 7.28** に示す．足し合わせの上限が大きくなるに従い，矩形波に近づいていることがわかる．$n = 0$ も加えて $n = 10$ まで足し合わせれば，**図 7.29** のようになり，ほぼ矩形波を再現していることがわかる．

以上の例は，フーリエ級数展開の一例でしかない．フーリエ級数展開の理論を学べば，任意の周期的波形を異なる周波数の正弦波の級数和として表すことができる，ということを知ることになる．こうしたことを知る

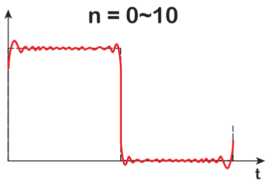


図 7.29 $n=0$ から $n=10$ まで sin 関数の足し合わせをした計算結果.

と，波形の特徴を表す方法として，横軸に時間を，縦軸にその波形が表す物理量をプロットした波形そのもので表す従来の方法以外の方法がある，ということに気づいて欲しい．即ち，級数和をとっている各周波数成分の大きさや，位相を用いて表す方法である．先に示した矩形波の例を用いて説明してみよう．矩形波のフーリエ級数展開は，式で書けば以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}\infty \frac{1}{2n-1}\sin[(2n-1)\pi t] \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)
\end{aligned} \tag{7.91}
$$

$$
\begin{aligned}
A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| \\
&= \begin{cases} 2/(n\pi) & (n=\text{odd}) \\ 0 & (n=\text{even}) \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.92}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_n &= -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \\
&= \begin{cases} -90^\circ & (n=\text{odd}) \\ 0^\circ & (n=\text{even}) \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.93}
$$

ここで，横軸に $\omega(=n\omega_0)$ をとり，縦軸に A_n と ϕ_n をとって A_n と ϕ_n をプロットすると，**図 7.30** のようになる．この図は，矩形波の形そのものを表すものでは無いが，矩形波の中に

どのような周波数成分がどれくらいの割合で含まれているか，

ということを表す特性図になっており，矩形波という波形を別の側面で見たときの特徴を表したものとなっている*7．このような特性図を「スペクトル (spectrum)」という．

*7 横軸を時間にした特性を「時間領域の特性」，横軸を周波数にした特性を「周波数領域の特性」などという．

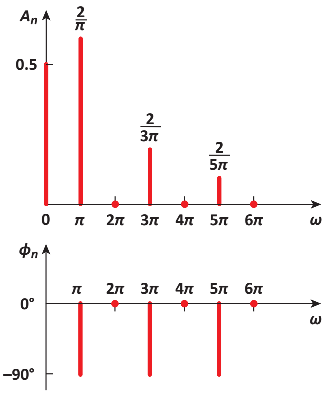


図 7.30 矩形波のスペクトル.

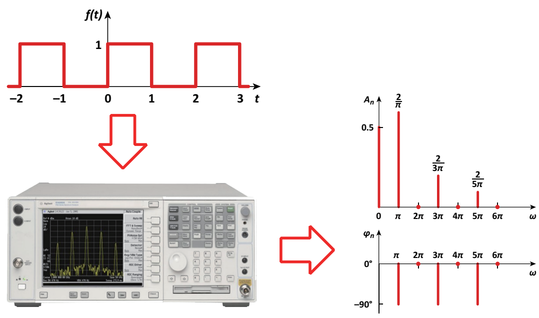


図 7.31 スペクトルアナライザー [3].

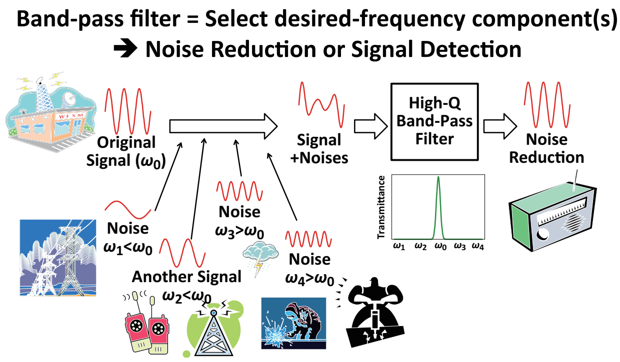


図 7.32 電波受信時のフィルタ回路の効能.

なお，**図 7.31** に示すように，任意の波形からスペクトル取得する専用の装置がある [3]．それを「スペクトルアナライザー (spectrum analyzer)」という．

豆知識

「フィルタ回路の必要性」

フィルタ回路が最も活躍しているのは電波通信の分野

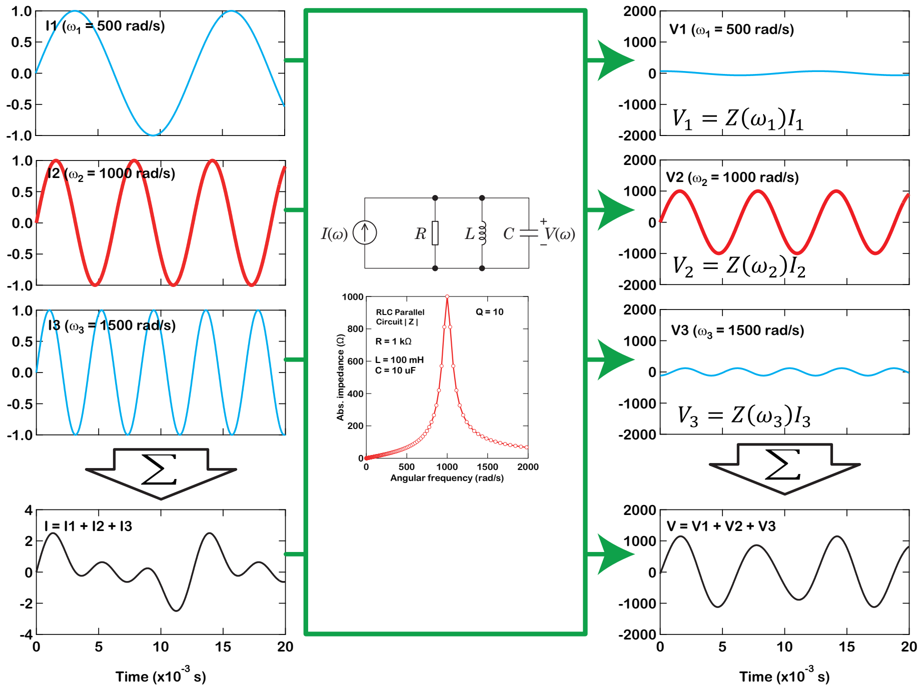


図 7.33 並列共振回路を用いて特定の周波数成分を抽出することを説明するための概念図.

であろう．放送局からある特定の周波数で信号が発振され，それを受信しようとするときにこのフィルタ回路が使われる．そのとき，根本原理となるのが，フーリエ級数展開の論理に基づく以下の原理である．

> 異なる周波数の波形の和を取ると複雑な波形になるが，その複雑な波形から特定の周波数成分だけを抽出すことができる．

即ち，複数の放送局から電波を発信する場合，異なる周波数で発信すれば，受信時にそれらが和となって受信されたとしても，必要な周波数成分だけを抽出できるのである[*8]．

「必要な周波数成分だけを抽出する」ということを，**図 7.33** を用いてもう少し具体的に説明しよう．まず，受信信号を電源とする．例えば，電流源とする．その受信信号には，同図の左側に示すように，500 rad/s, 1000 rad/s, 1500 rad/s の三つの周波数成分が含まれているとする．ここで，必要とする周波数成分は 1000 rad/s の成分であるとする．受信信号そのものの波形は，これら三つの周波数成分の和となっており，同図の左下のような波形になっている．このような波形の電流源を並列共振回路につなげたとしよう (即ち，この受信信号を並列共振回路に入力した，ということに相当する)．なお，この共振回路は，その共振周波数が，必要とする成分の周波数 (1000 rad/s) となるように回路素子を選んであるものとする．

このとき，共振回路の端子間電圧は，各周波数の電流についてオームの法則を適用して得られる電圧の和となる．但し，インピーダンスの値は，同図の中心に描いてあるように各周波数毎に異なる．従って，同図右側に示したように，インピーダンスが小さい周波数の場合には，その周波数成分の電圧は小さくなり，インピーダンスが大きい周波数の場合には，その周波数成分の電圧は大きくなる．実際に計測される端子間電圧は，周波数の異なる三つの電圧の和であるが，上記のように，今回必要とする周波数の成分のみが大きな値を持つため，その和の波形は，今回必要とする周波数の成分とほぼ似た波形となる．実際に計算すれば，同図の右下のような波形になる．もとの 1000 rad/s の電流波形の形と完璧に一致しないのは，共振特性の Q 値が無限大でないからである．そのため，他の周波数成分も若干含まれてしまい，もとの 1000 rad/s の波形とは若干異なる．しかし，AM

*8 同じ周波数の信号の和を取ってしまった場合には，もとの信号に復元することは不可能である．

放送の音声を聞く程度の用途であれば，これぐらいで十分なのである[*9]．以上のようなことが，「受信信号から共振周波数の成分だけを抽出する」，というコトバの意味するところである．

[*9] 但し，音声信号をこの 1000 rad/s の電波にのせて送信する場合には，この 1000 rad/s の波形の振幅を音声信号で振幅変調する．振幅変調って何や？という人は各自で「電波工学」を勉強して下さい．スピーカーを鳴らすことのできる音声信号に直すには，必要な周波数成分を取りだした後に，もう一つやらなければならないこと (復調という) があるのである．

事前基盤知識確認事項

[1] インピーダンスの復習と共振の予習

R, L, C で構成される直列回路の合成インピーダンス Z を表す式を書け．角周波数は ω とする．リアクタンス成分 (インピーダンスの虚数部) がゼロになるときの角周波数 ω_0 を L, C を用いて表せ.

略解

$$\begin{aligned} Z &= R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \\ &= R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \end{aligned}$$

これより，リアクタンスがゼロになるときの角周波数は，以下のようになる．

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

$\omega = \omega_0$ のときにインピーダンスの大きさ (絶対値) は極小値 R となる．

[2] アドミタンスの復習と共振の予習

R, L, C で構成される並列回路の合成アドミタンス Y を表す式を書け．角周波数は ω とする．サセプタンス成分 (アドミタンスの虚数部) がゼロになるときの角周波数 ω_0 を L, C を用いて表せ.

略解

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C \\ &= \frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right). \end{aligned}$$

これより，サセプタンスがゼロになる角周波数 ω_0 は，以下のようになる．

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

$\omega = \omega_0$ のときにアドミタンスの大きさ (絶対値) は極小値 $1/R$ となる．

事後学習内容確認事項

A. RLC 直列共振回路

1. RLC 直列回路のインピーダンス

RLC 直列共振回路のインピーダンス Z_{s} を式で表せ．周波数は ω とする．

略解

$$Z_{\mathrm{s}} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

2. RLC 直列共振回路の共振周波数

RLC 直列共振回路の共振周波数を示せ．

略解

共振周波数 ω_0 は，Z_{s} の虚部がゼロとなる ω である．よって，

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

3. RLC 直列共振回路の Q 値

RLC 直列共振回路の Q 値の意味を示せ．また，Q 値を R, L，C を用いて表せ．

略解

$1/|Z_{\mathrm{s}}|$ の周波数依存性をプロットすると ω_0 を中心とする山型の特性を示す．山の鋭さを表す指標が Q 値である．

$1/|Z_{\mathrm{s}}$ が，最大値の $1/\sqrt{2}$ になる二つの周波数を ω_1，ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) とするとき，Q 値は，次式で定義される．

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}.$$

これを R，L，C を用いて表すと，かなりの計算をした後に，次式が得られる．

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

従って，直列共振特性は，R が 小さい ほど鋭くなる．

B. RLC 並列共振回路

1. RLC 並列回路のインピーダンス

RLC 並列共振回路のアドミタンス Y_{p} を式で表せ．周波数は ω とする．

略解

$$Y_{\mathrm{p}} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$

2. RLC 直列共振回路の共振周波数

RLC 直列共振回路の共振周波数を示せ．

略解

共振周波数 ω_0 は，Y_{p} の虚部がゼロとなる ω である．よって，

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

3. RLC 並列共振回路の Q 値

RLC 並列共振回路の Q 値の意味を示せ．また，Q 値を R, L，C を用いて表せ．

略解

$1/|Y_{\mathrm{p}}|$ の周波数依存性をプロットすると ω_0 を中心とする山型の特性を示す．山の鋭さを表す指標が Q 値である．

$1/|Y_{\mathrm{p}}$ が，最大値の $1/\sqrt{2}$ になる二つの周波数を ω_1，ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) とするとき，Q 値は，次式で定義される．

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}.$$

これを R，L，C を用いて表すと，かなりの計算をした後に，次式が得られる．

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

従って，並列共振特性は，R が 大きい ほど鋭くなる．

参考文献

[1] http://product.tdk.com/inductor/ind/ja/

[2] http://www.murata.co.jp/products/capacitor/

[3] http://www.home.agilent.com/

第 8 章

相互インダクタンスと変成器 (変圧器)

ここでは，二つのコイルを用いた回路素子 (変成器，変圧器) の機能や等価回路について学ぶ．具体的には以下の通り．

- 変圧器の一次側と二次側の関係
  添え字の 1 と 2 を一次側と二次側を表すものとし，電圧，電流，巻数を V, I, N で表すとき，
  $$V_1 I_1 = V_2 I_2, \qquad \frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$
- 相互インダクタンスの式
  $$V_1 = \pm \mathrm{j}\omega L_1 I_1 \pm \mathrm{j}\omega M I_2,$$
  $$V_2 = \pm \mathrm{j}\omega M I_1 \pm \mathrm{j}\omega L_2 I_2,$$
  と ± の符号を定めるドットルール．

8.1　変成器 (変圧器) とは？

変成器 (変圧器，トランスともいう) は，**図 8.1** に示すようなものである [1–3]．その構造は，**図 8.2** に示すように，二つのコイルがあり，片方のコイルの磁束が，もう片方のコイルにも入り込む構造になっている．この原理さえ維持されれば，同図の構造と全く同じである必要は無い．一番簡単な例は，コイルを接近させるという方法であるが，その場合には，片方のコイルの磁束が，もう片方のコイルにきちっと回り込む率が減ってしまう．そのため，もう片方のコイルにきちっと磁束が回り込むように，鉄心が用いられる．これは，磁束が透磁率の高い部分を通るからである (電流が導電率の高い部分を通るのと同じ)．この図では，リング状の鉄心が用いられているが，一本のまっすぐな鉄心に二つのコイルを巻くような例もある．

8.2　トランスの機能

トランスには，**図 8.2** に示すように，二つの端子対がある．入力側とする方を一次 (primary) 側，出力側とする方を二次 (secondary) 側という．一次側に属する諸量を表すときの添え字として 1 を使い，二次側に属する諸量をあらわすときの添え字として 2 を使うことが多い

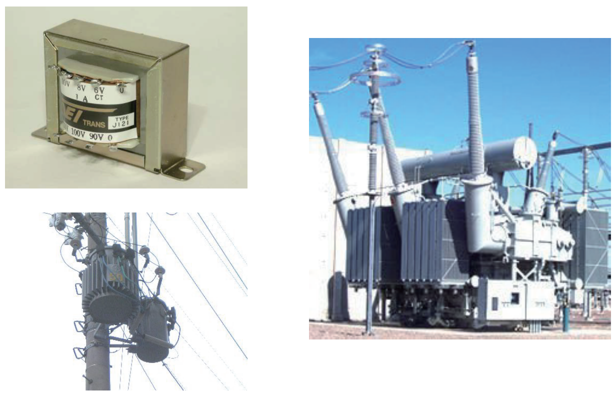


図 8.1 変成器 (変圧器, transformer, トランス) の写真 [1–3].

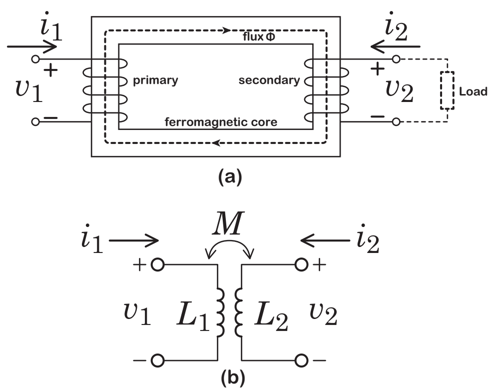


図 8.2 トランスの構造と回路図.

(p と s を使う場合もある).

トランスの一次側と二次側の交流電圧の振幅と交流電流の振幅の間には，以下のような関係が成り立つ (振幅の代わりに実効値を用いても，同じ関係が成り立つことは言わなくてもわかるであろう).

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}. \tag{8.1}$$

ここで，V_1，V_2 は一次側と二次側の電圧，I_1，I_2 は一次側と二次側の電流，N_1，N_2 は一次側と二次側のコイルの巻数である．即ち，二次側の電圧は，一次側電圧をコイルの巻数比倍したものになる．トランスの主な用途は，この機能を利用した交流電圧の変換である．日本の長距離送電では振幅 500 kV 程度の交流が用いられており，それを家庭用の 100 V に変換するために，変電所においてトランスが用いられている[*1].

なお，二次側の電流については，一次側の電流をコイルの巻数比分の 1 したものになる．従って，

$$V_1 I_1 = V_2 I_2 \tag{8.2}$$

となり，**トランスの一次側と二次側で電力は変わらない**．即ち，電圧を大きくすると，同時に電流が小さくなり，電力が大きくなるわけではない，ということは留意して欲しい.

8.3 トランスの基本式 (相互誘導の基本式)

8.3.1 相互誘導

片方のコイルに電流が流れることによって，もう片方のコイルに電圧が発生するような現象を「相互誘導」という．発生する電圧を誘導起電力という．トランスはこの相互誘導を利用した回路素子である．トランスを回路図で描くときには，**図 8.3** のように描く．また，相互誘導を表す式は，非フェーザ形式で表すと以下のようになる (フェーザ形式については後述).

$$v_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}, \tag{8.3}$$

$$v_2 = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}. \tag{8.4}$$

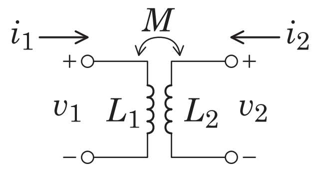


図 8.3 トランスの回路図.

ここで，L_1，L_2 を一次側，二次側の**自己インダクタンス**という．M を**相互インダクタンス**という．上式において，

- v_1 の第 1 項目 $L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ と v_2 の第 2 項目 $L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ は，

  自己誘導による電圧

  であり，通常のコイルの場合と同じように自身のコイルに流れた電流によって決まる電圧である．より厳密に言えば，

  自己誘導による起電力を電圧降下として扱ったもの[*2]

  となる．一方，
- v_1 の第 2 項目 $M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ と v_2 の第 1 項目 $M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ は，

  相互誘導による電圧

  であり，相手のコイルに流れた電流によって決まる電圧である．より厳密に言えば，

  相互誘導による起電力を起電力として扱ったもの[*2]

  となる．

8.3.2 相互誘導とコイルの巻き方向

トランス特有の特徴として，一次側と二次側の巻き線の巻き方には，**図 8.4** (a) と (b) に示すように，二通りの巻き方がある，ということがわかる．この巻き方が異なると，トランスの基本式において，自己誘導以外に付け加わった相互誘導の成分の符号が異なってくる．

自己誘導による電圧については，コイルの巻き方によって符号が変わることはない．電圧と電流の正の向きとして受動素子にとって自然な設定している限り，必ず以下の正符号の式:

$$L_k \frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t} \quad (k = 1, 2) \tag{8.5}$$

[*1] 電力を遠距離送電する場合には，高電圧の方が損失が少ないからである．

[*2] このようなくどい言い回しをする理由については，章末の**豆知識**を参照されたし．

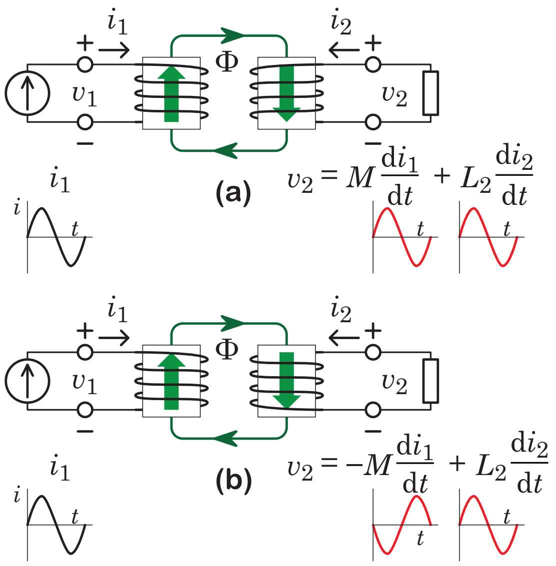


図 8.4 トランスの巻き線の巻き方向による二次側の誘導電圧降下の符号の違い.

で表される.

一方，相互誘導による電圧については，コイルの巻き方がが異なると，相互誘導による電圧の向きが異なる．例えば，**図 8.4** (a) の場合の二次側に注目すると，自己誘導による電圧 (電圧降下) が増えるときに，相互誘導による電圧 (起電力) も増えるので,

$$v_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{8.6}$$

と表される．これに対し，**図 8.4** (b) のように二次側の巻方を逆にした場合には，相互誘導による電圧 (起電力) の大きさ (絶対値) は先ほどと同様に増えるのだが，自己誘導とは逆の向きに増える．従って，式としては,

$$v_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{8.7}$$

のように M の前にマイナスが付くことになる.

以上のように，一次側と二次側の巻方向の相対的な違いにより，一次側が原因となって二次側に誘起される相互誘導起電力の符号が変わる．なお，二次側に電流が流れれば，二次側が原因となって一次側に相互誘導起電力が誘起されるので，この場合も同様に，巻き方が異なると一次側に誘起される相互誘導起電力の符号が異なってくる.

このような違いを，回路図に表現するとき，いちいち巻方を描いていたのではたまらない．そこで，導入されたのが，「ドット (•) 印」である.

8.4 ドットのルール (Dot convention)

J. W. Nilsson and S. A. Riedel による電気回路学の教科書によるとドット印を解釈するときのルールは以下の通りである [4].

> When the reference direction for a current enters the dotted terminal of a coil, the reference polarity of the voltage that it induces in the other coil is positive at its dotted terminal.
>
> When the reference direction for a current leaves the dotted terminal of a coil, the reference polarity of the voltage that it induces in the other coil is negative at its dotted terminal.

これを日本語に訳すと,

> 一次側の電流の矢印がドットに流れ込む向きである
> $\Longrightarrow$ 二次側のドットは「+」
>
> 一次側の電流の矢印がドットから流れ出る向きである
> $\Longrightarrow$ 二次側のドットは「−」

これを図で表すと**図 8.5** のようになる.

上記のルールは，一次側の電流が原因となって二次側に相互誘導による電圧が発生する場合についてのみ説明したが，二次側の電流が原因となって，一次側に相互誘導の電圧が発生する場合についても，全く同様である．改めて書く必要も無いかもしれないが，以下の通りである.

> 二次側の電流の矢印がドットに流れ込む向きである
> $\Longrightarrow$ 一次側のドットは「+」
>
> 二次側の電流の矢印がドットから流れ出る向きである
> $\Longrightarrow$ 一次側のドットは「−」

なお，自己誘導や相互誘導の電圧を考えるときには，回路上で自分がどちら向きの電圧を正と想定しているの

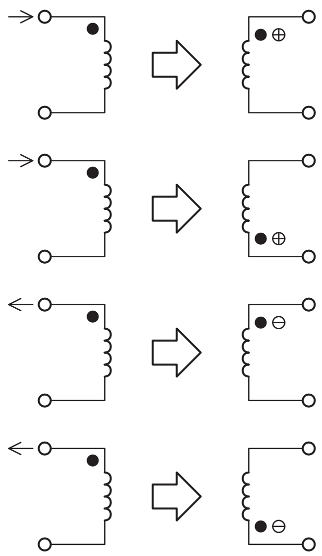


図 8.5 ドット印のルール．一次側の電流が原因で，二次側に誘導電圧 (電圧降下) が発生する場合.

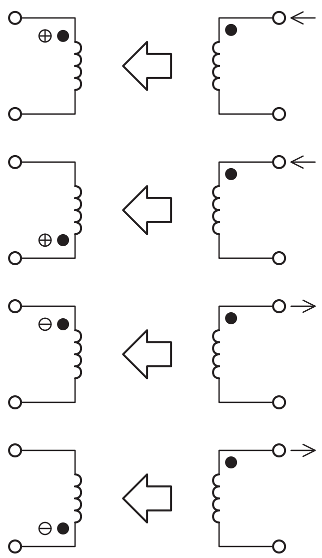


図 8.6 ドット印のルール．二次側の電流が原因で，一次側に誘導電圧 (電圧降下) が発生する場合.

か[*3]，という点に細心の注意を払うこと．これを間違えると，大きさ (絶対値) は同じでも，符号が異なってしまうからである．電圧の向きの想定の仕方については，既に本講義の最初の章 (第 1 章) の豆知識示してあるので，回路図に書き込んでいる + と − の印の意味を再度

[*3] その電圧を v とかで表したときに，$v>0$ が意味するのは，どちらの端子が高電位の時なのか，ということ．章末の補足説明を参照のこと.

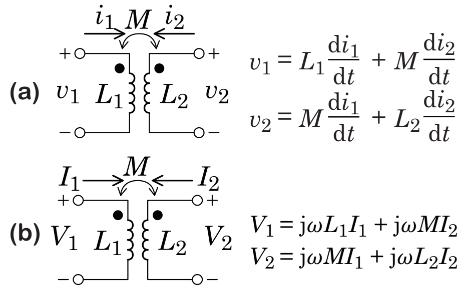


図 8.7 トランスの式のフェーザ版.

確認しておいて欲しい．また，繰り返しになるが，その電圧を電圧降下と捉えているのか，起電力と捉えているのか，についても注意すること.

8.5 フェーザの場合の相互インダクタンスの式

前節で導入した「ドット印」の読み方練習の前に，フェーザ形式による相互誘導の基本式を表しておこう.

前節までは，片方のコイルに流れる電流の時間変化によってもう片方のコイルに誘導起電力が発生するということを明示するために，面倒臭いがあえて $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ のような記述の仕方を押し通してきた.

我々は既にフェーザなるものを学んでいるので，これをフェーザ形式で表してみよう．フェーザ形式を導入した章を復習すればわかるように，周波数 ω で正弦波振動する $i(t)$ のフェーザ形式を I とすれば，

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \mathrm{j}\omega I \tag{8.8}$$

である．従って，**図 8.7** (a) に示すようなトランス式をフェーザ形式であらわせば，同図 (b) に示すように，以下の通りとなる.

$$V_1 = \mathrm{j}\omega L_1 I_1 + \mathrm{j}\omega M I_2, \tag{8.9}$$
$$V_2 = \mathrm{j}\omega M I_1 + \mathrm{j}\omega L_2 I_2. \tag{8.10}$$

以下では，このフェーザ形式の相互誘導の基本式において，「ドット印」のルールを適用すると，右辺の各項の符号がどうなるのかを説明する.

8.6 ドットの読み方の練習

ドット印のルールについては，慣れてしまえば，先の簡単なルールを頭に入れておくだけでよい．しかし，一度も練習をしないと，多くの学生さん達が本番で慌てふためいている．この節では，慣れてもらうことを目的として，いくつものドット印の付いたトランス回路に対応するトランスの基本式を示す．練習のために，各自にて確認して欲しい．以下に，How to 的な「+」「−」の決定手順を示しておく．

8.6.1 自己インダクタンス成分の符号決定

まず，次式の自己インダクタンス L_1，L_2 による電圧降下の符号（次式の赤字の ±）を決める．

$$V_1 = \pm j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2, \tag{8.11}$$
$$V_2 = \pm j\omega M I_1 \pm j\omega L_2 I_2. \tag{8.12}$$

判定基準は以下の通り．一次側も二次側も判定基準は基本的に同じであるが，あえて学習のために両方とも記した．

- 一次側に注目
  電圧 V_1 の向きに対して電流 I_1 の向きは？
  自然な向き ⇒ プラス ($+j\omega L_1 I_1$)
  反対の向き ⇒ マイナス ($-j\omega L_1 I_1$)
- 二次側に注目
  電圧 V_2 の向きに対して電流 I_2 の向きは？
  自然な向き ⇒ プラス ($+j\omega L_2 I_2$)
  反対の向き ⇒ マイナス ($-j\omega L_2 I_2$)

なお，ここでいう「自然」か「反対」かは，受動素子の電圧と電流の向きとして自然か反対かを判定すること．「高いところから低いところに電流が流れる」というのが「自然」な向きである．

8.6.2 相互インダクタンス成分の符号決定

次に，相互インダクタンス M による電圧降下の符号（次式の赤字の ±）を決める．

$$V_1 = \pm j\omega L_1 I1 \pm j\omega M I_2, \tag{8.13}$$
$$V_2 = \pm j\omega M I1 \pm j\omega L_2 I_2. \tag{8.14}$$

この場合も，一次側と二次側で方針は同じであるが，学習のために，両方の場合について記した．

- 一次側の相互インダクタンスの項の符号を決めるドットルールの適用
  - 二次側のドットでは電流が流入
    ⇒ 一次側のドットはプラス (増加)
  - 二次側のドットでは電流が流出
    ⇒ 一次側のドットはマイナス (減少)

  このようにして定まった一次側のドットのプラス・マイナスを，同じ側の電圧 V_1 の向き (どちらが高電位の時にそこの電圧を表す変数値が正 (> 0) としているか) と比べる．
  - 同 ⇒ 相互インダクタンスの項を足す ($+j\omega M I_2$)
  - 逆 ⇒ 相互インダクタンスの項を引く ($-j\omega M I_2$)
- 二次側の相互インダクタンスの項の符号を決めるドットルールの適用
  - 一次側のドットでは電流が流入
    ⇒ 二次側のドットはプラス (増加)
  - 一次側のドットでは電流が流出
    ⇒ 二次側のドットはマイナス (減少)

  このようにして定まった二次側のドットのプラス・マイナスを，同じ側の電圧 V_2 の向き (どちらが高電位の時にそこの電圧を表す変数値が正 (> 0) としているか) と比べる．
  - 同 ⇒ 相互インダクタンスの項を足す ($+j\omega M I_1$)
  - 逆 ⇒ 相互インダクタンスの項を引く ($-j\omega M I_1$)

具体的な例題を章末に用意したので，各自で確認して欲しい．

8.7 結合係数 k

トランス関係のパラメータとして「結合係数 k」なるものがあるので，紹介しておく．前節までは，相互誘導係数 M は与えられるもの，として扱ってきたが，結合係数 k なるパラメータとそれぞれの自己誘導係数 L_1，L_2 を用いて，以下のように表される．

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \qquad (|k| \le 1). \tag{8.15}$$

この結合係数とは，二つのコイルの磁束が完全に一致していれば 1 となる．実際には，**図 8.8** に示すように，一

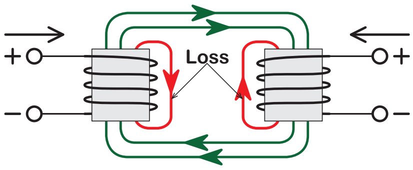


図 8.8 「磁束の漏れ無し」の程度を表す結合係数 k.

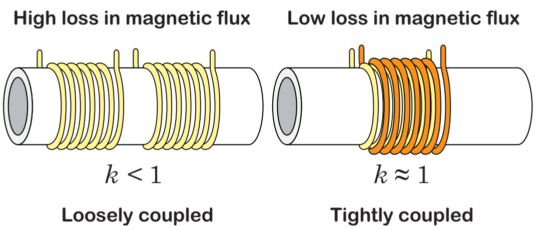


図 8.9 磁束のロスが多い結合と磁束のロスが少ない結合 (密結合という).

つのコイルを通る磁束のうち，もう片方のコイルを通らない成分もある．このような時には，$k<1$ となる．状況によっては，後述の様に負の M もあり得るので，k の値が負になる場合もある．そのため，厳密に書くならば $|k|<1$ と書く必要があるが，それは特殊な場合であるから，本講義の範囲内では，あえて絶対値を付けずに表記している．

なお，一般には，磁束のロスがあるため $k<1$ であるが，特殊な巻き線の巻き方をすれば，$k\simeq 1$ が実現できる．このような結合の仕方を「密結合」と呼んでいる．

8.8 トランスの等価回路

トランスは，一次側と二次側が磁束のみで結合しているため，**図 8.10** (a) に示すように，直流的には一次側と二次側は絶縁されている (つながっていない)．もしも，一次側と二次側の下側の端子が繋がっているとすると，**図 8.10** (b) に示すような等価回路で表すことができる．

図 8.10 (b) に示した等価回路は以下のようにして導かれる．**図 8.10** (a) のトランスの基本式は，以下の通りである．

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2, \tag{8.16}$$
$$V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2. \tag{8.17}$$

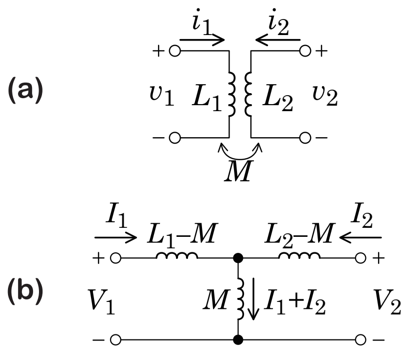


図 8.10 (a) トランスの回路図と (b) 等価回路.

これに対して，以下のようなトリッキーな式変形を行う．

$$V_1 = j\omega(L_1-M)I_1 + j\omega M(I_1+I_2), \tag{8.18}$$
$$V_2 = j\omega(L_2-M)I_2 + j\omega M(I_1+I_2). \tag{8.19}$$

この式を良くみれば，**図 8.10** (b) の回路の電圧と電流の関係を表していることがおわかり頂けると思う．

8.9 トランスを間に挟んだ場合の入力インピーダンス

電源と負荷の間にトランスを挟んだ場合に，電源側からトランス込みで負荷側をみたときの入力インピーダンスは，**図 8.11** に示すように，もともとの負荷のインピーダンスとは異なってくる．

トランスの基本式と，負荷側でのオームの法則 (電流の向きに注意) の式とを組み合わせた以下の式から，$Z_1 = V_1/I_1$ を求めれば，同図に記してある入力インピーダンスが導出される．

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2, \tag{8.20}$$
$$V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2, \tag{8.21}$$
$$V_2 = -Z_2 I_2. \tag{8.22}$$

これらより，次式が得られる．

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + Z_2}. \tag{8.23}$$

トランスの右側に位置する負荷が極端な状況になったときについて，トランス込みの入力インピーダンスを求めると，以下のようになる．

- **負荷が開放 $Z_2=\infty\ \Omega$ の場合**

$$Z_1 = j\omega L_1. \tag{8.24}$$

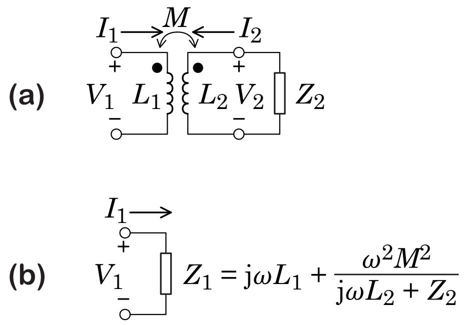


図 8.11 (a) 二次側に負荷を接続したトランスと (b) トランス込みで負荷側を見たときの入力インピーダンス．

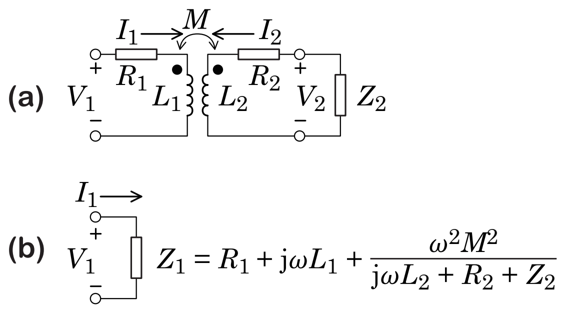


図 8.12 (a) コイルの抵抗成分を考慮したトランスと (b) そのトランス込みで負荷側を見たときの入力インピーダンス．

- **負荷が短絡 $Z_2 = 0\ \Omega$ の場合**

$$Z_1 = \mathrm{j}\omega\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right). \tag{8.25}$$

※ $M^2 = k^2 L_1 L_2$ であるから，密結合 $k = 1$ の場合には $Z_1 = 0$ となる．

また，より厳密にコイルの抵抗成分まで考慮すると，**図 8.12** に示すように，トランス込みの入力インピーダンスは，以下のようになる．

$$Z_1 = R_1 + \mathrm{j}\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\mathrm{j}\omega L_2 + R_2 + Z_2}. \tag{8.26}$$

8.10 二端子接続 (可変コイル，可変インダクタンス)

抵抗に可変抵抗器があり，コンデンサに可変コンデンサがあるように，コイルにも可変コイルがある．その実現方法の一つとして，相互誘導のある二つのコイルを直列接続する方法がある．回路的には**図 8.13** のようになる．M の値を変えることができれば，合成された L_+ または L_- の値が可変できる．どのようにして M を可変するかは，**図 8.9** を見直して頂くとピンとくると思う．具体的には**図 8.14** のようなものになる [5].

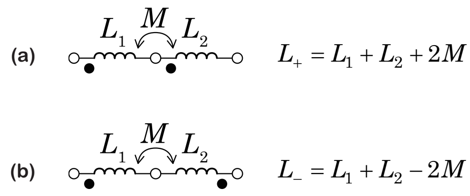


図 8.13 相互誘導のあるコイルを直列接続した回路の二つの例．

図 8.14 可変インダクタの例．内部のコイルが前後に可動し，その周りのコイルとの結合の度合い (k の値) を変えることにより M を変えている [5].

別のタイプの可変インダクタンスとして，**図 8.15** のようなものもある．可変インダクタンスとしては，こちらの方がポピュラーである [6].

8.11 オートトランス (スライダック)

実験などで手軽に交流電圧を可変して出力し，それを利用したいときに用いるのがスライダックである．実物は，**図 8.16** に示すようなものである [7]．本節では，このスライダックの基本式を導出しよう．

スライダックの回路は，実体配線的に描けば，**図 8.17** (a) のようになっている．これを等価回路的に描けば，同図 (b) のようになる．この回路からスライダックの基

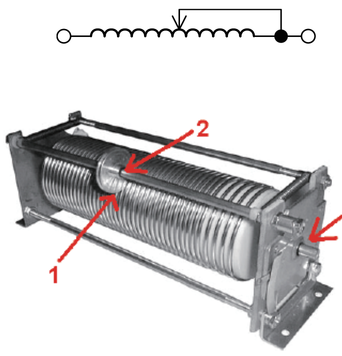


図 8.15 インダクタンスの一部を短絡することで可変する方式の可変インダクタンス [6].

図 8.16 手軽に可変交流電圧を得るために用いられるスライダック [7].

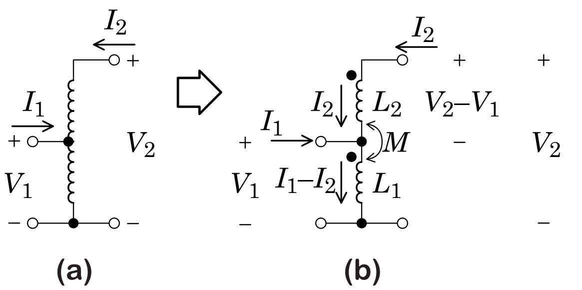


図 8.17 スライダックの回路.

本式を導出するにあたって，これまでに学んだトランスの基本式が導き出されたときの回路の一次側と二次側の電圧と電流が，スライダックの一次側と二次側の電圧と電流とは一対一対応していないことに留意しなければな

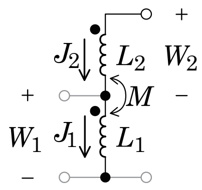


図 8.18 スライダックの回路をトランスの基本式に当てはめるための補助図.

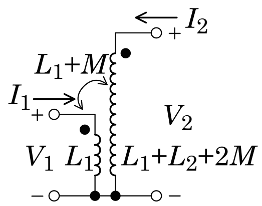


図 8.19 スライダックの等価回路.

らない.

$$W_1 = V_1, \tag{8.27}$$
$$W_2 = V_2 - V_1, \tag{8.28}$$
$$J_1 = I_1 - I_2, \tag{8.29}$$
$$J_2 = I_2. \tag{8.30}$$

という置き換えをすれば，**図 8.18** のように見ることができる．これらのパラメータについて，これまで学んだトランスの式を当てはめることができる．

即ち，基本式を書き下せば，次式のようになる．

$$W_1 = \mathrm{j}\omega L_1 J_1 + \mathrm{j}\omega M J_2, \tag{8.31}$$
$$W_2 = \mathrm{j}\omega M J_1 + \mathrm{j}\omega L_2 J_2. \tag{8.32}$$

これの式で使われている変数を，置き換え前の変数に直せば，次式が得られる．

$$V_1 = \mathrm{j}\omega L_1(I_1 + I_2) + \mathrm{j}\omega M I_2, \tag{8.33}$$
$$V_2 - V_1 = \mathrm{j}\omega M(I_1 + I_2) + \mathrm{j}\omega L_2 I_2. \tag{8.34}$$

これをトランスの基本式のように変形すれば，

$$V_1 = \mathrm{j}\omega L_1 I_1 + \mathrm{j}\omega(L_1 + M)I_2, \tag{8.35}$$
$$V_2 = \mathrm{j}\omega(L_1 + M)I_1 + \mathrm{j}\omega(L_1 + L_2 + 2M)I_2 \tag{8.36}$$

となる．この電圧と電流の関係式から，等価回路を逆算すれば，**図 8.19** のようになる．

これを**図 8.10** で示したような **T** 字型の等価回路に直せば，**図 8.20** (b) のようになる．これは，**図 8.20** (a) と**図 8.10** とを比較すれば自ずとわかるであろう．

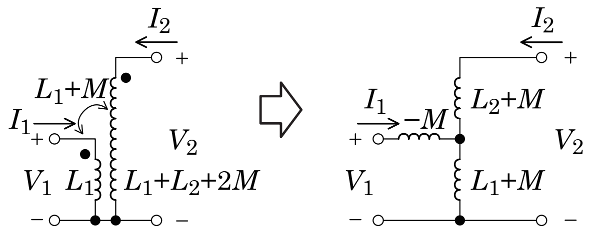


図 **8.20** スライダックの **T** 字型等価回路.

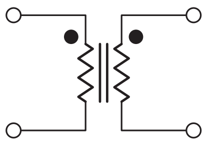


図 **8.21** 回路図上での理想変成器の表し方.

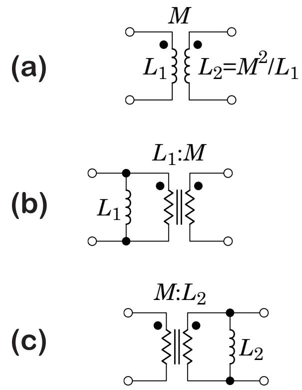


図 **8.22** 密結合変成器 (a) の等価な二つの表し方．(b) 一次側のインダクタンス L_1 と巻数比 $L_1 : M$ の理想変成器で表したもの．(c) 二次側のインダクタンス L_2 と巻数比 $M : L_2$ の理想変成器で表したもの.

8.12　理想変成器

変成器は，主として電圧の変換に用いられるが，コイルを利用しているために，どうしてもインダクタンス成分が存在する．理想変成器とは，一次側と二次側の電圧・電流の間に以下のような変成器の基本的な関係だけを持つ仮想的な回路素子である.

$$V_2 = nV_1, \tag{8.37}$$

$$I_2 = -\frac{I_1}{n}. \tag{8.38}$$

ここで，n は一次側と二次側の巻数比 $n = N_2/N_1$ である．電気回路的には，理想変成器（理想変圧器）とは，巻数比 n を一定に保ちながら，L_1，L_2，M を無限大にもっていったものと解釈することができる (後述).

理想変成器は以下の性質を持つことになる.

- コイルは極めて大きいリアクタンス成分を持つ
- 結合係数は 1 である
- 一次側，二次側のコイルは損失無し (抵抗成分ゼロ)

理想変成器は仮想的なものであるが，実在する変成器を理想変成器と R，L，C の組み合わせで表すと便利な場合があるため，理想変成器という概念が利用される.

なお，回路図上では，理想変成器は**図 8.21** のように表される.

8.12.1　理想変成器の特徴

理想変成器は以下の特徴を持つ.

- **電力無消費**

$$V_1 I_1^* = \frac{V_2}{n} n I_2^* = V_2 I_2^* \tag{8.39}$$

即ち，電力は理想変成器を素通りする.

- **インピーダンス換算**

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{n^2}\frac{V_2}{I_2} = \frac{1}{n^2} Z_2 \tag{8.40}$$

即ち，理想変成器は二次側のインピーダンスを定数倍する．また，二次側での短絡・開放の状態は，そのまま一次側に現れる.

8.12.2　理想変成器を用いた等価回路

ここでは，理想変成器とその他の回路素子とを組み合わせて，実際の変成器を表した例を示す．**図 8.22** は，密結合変成器を独立したインダクタンスと理想変成器で表したものである．通常の変成器に付随するインダクタンス成分を理想変成器の一次側で表現したものと，二次側で表現したものを例として示してある.

非密結合の変成器を理想変成器によって表現しようとすると，理想変成器を用いた表現に変換する前に，まず漏れインダクタンスの成分を独立したコイルで表現しておく必要がある．**図 8.23** は，非密結合変成器の漏れインダクタンス成分を独立したコイルで表現したものである．この場合も，この漏れインダクタンス成分を一次側で表現する方法と二次側で表現する方法の二通りがある．このように漏れインダクタンスを独立したコイル

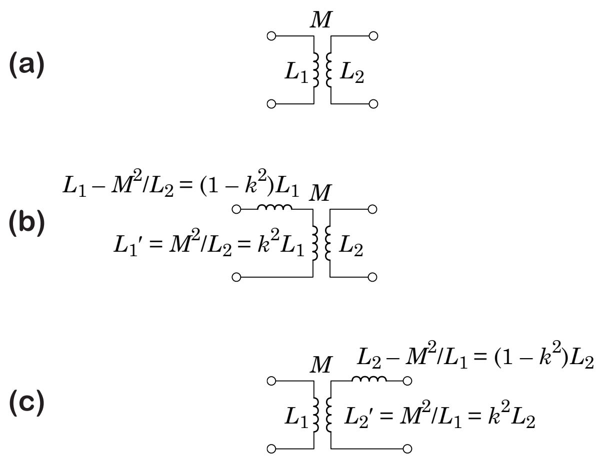


図 8.23 非密結合変成器 (a) の等価な二つの表し方．(b) 一次側の漏れインダクタンスと変成器で表したもの．(c) 二次側の漏れインダクタンスと変成器で表したもの．

として分離した後に，**図 8.24** に示すように，変成器の部分を理想変成器に変換する．この場合も，変成器の部分を理想変成器に変換する際に，コイルの成分を一次側で表現するのか，二次側で表現するのか，という二通りがあり，更に，漏れインダクタンスの成分も，一次側で表現するのか，二次側で表現するのか，という二通りがある．

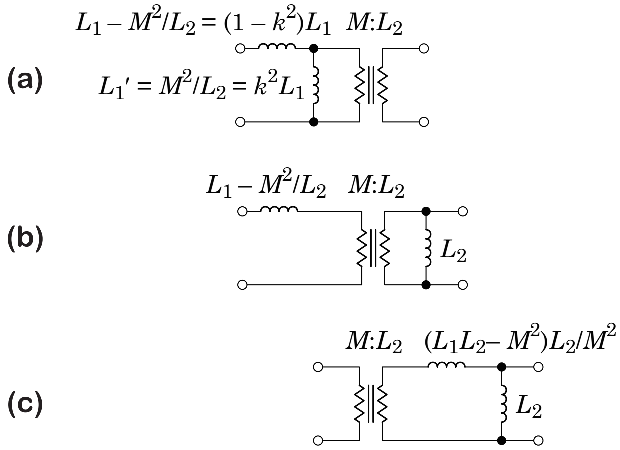


図 8.24 非密結合変成器 (**図 8.23**) の理想変成器を用いた等価な表し方．(a) 変成器のインダクタンス成分を一次側の並列コイルで表現し，それに対して漏れインダクタンスの成分を直列コイルで表現したもの．(b) 前者と同じであるが，変成器のインダクタンス成分のコイルを二次側で表現したもの．(c) 更に，漏れインダクタンスの成分も二次側で表現したものである．

課題

ドット印の読み方の練習 (1a)

略解

図 8.25 (a) の場合には，以下のようになる．

自己インダクタンス成分の符号については，「電圧の向きに対して電流の向きは？」を見る．

- 一次側：同 ⇒ $+\mathrm{j}\omega L_1 I_1$
- 二次側：同 ⇒ $+\mathrm{j}\omega L_2 I_2$

相互インダクタンス成分の符号については，ドットを見る．

- **一次側の式について**
  - 二次側ドットでは，電流が「流入」
    ⇒ 一次側ドットは「正」
  - 一次側ドットの符号と一次側端子の電圧の向きは「同」
    ⇒ $+\mathrm{j}\omega M I_2$
  - 従って，
$$V_1 = +\mathrm{j}\omega L_1 I_1 + \mathrm{j}\omega M I_2 \tag{8.41}$$
- **二次側の式について**
  - 一次側ドットでは，電流が「流入」
    ⇒ 二次側ドットは「正」
  - 二次側ドットの符号と二次側端子の電圧の向きは「同」
    ⇒ $+\mathrm{j}\omega M I_1$
  - 従って，
$$V_2 = +\mathrm{j}\omega L_2 I_2 + \mathrm{j}\omega M I_1 \tag{8.42}$$

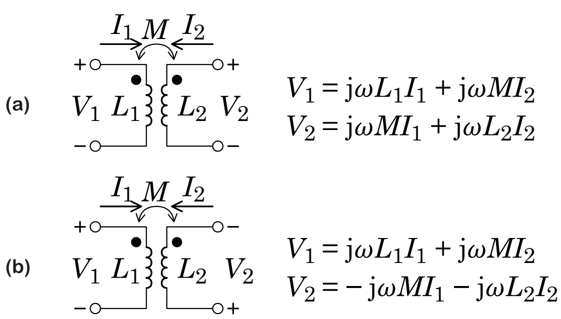


図 8.25 ドット印の読み方の練習 (1).

課題

ドット印の読み方の練習 (1b)

略解

図 8.25 (b) の場合には，以下のようになる．

自己インダクタンス成分の符号については，「電圧の向きに対して電流の向きは？」を見る．

- 一次側：同 ⇒ $+\mathrm{j}\omega L_1 I_1$
- 二次側：逆[*4]⇒ $-\mathrm{j}\omega L_2 I_2$

相互インダクタンス成分の符号については，ドットを見る．

- **一次側の式について**
  - 二次側ドットでは，電流が「流入」
    ⇒ 一次側ドットは「正」
  - 一次側ドットの符号と一次側端子の電圧の向きは「同」
    ⇒ $+\mathrm{j}\omega M I_2$
  - 従って，
$$V_1 = +\mathrm{j}\omega L_1 I_1 + \mathrm{j}\omega M I_2 \tag{8.43}$$
- **二次側の式について**
  - 一次側ドットでは，電流が「流入」
    ⇒ 二次側ドットは「正」
  - 二次側ドットの符号と二次側端子の電圧の向きは「逆」
    ⇒ $-\mathrm{j}\omega M I_1$
  - 従って，
$$V_2 = -\mathrm{j}\omega L_2 I_2 - \mathrm{j}\omega M I_1 \tag{8.44}$$

[*4] 電圧と電流の向きの設定が，本章末の**豆知識**で述べる「あまのじゃく (自然じゃない)」になっている例である．

課題

ドット印の読み方の練習 (2a)

略解

図 8.26 (a) の場合には，以下のようになる．

自己インダクタンス成分の符号については，「電圧の向きに対して電流の向きは？」を見る．

- 一次側：同 ⇒ $+\mathrm{j}\omega L_1 I_1$
- 二次側：同 ⇒ $+\mathrm{j}\omega L_2 I_2$

相互インダクタンス成分の符号については，ドットを見る．

- **一次側の式について**
  - 二次側ドットでは，電流が「流出」
    ⇒ 一次側ドットは「負」
  - 一次側ドットの符号と一次側端子の電圧の向きは「逆」
    ⇒ $-\mathrm{j}\omega M I_2$
  - 従って，

$$V_1 = +\mathrm{j}\omega L_1 I_1 - \mathrm{j}\omega M I_2 \tag{8.45}$$

- **二次側の式について**
  - 一次側ドットでは，電流が「流入」
    ⇒ 二次側ドットは「正」
  - 二次側ドットの符号と二次側端子の電圧の向きは「逆」
    ⇒ $-\mathrm{j}\omega M I_1$
  - 従って，

$$V_2 = +\mathrm{j}\omega L_2 I_2 - \mathrm{j}\omega M I_1 \tag{8.46}$$

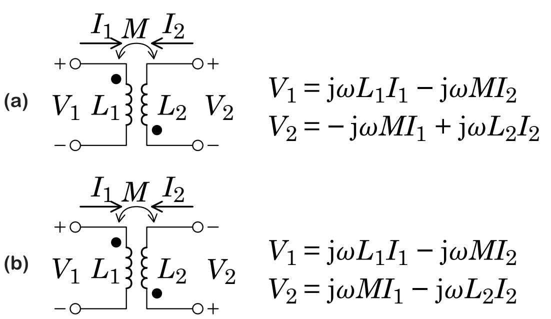


図 8.26 ドット印の読み方の練習 (2).

課題

ドット印の読み方の練習 (2b)

略解

図 8.26 (b) の場合には，以下のようになる．

自己インダクタンス成分の符号については，「電圧の向きに対して電流の向きは？」を見る．

- 一次側：同 ⇒ $+\mathrm{j}\omega L_1 I_1$
- 二次側：逆[*5] ⇒ $-\mathrm{j}\omega L_2 I_2$

相互インダクタンス成分の符号については，ドットを見る．

- **一次側の式について**
  - 二次側ドットでは，電流が「流出」
    ⇒ 一次側ドットは「負」
  - 一次側ドットの符号と一次側端子の電圧の向きは「逆」
    ⇒ $-\mathrm{j}\omega M I_2$
  - 従って，

$$V_1 = +\mathrm{j}\omega L_1 I_1 - \mathrm{j}\omega M I_2 \tag{8.47}$$

- **二次側の式について**
  - 一次側ドットでは，電流が「流入」
    ⇒ 二次側ドットは「正」
  - 二次側ドットの符号と二次側端子の電圧の向きは「同」
    ⇒ $+\mathrm{j}\omega M I_1$
  - 従って，

$$V_2 = -\mathrm{j}\omega L_2 I_2 + \mathrm{j}\omega M I_1 \tag{8.48}$$

[*5] 電圧と電流の向きの設定が，本章末の**豆知識**で述べる「あまのじゃく (自然じゃない)」になっている例である．

課題

ドット印の読み方の練習 (3a)

略解

図 8.27 (a) の場合には，以下のようになる．

自己インダクタンス成分の符号については，「電圧の向きに対して電流の向きは？」を見る．

- 一次側：同 ⇒ $+\mathrm{j}\omega L_1 I_1$
- 二次側：逆[*6]⇒ $-\mathrm{j}\omega L_2 I_2$

相互インダクタンス成分の符号については，ドットを見る．

- **一次側の式について**
  - 二次側ドットでは，電流が「流出」
    ⇒ 一次側ドットは「負」
  - 一次側ドットの符号と一次側端子の電圧の向きは「逆」
    ⇒ $-\mathrm{j}\omega M I_2$
  - 従って，
$$V_1 = +\mathrm{j}\omega L_1 I_1 - \mathrm{j}\omega M I_2 \tag{8.49}$$
- **二次側の式について**
  - 一次側ドットでは，電流が「流入」
    ⇒ 二次側ドットは「正」
  - 二次側ドットの符号と二次側端子の電圧の向きは「同」
    ⇒ $+\mathrm{j}\omega M I_1$
  - 従って，
$$V_2 = -\mathrm{j}\omega L_2 I_2 + \mathrm{j}\omega M I_1 \tag{8.50}$$

課題

ドット印の読み方の練習 (3b)

略解

図 8.27 (b) の場合には，以下のようになる．

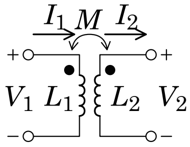
自己インダクタンス成分の符号については，「電圧の向きに対して電流の向きは？」を見る．

- 一次側：同 ⇒ $+\mathrm{j}\omega L_1 I_1$
- 二次側：同 ⇒ $+\mathrm{j}\omega L_2 I_2$

相互インダクタンス成分の符号については，ドットを見る．

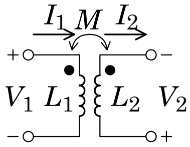
- **一次側の式について**
  - 二次側ドットでは，電流が「流出」
    ⇒ 一次側ドットは「負」
  - 一次側ドットの符号と一次側端子の電圧の向きは「逆」
    ⇒ $-\mathrm{j}\omega M I_2$
  - 従って，
$$V_1 = +\mathrm{j}\omega L_1 I_1 - \mathrm{j}\omega M I_2 \tag{8.51}$$
- **二次側の式について**
  - 一次側ドットでは，電流が「流入」
    ⇒ 二次側ドットは「正」
  - 二次側ドットの符号と二次側端子の電圧の向きは「逆」
    ⇒ $-\mathrm{j}\omega M I_1$
  - 従って，
$$V_2 = +\mathrm{j}\omega L_2 I_2 - \mathrm{j}\omega M I_1 \tag{8.52}$$

(a)



$$V_1 = \mathrm{j}\omega L_1 I_1 - \mathrm{j}\omega M I_2$$
$$V_2 = \mathrm{j}\omega M I_1 - \mathrm{j}\omega L_2 I_2$$

(b)



$$V_1 = \mathrm{j}\omega L_1 I_1 - \mathrm{j}\omega M I_2$$
$$V_2 = -\mathrm{j}\omega M I_1 + \mathrm{j}\omega L_2 I_2$$

図 8.27 ドット印の読み方の練習 (3).

[*6] 電圧と電流の向きの設定が，本章末の**豆知識**で述べる「あまのじゃく (自然じゃない)」になっている例である．

課題

ドット印の読み方の練習 (4a)

略解

図 8.28 (a) と既に検証した**図 8.28** (b) (**図 8.28** (a)) は回路図的には異なっているが，結局は同じである，という一つの例である．

自己インダクタンス成分の符号については，「電圧の向きに対して電流の向きは？」を見る．

- 一次側：同 ⇒ $+\mathrm{j}\omega L_1 I_1$
- 二次側：同 ⇒ $+\mathrm{j}\omega L_2 I_2$

相互インダクタンス成分の符号については，ドットを見る．

- **一次側の式について**
  - 二次側ドットでは，電流が「流入」
    ⇒ 一次側ドットは「正」
  - 一次側ドットの符号と一次側端子の電圧の向きは「同」
    ⇒ $+\mathrm{j}\omega M I_2$
  - 従って，
$$V_1 = +\mathrm{j}\omega L_1 I_1 + \mathrm{j}\omega M I_2 \tag{8.53}$$

- **二次側の式について**
  - 一次側ドットでは，電流が「流入」
    ⇒ 二次側ドットは「正」
  - 二次側ドットの符号と二次側端子の電圧の向きは「同」
    ⇒ $+\mathrm{j}\omega M I_1$
  - 従って，
$$V_2 = +\mathrm{j}\omega L_2 I_2 + \mathrm{j}\omega M I_1 \tag{8.54}$$

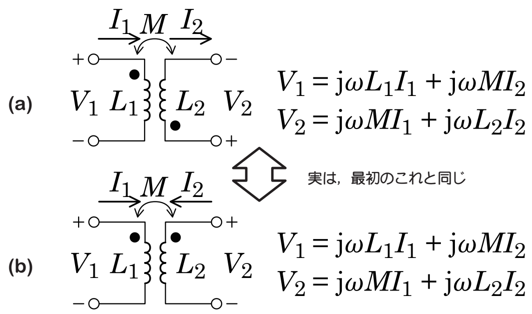


図 8.28 ドット印の読み方の練習 (4).

課題

理想変成器が，密結合変成器において $L_1, L_2, M \to \infty$ としたものに相当することを示せ．

略解

まず，$V_2 = nV_1$ となるには？について考察する．変成器の基本式から，

$$V_1 = \mathrm{j}\omega L_1 I_1 + \mathrm{j}\omega M I_2, \tag{8.55}$$
$$V_2 = \mathrm{j}\omega M I_1 + \mathrm{j}\omega L_2 I_2 \tag{8.56}$$

となる．式 (8.55) より，

$$I_1 = \frac{V_1 - \mathrm{j}\omega M I_2}{\mathrm{j}\omega L_1} \tag{8.57}$$

である．これを式 (8.56) に代入すると，

$$V_2 = \mathrm{j}\omega L_2 I_2 + \frac{M}{L_1} V_1 - \frac{\mathrm{j}\omega M^2}{L_1} I_2 \tag{8.58}$$

となる．ここで，二つのコイルが密結合 ($M = \sqrt{L_1 L_2}$) であれば，

$$\begin{aligned} V_2 &= \mathrm{j}\omega L_2 I_2 + \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_1} V_1 - \frac{\mathrm{j}\omega L_1 L_2}{L_1} I_2 \\ &= \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} V_1 = nV_1 \end{aligned} \tag{8.59}$$

となる．ここで，$n = \sqrt{L_2/L_1}$ は巻数比である[*7]．

次に，$I_2 = -I_1/n$ となるには？について考察する．電流については，

$$I_1 = \frac{V_1 - \mathrm{j}\omega M I_2}{\mathrm{j}\omega L_1} \tag{8.60}$$

より，次式が得られる．

$$I_1 = \frac{V_1 - \mathrm{j}\omega M I_2}{\mathrm{j}\omega L_1} = \frac{V_1}{\mathrm{j}\omega L_1} - \frac{M}{L_1} I_2 \tag{8.61}$$

二つのコイルが密結合 ($M = \sqrt{L_1 L_2}$) であり，巻数比が $n = \sqrt{L_2/L_1}$ であれば，

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1}{\mathrm{j}\omega L_1} - \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} I_2 \\ &= \frac{V_1}{\mathrm{j}\omega L_1} - nI_2 \end{aligned} \tag{8.62}$$

となる．ここで，$L_1 \to \infty$ であれば，

$$I_1 = -nI_2 \tag{8.63}$$

[*7] 電磁気学によりコイルのインダクタンスは巻数の二乗に比例する [8].

となる．但し，$n \to 0$ とならないように，巻数比 $n = \sqrt{L_2/L_1}$ を一定に保ったままで，$L_1 \to \infty$ にする必要があるため，L_2 も $L_2 \to \infty$ となる．また，同時に，$M = \sqrt{L_1 L_2}$ も $M \to \infty$ となる．

豆知識

豆知識

自己誘導の起電力

自己誘導による起電力と電流の関係を見てみよう．教科書などを見ると，以下の式が書いてある．

$$e = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{8.64}$$

ここで，i はコイルに流れる電流，L は自己インダクタンス，e は自己誘導による誘導起電力である (より厳密に言えば，誘導逆起電力である)．式 (8.64) にマイナスが付いている理由は，電磁誘導によって発生する起電力が，**図 8.29** に示すような逆起電力になるからである．

これに対し，電気回路のコイルの電圧と電流の関係式では，マイナスが無くなって

$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{8.65}$$

となっている．マイナスが付いたり，付かなかったり，はどういう理屈でそうなっているのであろうか？この違いが発生するのは，コイルの両端の電圧の電圧の捉え方に以下のような二通りがあるからである．

- 電磁誘導の物理に従って「起電力」と捉える
- 電気回路的に「電圧降下」と捉える

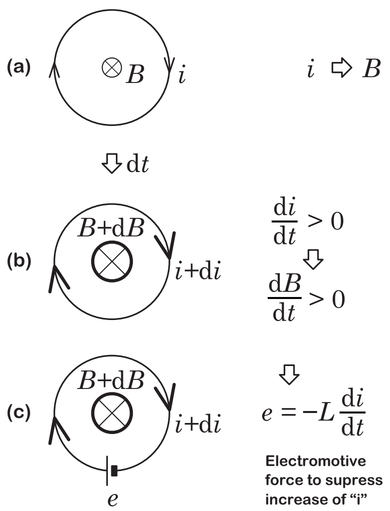


図 8.29 自己誘導起電力.

まずは，電磁誘導の物理に従った場合にマイナスがついている理由を**図 8.30** を使って説明しよう．

(a) のようにコイルに電流 i が流れ，$\mathrm{d}t$ 時間後に，$\mathrm{d}i$ だけ電流が増えたとする．そうすると，その電流の増加を阻止する方向に「起電力」が発生する，というのが自己誘導現象である．

現れる電圧を「起電力」として扱う以上は，電圧の正の向きを決めるときには，「起電力」のルールに従う必要がある．今回の場合，電流は上から下に流れる．従って，起電力として電圧がアップする方向は，この図では上から下ということになる．そのため，+ と − の印は，(b) のように付けている．

次に，この起電力を e という変数で表すとすると，どのように表すのが適当であるかを考える．(c) のように表してしまうと，どうなるであろうか？電流が $\mathrm{d}i$ だけ増えたときに，このように書いた e は正になる．この場合，もともとの電流 i を更に増やす方向に，この e が働くことになる．これは，自己誘導現象と逆である．一方，(d) のように表すと，もともとの電流 i とは逆の方向の電流を出す起電力として e が働くことになり，自己誘導現象を正しく表していることになる．

かなりくどい説明になったが，これが自己誘導の起電力を表す式に − が付いている理由である．

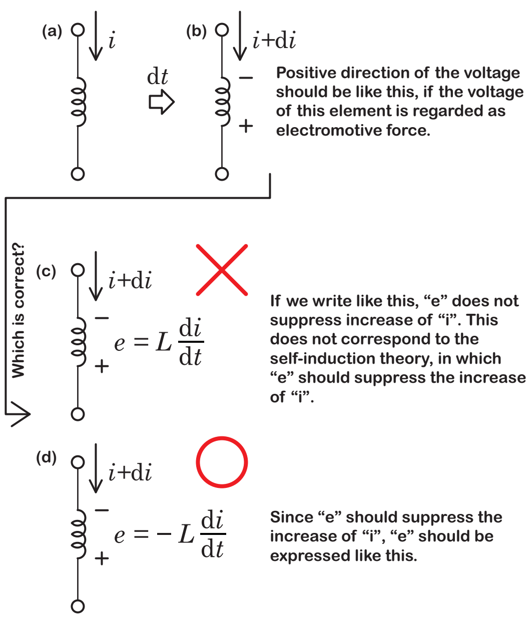


図 8.30 自己誘導による「起電力」の正の向きの設定と，起電力を表す式の前に − 符号を付ける論理.

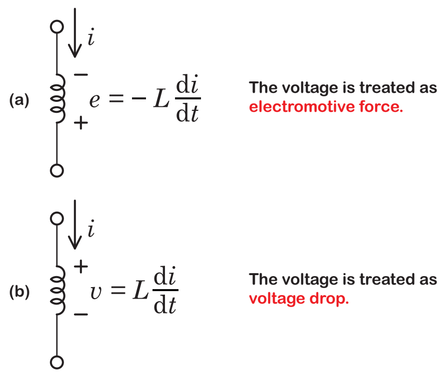


図 8.31 電気回路では自己誘導の起電力を電圧降下と解釈して扱うので，マイナスが無くなる．

電気回路では自己誘導の起電力を電圧降下と解釈する

次に，電気回路的に「電圧降下」として捉えた場合について説明する．コイルの自己誘導現象で現れる電圧は物理的には「起電力」である．しかし，この起電力は，外部から交流電流が流れ込んだ場合にのみ現れるため，外部の状況の如何に関わらず同じ電圧を出し続ける電源の起電力と比較すると，電気回路的に見たその挙動は，むしろ受動素子のそれに近い．そのため，電気回路では，コイルの自己誘導で現れる電圧を「起電力」とは解釈せずに，無理矢理「電圧降下」と解釈するのである．

コイルに発生する電位差を物理に従って「起電力」と解釈する場合には，**図 8.31** (a) のようになり，

$$e = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{8.66}$$

となる．これに対し，その同じ電位差を電気回路的に「電圧降下」と解釈する場合には，**図 8.31** (b) に示すように，同じ電位差がそこに発生していたとしても，電圧の正の向きの取り方が反対になるため，そこの電位差を表す式の符号が反転し，

$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{8.67}$$

となるのである．

但し，上記の論理は，回路図上で設定した電圧と電流の正の向きが能動素子，あるいは受動素子にとって自然な向きに設定されていることを前提としている (普通はそのように設定する)．もしも，あまのじゃくの設定をした場合には，上記の符号に関する論理と逆になる．あまのじゃくの設定とは，以下のような設定である．

× **電圧降下の場合のあまのじゃく設定**
電流の矢印の向きを低電位と設定した側から高電位と設定した側にする

× **起電力の場合のあまのじゃく設定**
電流の矢印の向きを高電位と設定した側から低電位と設定した側にする

特殊な事情がない限り，このような設定はしない．パズル的な課題である本章の「ドット印の読み方の練習」では，このような設定も含めている．

豆知識
相互誘導起電力の式の前の符号

相互誘導起電力:

$$\pm M\frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t} \quad (k = 1,2) \tag{8.68}$$

は，起電力が発生するコイル自身に流れる電流が起源ではなく，隣接する別のコイルに流れる電流が起源となっている．従って，

> **相互誘導による電圧成分は，自身に流れる電流の大小に依存しない**．

この性質は，電源のような能動素子の性質である．この理由により，相互誘導によって発生する電圧については，電源と同じように起電力として扱う．

なお，この起電力を表す式の前の符号が + なのか − なのかは，以下の二つの論理で決まる．まず，一次側の電流が原因となって二次側に誘導起電力が発生する場合について述べる．

相互誘導：一次側 ⇒ 二次側の場合

- **[1] 相互誘導の物理**
一次側の電流が正の方向に増えたとき，即ち，$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} > 0$ のとき，二次側に伝達される磁束密度の増加を抑制するような向きの起電力が二次側に発生する．このとき，**一次側の電流の正の向きをどちら向きに設定しているか**が影響してくる．
- **[2] 二次側の電圧の向きの設定**
二次側に発生した誘導起電力の向きが，二次側に設定した電圧の正の向きならば + 符号をつける．逆ならば − 符号をつける．即ち，**二次側の電圧の正**

の向きをどちら向きに設定しているかが影響してくる．

多少冗長だが，上記と逆，即ち，二次側の電流が原因となって一次側に誘導起電力が発生する場合については，以下のように，単純に一次側と二次側を入れ替えればよい．

相互誘導：一次側 ⇐ 二次側の場合

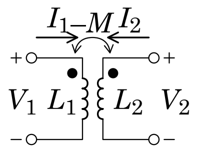
- **[1] 相互誘導の物理**
  二次側の電流が正の方向に増えたとき, 即ち, $\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} > 0$ のとき，一次側に伝達される磁束密度の増加を抑制するような向きの起電力が一次側に発生する．このとき，**二次側の電流の正の向きをどちら向きに設定しているか**が影響してくる．
- **[2] 一次側の電圧の向きの設定**
  一次側に発生した誘導起電力の向きが，一次側に設定した電圧の正の向きならば + 符号をつける．逆ならば − 符号をつける．即ち，**一次側の電圧の正の向きをどちら向きに設定しているか**が影響してくる．

豆知識

M 自身が負という考え方

この章では，相互インダクタンス M は常に正，ということで話を進めてきた．従って，想定している電位の高低とは逆の向きの電圧が発生する場合には，発生する電圧を表す相互誘導の式の前にマイナス符号を付けていた．状況によっては，上記のような場合を表現する手段として，**図 8.32** に示すように，相互誘導の係数 M の値自身が負である，という形で想定している電位の高低と発生する電圧の向きが逆であるということを表す場合もあるので注意されたし．このような表記法は，特殊な場合なので，この講義では M は全て正であるとしている．

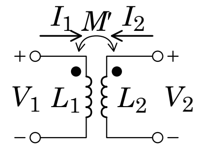
(a)



$$V_1 = \mathrm{j}\omega L_1 I_1 + \mathrm{j}\omega(-M)I_2$$
$$V_2 = \mathrm{j}\omega(-M)I_1 + \mathrm{j}\omega L_2 I_2$$

これらは等価

(b)



$$V_1 = \mathrm{j}\omega L_1 I_1 + \mathrm{j}\omega M' I_2$$
$$V_2 = \mathrm{j}\omega M' I_1 + \mathrm{j}\omega L_2 I_2$$

但し，$M' = -M < 0$

図 8.32 ドット印の読み方の練習 (5)．相互誘導係数の前にマイナス符号を付けるかわりに，相互誘導係数の値自身が負である，とする特殊な手法．

豆知識

ドットを付ける立場になったら ⋯

本章では，回路図の「ドットを読む」ことに重点を置いた．しかし，回路図を描かねばならない人間になった場合には，これだけでは困る．全ての人がそうなる必要は無いと思うが，描く側の人間になった場合，トッドはどうやって付ければよいのだろう？という疑問に対する回答を英語であるが引用して紹介しておく [9].

1. Arbitrarily select one terminal — say, the D terminal — of one coil and mark it with a dot.
2. Assign a current into the dotted terminal and label it i_{D}.
3. Use the right-hand rule to determine the direction of the magnetic field established by i_{D} inside the coupled coils and label this field ϕ_{D}.
4. Arbitrarily pick one terminal of the second coil — say, terminal A — and assign a current into this terminal, showing the current as i_{A}.
5. Use the right-hand rule to determine the direction of the flux established by i_{A} inside the coupled coils and label this flux ϕ_{A}.
6. Compare the directions of the two fluxes ϕ_{D} and ϕ_{A}. If the fluxes have the same reference direction, place a dot on the terminal of the second coil where the test current (i_{A}) enters. (In the Figure, the fluxes ϕ_{D} and ϕ_{A} have the same reference direction, and therefore a dot goes on terminal A.) If the fluxes have different reference directions, place a dot on the terminal of the second coil where the test current leaves.

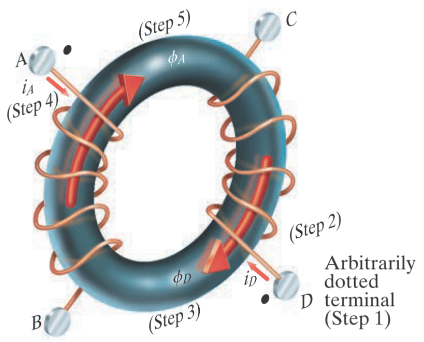


図 8.33 ドット印の描き方．**Nilsson** と **Riedel** の教科書から転載 [9].

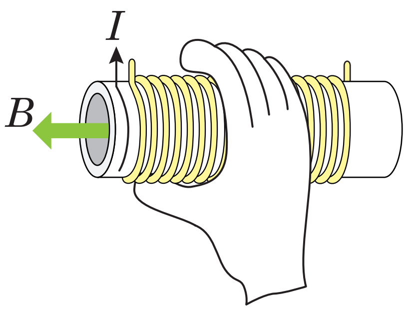


図 8.34 親指ルール．親指以外の四本の指の向きに電流が流れたとすると，発生する磁場の方向は親指の方向である．コイルの電線に流れる電流の向きに対して，右ねじの法則を適用しても同じである．

豆知識

親指ルール

　コイルに流れる電流と磁束密度の向きの関係は，**図 8.34** に示すような「親指ルール」で決まる．これについては大学に入学する前に学習しているはずである．

事前基盤知識確認事項

[1] 相互誘導の復習 (その 1)

図 8.35 に示した相互誘導回路において，同図に示したように電圧と電流の正の向きを設定する．一次側に図のような正弦波が入力されたとき，二次側の端子間電圧 v_2 を表す式が同図中の式のようになることを示せ．また，v_2 の自己誘導成分と相互誘導成分の波形が同図中に描かれたような波形となることを示せ．

略解

自己誘導成分

自己誘導成分は，単独のコイルと同様に扱えばよい．従って，$L_2 \mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t$ となる．これは，コイルの巻き方，一次側，二次側によらず同様である．但し，電圧と電流の正の向きとして，受動素子にとって逆の向きとなるような設定をしている場合には，$-L_k \mathrm{d}i_k/\mathrm{d}t$ となる ($k = 1,2$).

相互誘導成分

二次側の相互誘導の電圧成分を考える場合には，一次側に設定した電流の向きと，二次側に設定した電圧の向きが関与してくる．また，相互誘導成分は以下のように「誘導起電力」の概念に立ち戻って扱わなければならない．

1. 一次側電流が正方向に増える ($\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t > 0$)
2. 親指ルールにより，一次側の磁束密度が緑矢印の方向に増える
3. 二次側にもそれが伝わる
4. 相互誘導により二次側に誘導起電力が発生する．
5. その起電力を表す式は，$\pm M\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t$ どちらかである．
6. 符号の正負は，以下の二つで決まる．
   - 電磁誘導の原理 (誘導された二次側の磁束密度の増加を抑制しようとする)
   - 二次側端子のどちらが高電位のときに $v_2 > 0$ と設定したか
7. 電磁誘導の原理によると，この場合，誘導起電力の向きは，二次側の緑矢印の方向の磁束密度の増加を打ち消すような，即ち，上向きの磁束密度を増やす電流を流すような起電力である．
8. 親指ルールから，その起電力は，コイルの下から上に電流を流すような起電力である．
9. 即ち，電池の正極が上，負極が下，という起電力である．
10. v_2 の向きの設定として，上端子が高電位，下端子が低電位のときに $v_2 > 0$ としているので，現れる起電力の向きと合致している．従って，この起電力を v_2 の成分として表したときの式は，正の符号を用いた $+M\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t$ となる．

[2] 相互誘導の復習 (その 2)

図 8.35 に示した相互誘導回路において，同図に示したように電圧と電流の正の向きを設定する．一次側に図のような正弦波が入力されたとき，二次側の端子間電圧 v_2 を表す式が同図中の式のようになることを示せ．また，v_2 の自己誘導成分と相互誘導成分の波形が同図中に描かれたような波形となることを示せ．

略解

自己誘導成分

先ほどと同様なので省略する．

相互誘導成分

上の問題と全く同じ論理で考えればよいが，二次側の

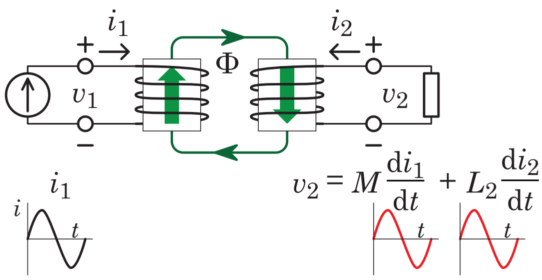


図 8.35 相互誘導の基本式の導出 (その 1).

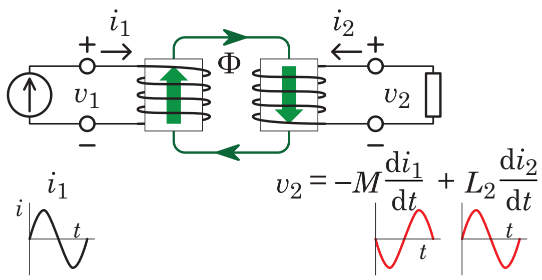


図 8.36 相互誘導の基本式の導出 (その 2).

コイルの巻き方が異なる点に注意されたし.

1. 一次側電流が正方向に増える ($\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t > 0$)
2. 親指ルールにより，一次側の磁束密度が緑矢印の方向に増える
3. 二次側にもそれが伝わる
4. 相互誘導により二次側に誘導起電力が発生する.
5. その起電力を表す式は，$\pm M\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t$ どちらかである.
6. 符号の正負は，以下の二つで決まる.
   - 電磁誘導の原理 (誘導された二次側の磁束密度の増加を抑制しようとする)
   - 二次側端子のどちらが高電位のときに $v_2 > 0$ と設定したか
7. 電磁誘導の原理によると，この場合，誘導起電力の向きは，二次側の緑矢印の方向の磁束密度の増加を打ち消すような，即ち，上向きの磁束密度を増やす電流を流すような起電力である.
8. 親指ルールから，その起電力は，コイルの上から下に電流を流すような起電力である.
9. 即ち，電池の正極が下，負極が上，という起電力である.
10. v_2 の向きの設定として，上端子が高電位，下端子が低電位のときに $v_2 > 0$ としているので，現れる起電力の向きとは逆である．従って，この起電力を v_2 の成分として表したときの式は，負の符号を用いた $-M\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t$ となる.

事後学習内容確認事項

A. 変成器の基本式

図 8.37 のフェーザ電圧 V_1，V_2，フェーザ電流 I_1，I_2 を用いて，破線で囲まれた変成器の基本式を書け．

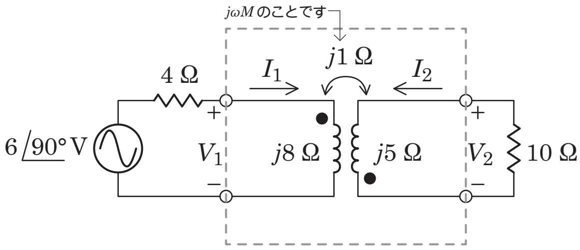


図 8.37 変成器の基本式に関する問題の図.

略解

電圧と電流の向き，及び，ドットの位置によく注意して，講義スライドや教科書を参考にして式を書くと，次式のようになる．

$$V_1 = j8I_1 - j1I_2, \tag{8.69}$$
$$V_2 = -j1I_1 + j5I_2. \tag{8.70}$$

B. 変成器を含む回路の計算

図 8.37 のように電源と抵抗が接続されているときの V_1，V_2，I_1，I_2 をフェーザ形式で求めよ．有効数字は 3 桁とする．

略解

式 (8.69), (8.70) に加えて，電源側（図ではトランスの左側）と負荷側（図ではトランスの右側）にて，それぞれ，次式が成り立つので，4 つの方程式から 4 つの未知数を決定できる．

$$j6 - V_1 = 4I_1, \tag{8.71}$$
$$V_2 = 10(-I_2). \tag{8.72}$$

式 (8.71) を式 (8.69) に用いて V_1 を消去し，式 (8.72) を式 (8.70) に用いて V_2 を消去すると，

$$j6 = (4 + j8)I_1 - jI_2, \tag{8.73}$$
$$0 = -jI_1 + (10 + j5)I_2. \tag{8.74}$$

式 (8.74) より，

$$I_1 = \frac{(10 + j5)}{j} I_2 = (5 - j10)I_2. \tag{8.75}$$

この式 (8.75) を式 (8.73) に代入して，

$$\begin{aligned} j6 &= (4 + j8)(5 - j10)I_2 - jI_2 \\ &= (100 - j)I_2 \\ &\approx 100I_2. \end{aligned}$$

ここで，100 に対して，大きさが 1 の j はほとんど無視できるとした[*8]．これより，

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{j6}{100} = j0.06 \\ &= 0.0600 \angle 90^\circ \text{ A} \\ &\text{もしくは,}\ \ 60.0 \angle 90^\circ \text{ mA.} \end{aligned}$$

また，式 (8.75) より，

$$\begin{aligned} I_1 &= (5 - j10) \times j0.06 = 0.6 + j0.3 \\ &= 0.6708 \angle 26.57^\circ \\ &= 0.671 \angle 26.6^\circ \text{ A} \\ &\text{もしくは,}\ \ 671 \angle 26.6^\circ \text{ mA.} \end{aligned}$$

出力電圧 V_2 は，

$$\begin{aligned} V_2 &= -10I_2 = -j0.6 \\ &= 0.600 \angle -90.0^\circ \text{ V.} \end{aligned}$$

V_1 は，式 (8.71) より，

$$\begin{aligned} V_1 &= j6 - 4I_1 = j6 - 4 \times (0.6 + j0.3) \\ &= -2.4 + j4.8 \\ &= 5.366 \angle 116.5^\circ \\ &= 5.37 \angle 117^\circ \text{V.} \end{aligned}$$

[*8] どんな時に「無視できる」のか？これについてあまり触れいている書き物は無いように思う．一つの判定基準として，$A+B$ なる計算をするときに B の大きさが A に対して 1/100 以下であれば，$A+B=A$ としても差し支え無い，と思って頂いたらよいと思う．

参考文献

[1] http://g-gauge.world.coocan.jp/transfmr.htm

[2] http://blog.livedoor.jp/t2000k/archives/50603462.html

[3] http://www.meppi.com/TransformerFactory/Pages/default.aspx

[4] J. W. Nilsson and S. A. Riedel: *Electric circuits 10th Edition* (Pearson Education, Harlow, 2015) p.212.

[5] http://www.tcp-ip.or.jp/~ishida96/ih-aichi/isan_wo_aruku/1996/1996-06_yosamisoshinsho.html

[6] http://www.martinloganowners.com/forum/showthread.php?4263-build-my-own-crossover

[7] http://hotplaza.soundhouse.co.jp/how_to/light/choukou/index.asp

[8] 後藤 憲一, 山崎 修一郎: 詳解 電磁気学演習 (共立出版, 東京, 1970) pp. 281-282.

[9] J. W. Nilsson and S. A. Riedel: *Electric circuits 10th Edition* (Pearson Education, Harlow, 2015) p.213.

第 9 章

回路の方程式：回路のグラフ，キルヒホフの法則，行列表現

本章では，いくつもの回路素子で構成された複雑な電気回路の任意の閉路に流れる電流や，任意の節点の電圧を求めるための以下の二つの理論を紹介する．

- 閉路電流法
- 節点電位法

この方法の中で，以下に示す電気回路の二大法則を使う．

- キルヒホッフの電流の法則 (第 1 法則)
- キルヒホッフの電圧の法則 (第 2 法則)

9.1　回路のグラフ

電気回路は，回路素子の存在を無視すると，**図 9.1** に示すように，節点 (node) と枝 (branch) によって構成されている．そこには，状況にもよるが，普通は，閉路 (loop) 構造が形成される．このような概念的な構造体をグラフ (graph) という．これから説明する電気回路の閉路電流法や節点電位法は，このグラフの理論に基づいているが，グラフ理論そのものは，電気回路学というよりは，純粋数学であるので，詳細は割愛する．

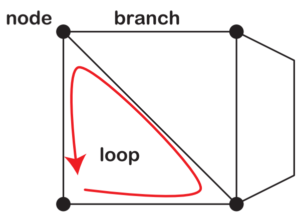


図 9.1 回路のグラフ (graph) と，節点 (node)，枝 (branch)，閉路 (loop).

9.2　キルヒホッフの法則

キルヒホッフの法則とは，以下の二つの法則である．

- 電流の法則 (第 1 法則)
  節点に流入する電流の和はそこから流出する電流の和と等しい．
- 電圧の法則 (第 2 法則)
  閉路上の起電力の和は電圧降下の和と等しい．

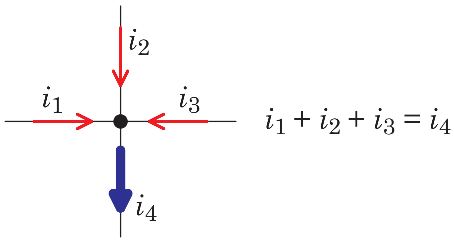


図 9.2 キルヒホッフの電流の法則 (第 1 法則)．Kirchhoff's current law (KCL).

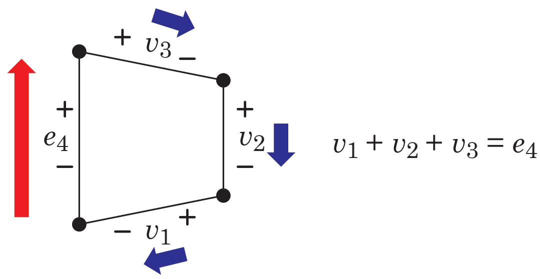


図 9.3 キルヒホッフの電圧の法則 (第 2 法則)．Kirchhoff's voltage law (KVL).

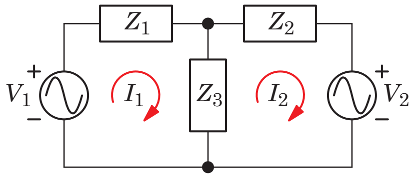


図 9.4 閉路電流法の例題回路.

これから述べる二種類の回路方程式の立て方は，全て，上記の二つの法則に基づいている.

9.3 閉路電流法

閉路電流法とは，以下のような理屈と手順により，複雑な回路の中の各閉路の電流を求める方法である.

- 各閉路の電流が求めるべき未知数となる
- 各閉路で KVL の式を作る
- 閉路の数だけ連立 KVL 方程式ができる
- 方程式の数と未知数の数が同じであるから，この連立方程式を解けば，未知数であった各閉路の電流が求められる

以下では，**図 9.4** に示すような具体的な回路への閉路電流法の適用例を示す.

9.3.1 閉路電流を割り振る

まず，閉路を同図のように決め，各閉路に閉路電流を割り振る (閉路電流の添え字が閉路の番号としている). ここでは，閉路 1 に I_1 が流れ，閉路 2 に I_2 が流れる，としている．なお，閉路を流れる電流の正の向きを図中の矢印のようにあらかじめ決めておく必要がある．このように矢印を描いた場合，この閉路内の電位の高低については，矢印の根元の方の方が高電位で，矢印の先の方が低電位としていることになる.

次に，閉路内に電圧源 (起電力) がある場合には，その起電力を表す変数 V が正 ($V>0$) のときに電源端子のどちらが高電位なのかを決めておく必要がある (場合によっては，あらかじめ指定されているかもしれない). 図中では，+ と − の印にて，下よりも上が高電位のときに正である，としている[*1].

9.3.2 各閉路で KVL

KVL は「閉路なら電圧は上がった分だけ下がる」という理屈であるから，各閉路内に存在する起電力の部分と，電圧降下の部分について，それぞれの和を取る.

閉路 1

- **起電力 (電圧上昇) の和**

  『 V_1 』
- **電圧降下の和**

  『 $Z_1 I_1 + Z_3(I_1 - I_2)$ 』

  ☞ Z_3 における電圧降下は，注目している閉路 1 の電流 I_1 だけではなく，隣り合う閉路 2 の電流も関与していることに留意すべし．その際，閉路 2 と閉路 1 の電流の向きにも注意すべし.

閉路 2

- **起電力 (電圧上昇) の和**

  『 $-V_2$ 』

  ☞ 閉路電流の向きと「起電力」の向きに注意すべし (脚注参照).
- **電圧降下の和**

  『 $Z_2 I_2 + Z_3(I_2 - I_1)$ 』

  ☞ 閉路 2 と閉路 1 の電流の向きにも注意すべし.

ここで，「上昇分＝降下分」という KVL 方程式を立てれば，各閉路について以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_1 I_1 + Z_3 (I_1 - I_2), \\ -V_2 &= Z_3 (I_2 - I_1) + Z_2 I_2. \end{aligned} \tag{9.1}$$

得られた式の右辺を各閉路電流についてまとめる.

$$\begin{aligned} V_1 &= (Z_1 + Z_3) I_1 + (-Z_3) I_2, \\ -V_2 &= (-Z_3) I_1 + (Z_2 + Z_3) I_2. \end{aligned} \tag{9.2}$$

この方程式を行列とベクトルの式にする.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \tag{9.3}$$

この式から $[I_1, I_2]$ を算出することで各閉路の電流を求めることが出来る．上式から，

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} *** \\ *** \end{bmatrix}. \tag{9.4}$$

[*1] 「電圧降下」と「起電力」とでは，その電圧を表す変数が正 >0 のときに，そこを流れる電流が正 >0 となる向きが異なる，ということに留意のこと.

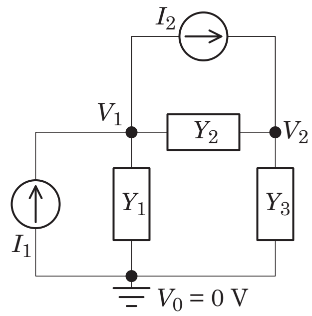


図 9.5 節点電位法の例題回路.

の形に変形する方法は線形代数の本に詳しく書かれているので，そちらを参考にして欲しい.

9.4 節点電位法

節点電位法とは，以下のような理屈と手順により，複雑な回路の中の各節点の電位を求める方法である.

- 各節点の電位が求めるべき未知数となる
- 各節点で KCL の式を作る
- 節点の数だけ連立 KCL 方程式ができる
- 方程式の数と未知数の数が同じであるから，この連立方程式を解けば，未知数であった各節点の電位が求められる

以下では，**図 9.4** に示す具体的な回路への閉路電流法の適用例を示す.

9.4.1 節点電位を割り振る

まず，どれか一つの節点を接地電位 (0 V) とする．次に，残りの各節点に節点電位を割り振る*2.

9.4.2 各節点で KCL，の前に

KCL は「入った分だけ出て行く (節点に溜まらない)」という理屈であるから，各節点で電流が流入している分の和と，流出している分の和が等しい，という等式を作る.

ここで，電流が流入している分とは，電流源がその節点につながっている場合である．その電流源の電流の向きがその節点に対して流出になっている場合には，符号が反対の電流が流入している，とする．即ち，流入分を表す式の中では，その電流変数の前にマイナス符号をつける．従って，「電流が流入している分」という表現は厳密には正しくなく，「その節点の電位とは関係無く，電流の出し入れが強制的に行われている成分」というのが正しい表現である (かなりくどい言い方だが).

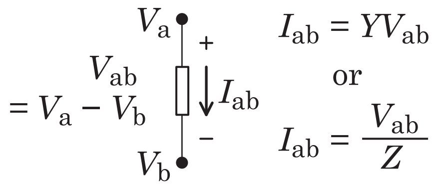


図 9.6 節点 a からアドミタンス Y を通って b に流出する電流と各節点の電位の関係.

一方，電流が流出している分とは，注目している節点から隣の節点へ，その二点間の電圧降下によって，アドミタンス (あるいはインピーダンス) を通って流れ出る電流である．例えば，**図 9.6** に示すように，注目している接点を a (その電位を V_a)，流出先の節点を b (その電位を V_b) とし，a から b に流れ出る電流を I_ab とする．このとき，端子 a から端子 b への電圧降下 V_ab は $V_\mathrm{a} - V_\mathrm{b}$ となる．節点 ab の間にあるアドミタンスが Y(インピーダンスを $Z = 1/Y$) であれば，オームの法則により，節点 a から流れ出る電流は,

$$I_\mathrm{ab} = YV_\mathrm{ab} = Y(V_\mathrm{a} - V_\mathrm{b}), \tag{9.5}$$

または,

$$I_\mathrm{ab} = \frac{V_\mathrm{ab}}{Z} = \frac{V_\mathrm{a} - V_\mathrm{b}}{Z} \tag{9.6}$$

となる.

9.4.3 各節点で KCL

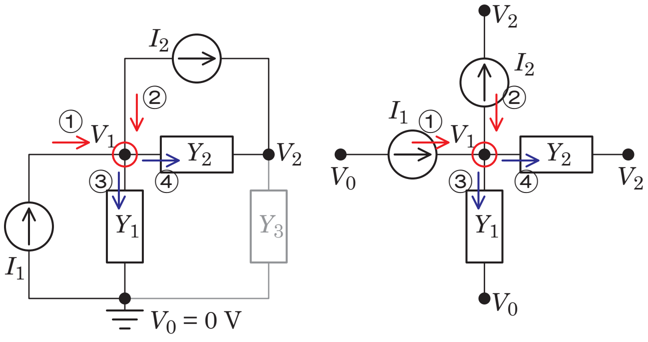
以下では，**図 9.5** に示した回路の各節点に対して，上記のような手順に従い，電流流入と電流流出の成分の書き下し作業を具体的に行う．なお，節点電位法で，ある節点周りの電流の流入と流出を考えるときは，**図 9.7** (a)，**図 9.8** (a) に示すように，「注目する節点の隣まで」だけを考えればよい．極端に言えば，**図 9.7** (b)，**図 9.8** (b) のように考えればよい，ということである.

節点 1 (**図 9.7** を参照)

- **電流流入の和=①+②**

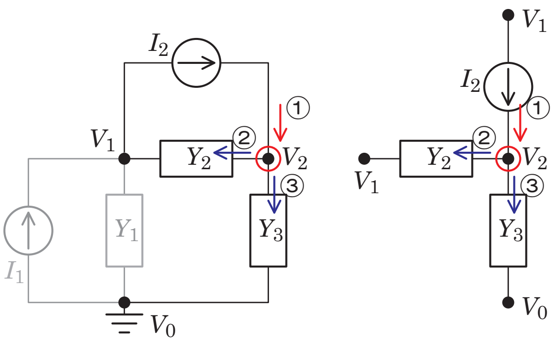
---

*2 節点電位の添え字を節点番号としている.



(a) (b)

図 9.7 節点電位法例題回路 (**図 9.5**) の節点 1 の周りだけを考えているときの頭の中の描像.



(a) (b)

図 9.8 節点電位法例題回路 (**図 9.5**) の節点 2 の周りだけを考えているときの頭の中の描像.

『 I_1 + $(-I_2)$ 』

☞ I_2 は流入する向きとは逆の電流源なので，マイナス符号を付けている.

- **電流流出の和=③+④**

  『 $Y_1(V_1-V_0)$ + $Y_2(V_1-V_2)$ 』

  ☞ ③の成分をわざわざ $Y_1(V_1-V_0)$ と書いているが，$V_0=0$ であるあから，慣れてきたらいきなり Y_1V_1 と書いたらよい.

節点 2 (**図 9.8** を参照)

- **電流流入の和=①**

  『 I_2 』

- **電流流出の和=②+③**

  『 $Y_2(V_2-V_1)$ + $Y_3(V_2-V_0)$ 』

ここで,「流入分＝流出分」という KCL 方程式を立てれば，各閉路について以下の式が得られる.

$$
\begin{aligned}
I_1 - I_2 &= Y_1\,V_1 + Y_2\,(V_1 - V_2), \\
I_2 &= Y_2\,(V_2 - V_1) + Y_3\,V_2.
\end{aligned}
\tag{9.7}
$$

得られた式の右辺を各節点電位についてまとめる.

$$
\begin{aligned}
I_1 - I_2 &= (Y_1 + Y_2)\,V_1 + (-Y_2)\,V_2, \\
I_2 &= (-Y_2)\,V_1 + (Y_1 + Y_2)\,V_2.
\end{aligned}
\tag{9.8}
$$

この方程式を行列とベクトルの式にする.

$$
\begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_1 + Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}. \tag{9.9}
$$

この式から $[V_1, V_2]$ を算出することで各閉路の電流を求めることが出来る．上式から,

$$
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} *** \\ *** \end{bmatrix}. \tag{9.10}
$$

の形に変形する方法は線形代数の本に詳しく書かれているので，そちらを参考にして欲しい.

9.5 計算練習

課題

図 9.9 の各閉路を流れる電流をフェーザ形式で表したものを I_1，I_2 とする．閉路電流法を用いて I_1，I_2 を求めよ．なお，解答するときのフェーザ形式の表記法としては，直交座標系でも，極座標形でもどちらでもよい．有効数字は 3 桁とする．

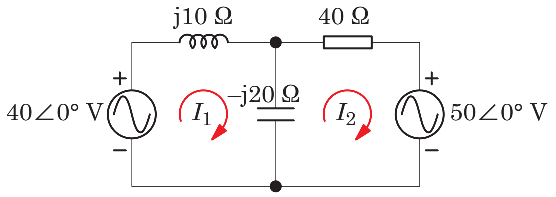


図 9.9 閉路電流法に関する問題の図

略解

閉路方程式は以下のようになる．

$$40\angle 0^\circ = \mathrm{j}10 I_1 + (-\mathrm{j}20)(I_1 - I_2), \tag{9.11}$$
$$-50\angle 0^\circ = 40 I_2 + (-\mathrm{j}20)(I_2 - I_1). \tag{9.12}$$

I_1，I_2 についてまとめると，以下のようになる．

$$40 = -\mathrm{j}10 I_1 + \mathrm{j}20 I_2, \tag{9.13}$$
$$-50 = \mathrm{j}20 I_1 + (40 - \mathrm{j}20) I_2. \tag{9.14}$$

数値を簡単化すると，以下のようになる．

$$4 = -\mathrm{j} I_1 + \mathrm{j}2 I_2, \tag{9.15}$$
$$-5 = \mathrm{j}2 I_1 + (4 - \mathrm{j}2) I_2. \tag{9.16}$$

これを行列形式で書けば，以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{j} & \mathrm{j}2 \\ \mathrm{j}2 & 4-\mathrm{j}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \tag{9.17}$$

従って，求めるべき $[I_1, I_2]$ は，次式で得られる．

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{j} & \mathrm{j}2 \\ \mathrm{j}2 & 4-\mathrm{j}2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}. \tag{9.18}$$

余因子を用いた計算をするために，行列式と余因子を求めておく．

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} -\mathrm{j} & \mathrm{j}2 \\ \mathrm{j}2 & 4-\mathrm{j}2 \end{vmatrix} = 2 - \mathrm{j}4 \\ &= 4.472\angle -63.43^\circ,\end{aligned} \tag{9.19}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} 4 & \mathrm{j}2 \\ -5 & 4-\mathrm{j}2 \end{vmatrix} = 16 + \mathrm{j}2 \\ &= 16.12\angle 7.125^\circ,\end{aligned} \tag{9.20}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \begin{vmatrix} -\mathrm{j} & 4 \\ \mathrm{j}2 & -5 \end{vmatrix} = -\mathrm{j}3 \\ &= 3\angle -90^\circ.\end{aligned} \tag{9.21}$$

以上より，

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{16.12\angle 7.125^\circ}{4.472\angle -63.43^\circ} \\ &= 3.605\angle 70.56^\circ,\end{aligned} \tag{9.22}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3\angle -90^\circ}{4.472\angle -63.43^\circ} \\ &= 0.6708\angle -26.57^\circ.\end{aligned} \tag{9.23}$$

従って，求めるべき I_1，I_2 は，

$$I_1 = (3.61\angle 70.6^\circ)\ \mathrm{A}, \tag{9.24}$$
$$I_2 = (0.671\angle -26.6^\circ)\ \mathrm{A} \tag{9.25}$$

となる．

課題

図 9.10 の節点 1 と節点 2 の電位を V_1，V_2 とする．節点電位法を用いて V_1，V_2 を求めよ．なお，解答するときのフェーザ形式の表記法としては，直交座標系でも，極座標形でもどちらでもよい．有効数字は 3 桁とする．

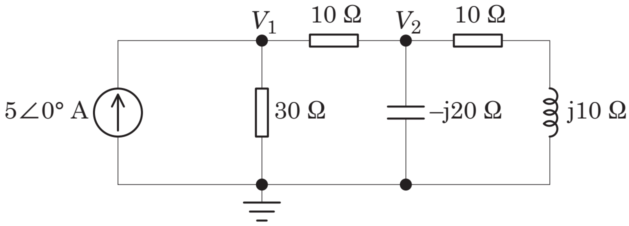


図 9.10 節点電位法に関する問題の図

略解

節点方程式をつくると以下のようになる．

$$5 = \frac{V_1 - 0}{30} + \frac{V_1 - V_2}{10}, \tag{9.26}$$

$$0 = \frac{V_2 - V_1}{10} + \frac{V_2 - 0}{-\mathrm{j}20} + \frac{V_2 - 0}{10 + \mathrm{j}10}. \tag{9.27}$$

これを整理すると，以下のようになる．

$$150 = 4V_1 - 3V_2, \tag{9.28}$$

$$0 = -2V_1 + 3V_2. \tag{9.29}$$

これは，行列計算などをしなくても簡単に解けて，

$$V_1 = 75.0\ \mathrm{V}, \tag{9.30}$$

$$V_2 = 50.0\ \mathrm{V} \tag{9.31}$$

となる．

豆知識

豆知識

交流なのに「流入」「流出」って？

交流電流の場合,「流入」と「流出」が常に時間とともに入れ替わっているので，回路に矢印を描いてそのどちらかにするということに違和感を覚える人がいるかもしれない．至極ごもっともである．電圧の「高電位側」と「低電位側」というのもおかしな話である．

交流回路で電流の流入・流出や電位の高低に言及しているときは，ある瞬間について言及しているのだと思って欲しい．ある時刻に限定して，電流の状況をみれば,「流入」,「流出」,「流入出無し」のどれかになっており，電圧についても，二つの節点間の電位差を見れば，どちらかが「高電位側」，どちらかが「低電位側」，もしくは「両方とも同電位」のどれかになっているからである．

豆知識

2×2 の行列の逆問題

未知の閉路電流が二つの閉路方程式，もしくは未知の接点電位が二つの節点方程式の場合，解くべき方程式は，一般に以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{9.32}$$

このとき，$[x_1,x_2]$ は，次式で与えられる．

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \tag{9.33}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \tag{9.34}$$

ここで,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \tag{9.35}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 & b \\ y_2 & d \end{vmatrix}, \tag{9.36}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & y_1 \\ c & y_2 \end{vmatrix} \tag{9.37}$$

である．

豆知識

3×3 の行列の逆問題

未知の閉路電流が三つの閉路方程式，未知の節点電位が三つの節点方程式の場合には，解くべき方程式は一般に以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{9.38}$$

このとき，$[x_1,x_2,x_3]$ は，次式で与えられる．

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \tag{9.39}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{9.40}$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{9.41}$$

ここで,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{9.42}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & a_{13} \\ y_2 & a_{22} & a_{23} \\ y_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{9.43}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 & a_{13} \\ a_{21} & y_2 & a_{23} \\ a_{31} & y_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{9.44}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & y_3 \end{vmatrix} \tag{9.45}$$

である．

以上のように，求めたい未知数を計算するためには，行列式を計算する必要がある．線形代数では，行列式を計算する方法として「たすき掛け方式」を学習すると思うが，たすき掛け方式は 4×4 以上の行列式には適用できないので，むしろ下記のような一般的な計算法を身につけておいた方がよいかと思う．

豆知識

4×4 以上の行列式と余因子展開

4×4 以上の行列式の計算の場合には，余因子展開を使って計算した方が得策であると思われる．なお，この余因子展開を使った計算法は任意の行数・列数に対して行えるので，4×4 未満の行列式に対しても成り立つ．試験の時のように，手計算で行う場合，特に要素が複素数の場合には，3×3 であっても余因子展開を使った方が,

豆知識

たすき掛けを使うようりも計算間違いをする確率が低くなると思われる．強制はしないが，3×3 であっても余因子展開を使うことを勧める (試験の時は).

現代では，そんなことをしなくても，MATLAB 等を使えば，行列式の値を出してくれるので，実務段階で使うときには，手計算はまずしないであろう．しかし，学習する立場にある学生は，このような計算手法があることを知識として知っており，かつ，手計算でやれ，と言われれば出来るようになっておく必要がある．

余因子展開の説明の前に，まず「余因子」とは何か，を説明しておく．正方行列においてある要素 a_{ij} に注目し，その要素が含まれている行と列を 取り去って作られる小行列式に $(-1)^{i+j}$ を乗じたものを (i,j)-余因子という．ここでは，$|M|_{ij}$ で表すことにする．

余因子展開とは，ある正方行列 M の行列式 $|M|$ が，この余因子を使って，次式で与えられるというものである．

$$|M| = a_{1j}|M|_{1j} + a_{2j}|M|_{2j} + \cdots + a_{nj}|M|_{nj} \tag{9.46}$$

もしくは，

$$|M| = a_{i1}|M|_{i1} + a_{i2}|M|_{i2} + \cdots + a_{in}|M|_{in} \tag{9.47}$$

ここで，前者は，ある j 列に関して，その列の要素と余因子の積の和を取ったもの，ということを表す式である．後者は，ある i 行に関して，その行の要素と余因子の積の和を取ったもの，ということを表している．$n\times n$ の場合を表すための一般式を見ても「ピン」と来ないかもしれないので，4×4 の具体例を**図 9.11** に示しておく．

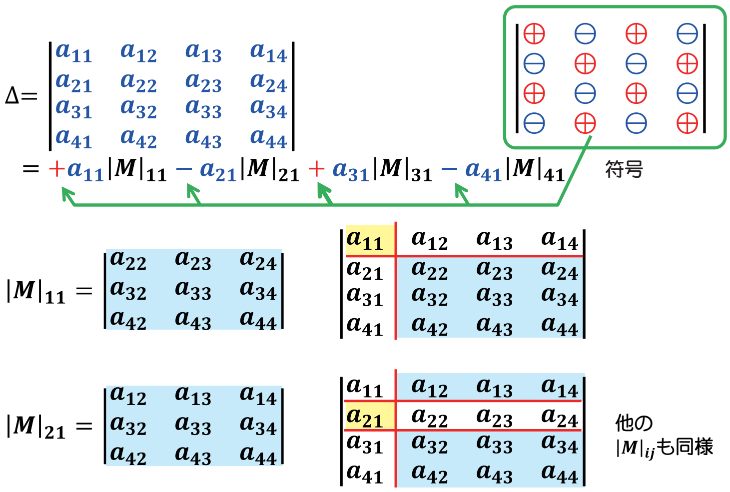


図 9.11 余因子展開の説明図.

事前基盤知識確認事項

[1] キルヒホッフの電流の法則

キルヒホッフの電流の法則とは？

略解

「一つの節点に流入する電流の和は，そこから流出する電流の和と等しい」である．要するに，「入った分だけ出て行く」「そこに溜まらない」という理屈である．

[2] キルヒホッフの電圧の法則

キルヒホッフの電圧の法則とは？

略解

「一つの閉路上の起電力の和は，電圧降下の和と等しい」である．要するに，ループを構成していれば，そのループ上に電位の高低があっても，一周すればもとの電位と同じところに戻る，という理屈である．

[3] 方程式の解

連立方程式が解ける条件を述べよ．

略解

未知数と同じ個数の独立した方程式があること．

[4] 余因子展開

本章では，行列式の計算を多用する．クラメルの公式でもよいが，3×3 だけにしか通用しない．どのような行列でも対応できる余因子展開の学習をきちっとしているかどうかを確認する．以下の行列 $\boldsymbol{M}$ の行列式 $|\boldsymbol{M}|$ を余因子展開法によって計算せよ．

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

略解

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{M}| &= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 2\left\{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right\} \\
&\quad +3\left\{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right\} \\
&= 2\{1+(-1)\} \\
&\quad +3\{(-1)+1\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

事後学習内容確認事項

課題

A. 閉路電流法

図 9.12 の各閉路に流れる閉路電流をフェーザ形式で表したものを I_1，I_2，I_3 とする．閉路電流法を用いて I_1，I_2，I_3 の値を求めよ．なお，解答するときのフェーザ形式の表記法としては，直交座標系でも，極座標形でもどちらでもよい．有効数字は 3 桁とする．

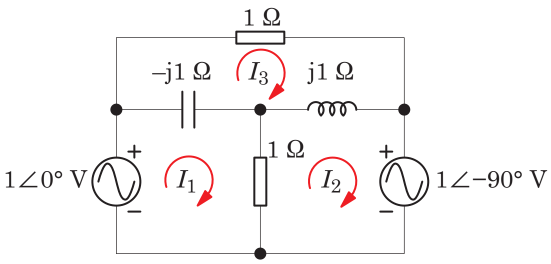


図 9.12 閉路電流法に関する問題の図

略解

各閉路電流の向きによる符号の違いを考慮して閉路電流方程式をたてると，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
1\angle 0^\circ &= (1-\mathrm{j})I_1 + (-I_2) + (-\mathrm{j})(-I_3),\\
-1\angle -90^\circ &= (-I_1) + (1+\mathrm{j})I_2 + \mathrm{j}(-I_3),\\
0 &= (-\mathrm{j})(-I_1) + \mathrm{j}(-I_2) + (1+\mathrm{j}-\mathrm{j})I_3.
\end{aligned}
$$

書き直すと，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
1 &= (1-\mathrm{j})I_1 - I_2 + \mathrm{j}I_3,\\
\mathrm{j} &= -I_1 + (1+\mathrm{j})I_2 - \mathrm{j}I_3,\\
0 &= \mathrm{j}I_1 - \mathrm{j}I_2 + I_3.
\end{aligned}
$$

行列形式で書くと，次のようになる．

$$
\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{j} & -1 & \mathrm{j} \\ -1 & 1+\mathrm{j} & -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & -\mathrm{j} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}.
$$

次に，I_1, I_2, I_3 を求めるために，行列式 $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ を計算しておく．

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 1-\mathrm{j} & -1 & \mathrm{j} \\ -1 & 1+\mathrm{j} & -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & -\mathrm{j} & 1 \end{vmatrix} = 1,
$$

$$
\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \mathrm{j} \\ \mathrm{j} & 1+\mathrm{j} & -\mathrm{j} \\ 0 & -\mathrm{j} & 1 \end{vmatrix} = 2+\mathrm{j}3,
$$

$$
\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1-\mathrm{j} & 1 & \mathrm{j} \\ -1 & \mathrm{j} & -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3+\mathrm{j}2,
$$

$$
\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1-\mathrm{j} & -1 & 1 \\ -1 & 1+\mathrm{j} & \mathrm{j} \\ \mathrm{j} & -\mathrm{j} & 0 \end{vmatrix} = 1+\mathrm{j}.
$$

これより，求めるべき閉路電流は，以下の通りとなる．

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = (2.00+\mathrm{j}3.00)\ \mathrm{A},\\
I_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = (3.00+\mathrm{j}2.00)\ \mathrm{A},\\
I_3 &= \frac{\Delta_3}{\Delta} = (1.00+\mathrm{j}1.00)\ \mathrm{A}.
\end{aligned}
$$

課題

B. 接点電位法

図 9.13 の回路は，**図 9.12** の回路と同じである．今度は，この回路の閉路電流を節点電圧法を用いた次の要領で求めよう．この場合も，解答するときのフェーザ形式の表記法としては，直交座標系でも極座標形でもどちらでもよい．有効数字は 3 桁とする．

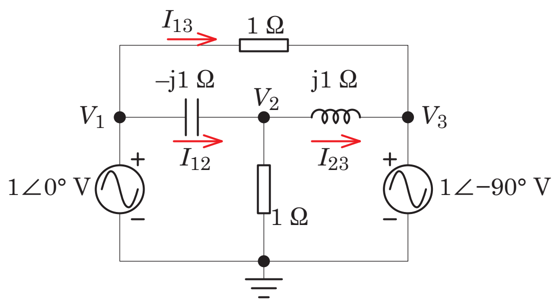


図 9.13 節点電圧法に関する問題の図

問 1

節点 1 から節点 2 に向かって流れる電流を I_{12}, 節点 2 から節点 3 に向かって流れる電流を I_{23}, 節点 1 から節

点 3 に向かって流れる電流を I_{13} とするとき，I_{12}, I_{23}, I_{13} を I_1, I_2, I_3 を用いて表せ.

問 2

上の問 1 で定義した I_{12}, I_{23}, I_{13} と V_1, V_2, V_3 との間に成り立つ関係式（オームの法則）を書け.

問 3

V_1, V_2, V_3 を節点電圧法で求めよ.

問 4

問 1, 問 2, 問 3 の結果から，I_1, I_2, I_3 を求めよ.

略解

問 1

節点間の電流は，各閉路で定義した閉路電流の向きを考慮した和であるから，以下のようになる.

$$I_{12} = I_1 - I_3, \tag{9.48}$$
$$I_{23} = I_2 - I_3, \tag{9.49}$$
$$I_{13} = I_3. \tag{9.50}$$

問 2

(節点間の電位差)=(節点間のインピーダンス)×(節点間電流) というオームの法則が成り立つから，求める式は以下の通りである.

$$I_{12} = \frac{V_1 - V_2}{-\mathrm{j}}, \tag{9.51}$$
$$I_{23} = \frac{V_2 - V_3}{\mathrm{j}}, \tag{9.52}$$
$$I_{13} = \frac{V_1 - V_3}{1}. \tag{9.53}$$

問 3

節点 1 と節点 3 については，接地電位となる接点との間に電圧の判っている電圧源がつながっているだけなので，次式がすぐに得られる.

$$V_1 = 1, \tag{9.54}$$
$$V_3 = -\mathrm{j}. \tag{9.55}$$

節点 2 については，電流源がつながっていないので，全て流れ出ると仮定した電流の総和がゼロという以下のような方程式を立てることになる.

$$0 = \frac{V_2 - V_1}{-\mathrm{j}} + \frac{V_2}{1} + \frac{V_2 - V_3}{\mathrm{j}}. \tag{9.56}$$

これを書き直すと，以下のようになる.[*3]

$$0 = -\mathrm{j}V_1 + V_2 + \mathrm{j}V_3. \tag{9.57}$$
$$\tag{9.58}$$

式 (9.54) と式 (9.55) の関係を用いて，式 (9.57) の V_1, V_3 を消去すると，以下のようになる.

$$\begin{aligned} 0 &= -\mathrm{j}1 + V_2 + \mathrm{j}(-\mathrm{j}), \\ &= -\mathrm{j} + V_2 + 1. \end{aligned}$$

よって，V_2 は，以下のようになる.

$$V_2 = \mathrm{j} - 1.$$

まとめると，求めるべき節点電圧は以下の通りとなる.

$$\begin{aligned} &V_1 = 1.00\ \mathrm{V}, \\ &V_2 = (-1.00 + \mathrm{j}1.00)\ \mathrm{V}, \\ &V_3 = -\mathrm{j}1.00\ \mathrm{V}. \end{aligned}$$

問 4

得られた各節点電圧を式 (9.51), 式 (9.52), 式 (9.53) に代入すると，次式を得る.

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{V_1 - V_2}{-\mathrm{j}} \\ &= \frac{1 - (\mathrm{j} - 1)}{-\mathrm{j}} = \frac{2 - \mathrm{j}}{-\mathrm{j}} = 1 + \mathrm{j}2, \\ I_{23} &= \frac{V_2 - V_3}{\mathrm{j}} \\ &= \frac{(\mathrm{j} - 1) - (-\mathrm{j})}{\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{j}2 - 1}{\mathrm{j}} = 2 + \mathrm{j}, \\ I_{13} &= \frac{V_1 - V_3}{1} \\ &= \frac{1 - (-\mathrm{j})}{1} = 1 + \mathrm{j}. \end{aligned}$$

式 (9.48), 式 (9.49), 式 (9.50) を用いると，次式を得る.

$$I_1 - I_3 = 1 + \mathrm{j}2, \tag{9.59}$$
$$I_2 - I_3 = 2 + \mathrm{j}, \tag{9.60}$$
$$I_3 = 1 + \mathrm{j}. \tag{9.61}$$

[*3] 左辺がゼロなので，右辺を定数倍した等価な式が無数に存在することに注意せよ．例えば，式変形の仕方が異なると，$0 = V_1 + \mathrm{j}V_2 - V_3$ という形にもなる.

式 (9.59) と式 (9.61) より,

$$\begin{aligned} I_1 &= 1 + \mathrm{j}2 + I_3 = 1 + \mathrm{j}2 + 1 + \mathrm{j} \\ &= 2 + \mathrm{j}3. \end{aligned}$$

式 (9.60) と式 (9.61) より,

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 + \mathrm{j} + I_3 = 2 + \mathrm{j} + 1 + \mathrm{j} \\ &= 3 + \mathrm{j}2. \end{aligned}$$

まとめると,

$$\begin{aligned} I_1 &= (2.00 + \mathrm{j}3.00)\ \mathrm{A}, \\ I_2 &= (3.00 + \mathrm{j}2.00)\ \mathrm{A}, \\ I_3 &= (1.00 + \mathrm{j}1.00)\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

となり，確かに前問で閉路電流法を用いて求めた I_1, I_2, I_3 と同じになっていることが確認できる.

第 10 章

回路に関する諸定理

本章では，以下の回路に関する諸定理を学習する．

- **等価電源の定理**
  a. **テブナンの定理**
  b. **ノートンの定理**
- **最大電力供給の定理（インピーダンス整合）**

また，これまで学んだ電気回路の概念の応用編として，陥りやすい誤りなどに関する指摘として，以下の点について触れる．

- 電圧源の並列接続
- 電流源の直列接続

以下の定理類は，当たり前と思っていることに，きちっと理屈を付けたり，名称を付けただけのことであるので，あまり深入りはしないことにする．

重ね合わせ，双対性，相反定理，補償定理

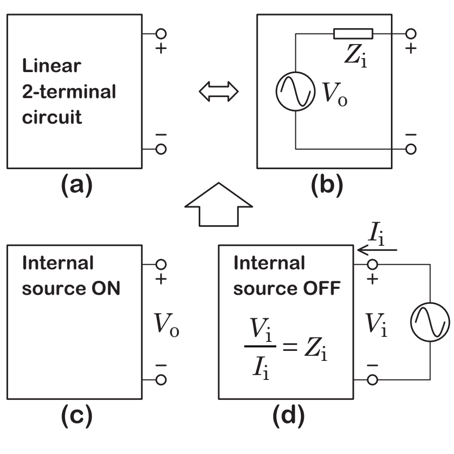


図 10.1 テブナンの定理の概念図．線形二端子回路 (a) は，(b) の回路と等価である．但し，(c) 開放電圧が V_o であり，(d) 内部インピーダンスが Z_i であるとする．

10.1　等価電源の定理

等価電源の定理とは，電源回路が以下に複雑であっても，1 個の電圧源と 1 個のインピーダンスの直列接続で表される (テブナンの定理)，もしくは，1 個の電流源と 1 個のアドミタンス 1 個の並列接続で表される (ノートンの定理)，というものである．

10.1.1　テブナン (Thevenin) の定理

テブナンの定理とは，以下の通りである．

> 線形二端子回路の**開放電圧が** V_o であり，**内部インピーダンスが** Z_i であるとき，その回路は，起電力が V_o の電圧源とインピーダンス Z_i の直列回路と等価である．

10.1.2　テブナン (Thevenin) の定理の例題

図 10.2 (a) に示すような回路をテブナンの定理を用いて，**図 10.2** (b) に示すような回路に変換してみよう．

まず，内部インピーダンスを求める．この問題では，簡単のために抵抗しかない回路を想定しているが，一般のインピーダンスの場合も，計算が複素計算になるだけであり，原理原則は同じである．内部インピーダンスを求めるときは，電源回路内の純粋電源は全て OFF とする．即ち，電圧源は短絡とし，電流源は開放とする．このときの，電源端子 cd から電源側を見たときのインピーダンスが内部インピーダンスである．

電源を全て OFF にした回路を描くと，**図 10.3** のようになる．この回路の合成インピーダンス (この場合は合成抵抗) を求めれば，それが内部インピーダンスとなる．計算は省略するが，

$$R_\mathrm{i} = 4\ \Omega \tag{10.1}$$

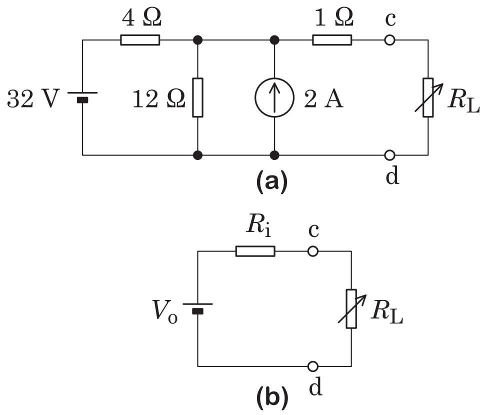


図 10.2 テブナンの定理の例題.

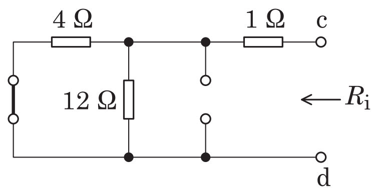


図 10.3 テブナンの定理の例題において，内部の電源を全て OFF して，内部インピーダンスを求めるときの回路の状態.

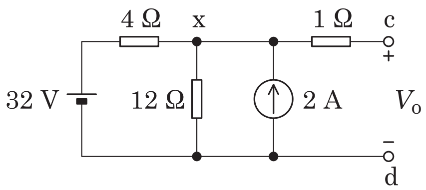


図 10.4 テブナンの定理の例題において，内部の電源を全て ON して，開放電圧を求めるときの回路の状態．端子 cd が開放の場合，端子 c に接続されている 1 Ω の抵抗には電流が流れない (=電圧降下がない) ことに留意すること.

となる.

次に，開放電圧 V_o を求める．開放電圧を求めるときは，内部電源は全て ON にして，電源端子には負荷を接続しない (即ち，端子から電流が出たり，入ったりしない) という状態で端子 cd 間の電圧を求める．この状態の回路図を描くと，**図 10.4** のようになる．このとき注意しなければならない点は，1 Ω の抵抗の両端の電圧である．この抵抗の右側の端子 c は，どこにも接続されていないので，この端子 c に電流の流入・流出は無い．従って，端子 c の左側の抵抗にも電流は流れない．ならば，オームの法則により，この抵抗の両端には電位差が無い (抵抗の右側と左側は同電位)，という点を理解するようにして欲しい．また，同じ理由により，この 1 Ω の抵抗の左側の節点に流れ込む 2 A の電流は，右側の 1 Ω の抵抗側に分岐することはない[*1].

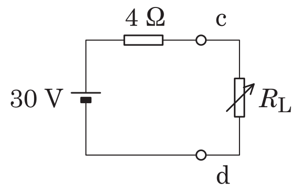


図 10.5 テブナンの定理の例題の等価回路.

以上の点を理解した上で，節点電位法などを用いて端子 cd の電圧 V_{cd} を求めれば，それが開放電圧 V_o となる．先ほどの復習であるが，1 Ω の抵抗の両端が同電位ならば，V_{cd} は V_{xd} と等しい．従って，開放電圧 V_o を求めたければ，節点電位法で V_{xd} を求めればよい.

まず，基準節点を d とする．即ち，節点 d の電位 V_d を 0 V とする．端子 xd 間の電位差は，$V_{xd} = V_x - V_d = V_x$ であるから，V_x を求めればよいことになる．節点 x において「流入=流出」という節点方程式を (多少くどい形で) 書けば，以下のようになる.

$$2 = \frac{V_x - 32}{4} + \frac{V_x - V_d}{12}. \tag{10.2}$$

$V_d = 0$ であることを用いれば，容易に

$$V_x = 30 \text{ V} \tag{10.3}$$

と求められる．この値が求めるべき V_o の値である.

従って，テブナンの定理によって等価回路を描けば，**図 10.5** のようになる.

10.1.3　ノートン (Norton) の定理

ノートンの定理とは，以下の通りである.

> 線形二端子回路の**短絡電流が** I_s であり，**内部インピーダンスが** Z_i であるとき，その回路は，出力電流が I_s の電流源とインピーダンス Z_i の並列回路と等価である.

[*1] これまでの経験で，多くの学生が正しく理解していないので，くどいようだが，但し書きを書いた.

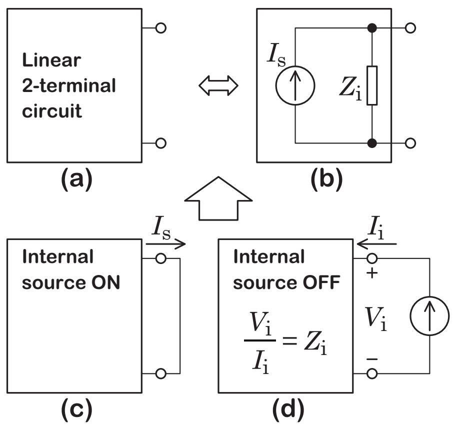


図 10.6 ノートンの定理の概念図．線形二端子回路 (a) は，(b) の回路と等価である．但し，(c) 短絡電流が I_s であり，(d) 内部インピーダンスが Z_i であるとする．

なお，かなりくどいようだが，$Y_i = 1/Z_i$ というアドミタンスを想定し，以下のように言っても同じである．

> 線形二端子回路の**短絡電流が** I_s であり，**内部アドミタンスが** Y_i であるとき，その回路は，出力電流が I_s の電流源とアドミタンス Y_i の並列回路と等価である．

10.1.4 ノートン (Norton) の定理の例題

図 10.7 (a) に示すような回路をテブナンの定理を用いて，**図 10.7** (b) に示すような回路に変換してみよう．

まず，内部インピーダンスを求める．内部インピーダンスを求めるときは，電源回路内の純粋電源は全て OFF とする．即ち，電圧源は短絡とし，電流源は開放とする．このときの，電源端子 cd から電源側を見たときのインピーダンスが内部インピーダンスである．

電源を全て OFF にした回路を描くと，**図 10.8** のようになる．この回路の合成インピーダンス (この場合は合成抵抗) を求めれば，それが内部インピーダンスとなる．計算は省略するが，

$$R_i = 4\ \Omega \tag{10.4}$$

となる．

次に，短絡電流 I_s を求める．短絡電流を求めるときは，内部電源は全て ON にして，電源端子間は導線でつながっている，という状態で端子 c から端子 d に向かって流れる電流を求める．この状態の回路図を描くと，図

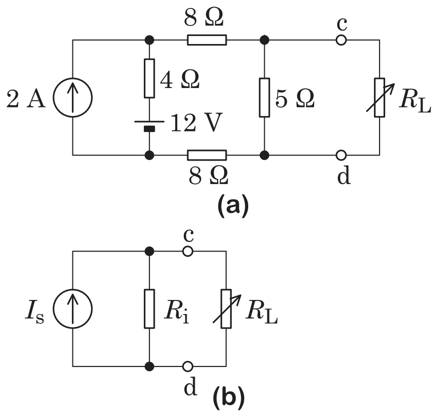


図 10.7 ノートンの定理の例題．

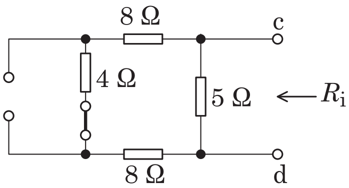


図 10.8 ノートンの定理の例題において，内部の電源を全て OFF して，内部インピーダンスを求めるときの回路の状態．

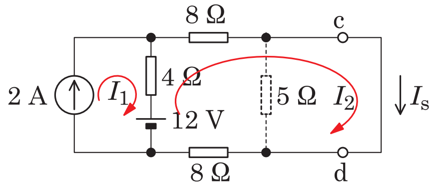


図 10.9 ノートンの定理の例題において，内部の電源を全て ON して，短絡電流を求めるときの回路の状態．

10.9 のようになる．このとき注意しなければならない点は，5 Ω の抵抗の両端の電圧である．この抵抗の両端に相当する端子 cd 間が短絡されているのであるから，この抵抗には電圧がかからない．従って，この抵抗には電流が流れない，即ち，抵抗が無いのと同じ，という点を理解するようにして欲しい．

以上の点を理解した上で，閉路電流法を用いて端子 c から d に向かって流れる電流 I_{cd} を求めれば，それが短絡電流 I_s となる．先ほどの復習であるが，5 Ω の抵抗には電流が流れないのであるから，閉路としては，**図 10.9** に示すような閉路を想定すればよい．このように閉路を

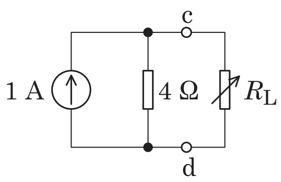


図 10.10 ノートンの定理の例題の等価回路.

想定すれば，閉路 2 の電流 I_2 が求めるべき I_s に相当することになる.

まず，閉路 1 については，2 A の電流源が閉路上にある．ということは，その閉路の電流は，如何なることがあろうと 2 A である．即ち，自動的に $I_1 = 2$ A となる．

次に，閉路 2 の方程式を書くと，

$$12 = 4(I_2 - I_1) + 8I_2 + 8I_2 \tag{10.5}$$

となる．$I_1 = 2$ A を利用すれば，I_2 は容易に求められ，

$$I_2 = 1\ \mathrm{A} \tag{10.6}$$

となる.

従って，ノートンの定理によって等価回路を描けば，**図 10.10** のようになる.

10.2 最大電力供給の定理 (インピーダンス整合)

電源に内部インピーダンスがある場合には，その電源から負荷に供給できる (負荷で消費される) 電力が最大となる最適な負荷インピーダンスが存在する．これが最大供給電力 (maximum power transfer) の定理である．このようにインピーダンスが最適値になっている状態を「**インピーダンス整合（インピーダンス・マッチング; impedance matching**）」がなされた状態などと表現する．最大電力が得られるようにインピーダンスを調整する作業ことを「**インピーダンス整合をとる**」，或いは単に「整合をとる (マッチングをとる)」などと表現する.

10.2.1 抵抗の場合

図 10.11 (a) に示すように，電源の内部インピーダンスが抵抗だけであり (R_i とする)，負荷も抵抗だけの場合 (R_L とする)，その抵抗負荷に最大電力が供給される条件，即ち，その抵抗負荷での消費電力が最大となる条件は，以下の通りである.

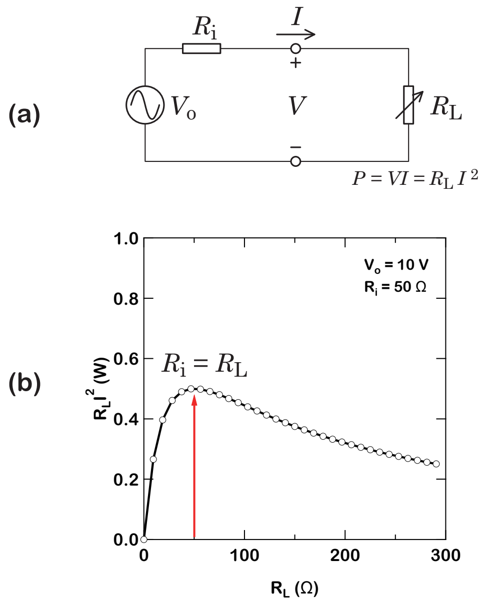


図 10.11 (a) 内部抵抗 R_i を有する電源と抵抗負荷 R_L の回路．(b) $R_i = 50\ \Omega$ の電源を用いたときの，負荷抵抗における消費電力の負荷抵抗値依存性．$R_i = R_L$ の時に最大となっている.

$$R_i = R_L \tag{10.7}$$

即ち，電源の内部抵抗値と負荷の抵抗値が一致しているときに，最大電力が供給される (負荷での消費電力が最大となる).

実際に $R_i = 50\ \Omega$ の内部抵抗を持つ電源に抵抗負荷 R_L を接続し，R_L を 0 Ω から 300 Ω まで変化させたときの負荷抵抗での消費電力の R_L 依存性を図示すると**図 10.11** (b) のようになり，$R_L = R_i$ で最大電力となっていることが確認できる．数学的な証明については，本章末の付録に記した.

10.2.2 一般のインピーダンスの場合

ここでは，**図 10.12** に示すように，電源の内部インピーダンスが抵抗だけではなく，リアクタンス成分 (C や L) も含む一般的なインピーダンスであり，負荷も一般的なインピーダンスの場合のインピーダンス整合について述べる．電源の内部インピーダンスと負荷のイン

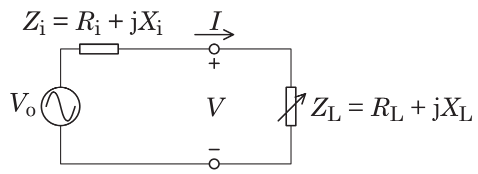


図 10.12 電源の内部のインピーダンスと負荷が抵抗だけではなく，一般的なインピーダンスになった場合のインピーダンス整合は，$Z_i = Z_L^*$ の時に成立する．即ち，負荷インピーダンスと内部インピーダンスが複素共役の関係の時にインピーダンス整合する．

ピーダンスを，それぞれ，

$$Z_i = R_i + jX_i, \tag{10.8}$$
$$Z_L = R_L + jX_L \tag{10.9}$$

とする．このとき，負荷に最大電力 (最大の有効電力) が供給される条件，即ち，負荷での消費電力 (有効電力) が最大となる条件は，

負荷インピーダンスと内部インピーダンスが複素共役の関係にある

ことである．式で書けば，以下の通りである．

$$Z_i = Z_L^*. \tag{10.10}$$

実部と虚部に分けて書けば，以下の通りである．

$$R_i = R_L \quad かつ \quad X_i = -X_L. \tag{10.11}$$

即ち，電源の内部インピーダンスの虚部の符号が逆になった負荷を接続すればインピーダンス整合するのである．これに関する数学的な証明については，章末の付録に記した．

10.2.3　インピーダンス整合器 (マッチャー)

インピーダンス整合を満たそうとすると，電源の内部インピーダンス

$$Z_i = R_i + jX_i \tag{10.12}$$

に対して，負荷のインピーダンスが

$$Z_L = R_i - jX_i \tag{10.13}$$

になっていればよい．これは，電源内の純粋な起電力成分 V_o から見たときに，内部インピーダンスも含めた負荷が**図 10.13** に示すように，

$$Z_i + Z_L = 2R_i \tag{10.14}$$

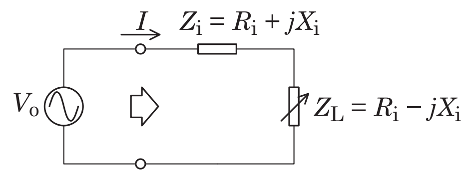


図 10.13 インピーダンス整合が成り立っているとき，電源の起電力成分から見た内部抵抗と負荷抵抗の合成インピーダンスは，純粋な抵抗成分だけの $2R_i$ となり，力率が 100% となる．

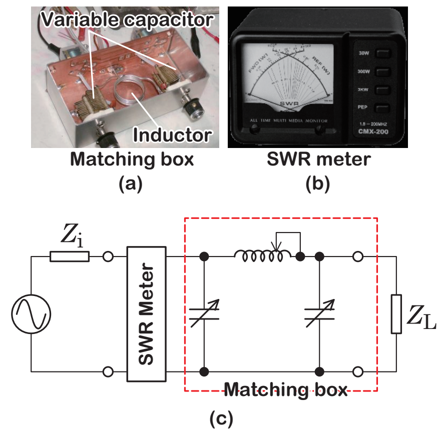


図 10.14 整合回路の例 [1,2].

となり，虚数部分が無くなるようにしていることに相当する．即ち，複素電力の章で学習した「力率」を 100% にしていること相当する．力率は，負荷に電力を供給したときに実際に消費される電力の割合を表す．それが 100% ではないという状態は，電力の一部が反射していることを意味する．従って，

インピーダンス整合とは，電力の反射が無くなる状態

なのである．なお，この「**電力の反射**」の概念については，章末の補足説明に記したので，興味があれば見ておいて下さい．

10.2.4　インピーダンス整合器 (マッチングボックス)

負荷インピーダンスは，対象によって様々であるから，負荷のインピーダンスに合わせて電源の内部インピーダンスを調節する必要がある．通常は，電源内部にそうした内部インピーダンス調節機構を持たずに，電源

と負荷の間にそのような機能を持つ回路を設ける．そのような回路をインピーダンス整合器という (インピーダンス・マッチャー，マッチングボックスなどともいう).

アンテナに給電するときに電源とアンテナの間に入れるインピーダンス整合器の回路の例を**図 10.14** (a) に示す [1]．回路図では，**図 10.14** (c) の破線で囲まれた部分に相当し，π 型回路と呼ばれるものである．コイルのインダクタンスとコンデンサのキャパシタンスを調整し，負荷のインピーダンスも合わせたときの全体の虚数部分が極力小さくなるように調整する．

コイルとコンデンサを比較すると，コンデンサの方が可変機構を容易に導入できるため，一般にはコイルを半固定式にして，コンデンサに可変機構を持たせている．整合をとるときには，主としてコンデンサのキャパシタンスを可変する操作を行うことになるが，キャパシタンスを操作するつまみを回したときに，反射が増えたのか，減ったのかをモニターしなければ，どちら向きに回すと整合性が良くなったのかがわからない．そのため，入射電力と反射電力を計測する計測器を負荷と整合回路の間に設ける．この計測器を SWR メータといい，**図 10.14** (b) のようなものである [2]．SWR とは Standing Wave Ratio (定在波比) の略である．実際の作業としては，この SWR メータの反射電力/入射電力の比が最も小さくなるようにキャパシタンスのつまみを回して整合をとる．理論的な詳細については，電磁気学の電磁波の入射と反射，もしくは，分布定数回路の入射と反射などの項目で述べられているはずなので，興味のある人は見てみるとよい．

10.2.5 最大電力供給の定理の注意事項

最大電力供給の定理は，文字通り「最大電力供給」に関する定理であり，以下のことに注意しておく必要がある．即ち，

> **最大電力供給の定理は，負荷における電力消費の効率が最大となる条件を示したものではない．**

なお，ここでいう「負荷における電力消費の効率」とは，内部抵抗と負荷抵抗の両方を考慮した全体の消費電力の中に占める負荷抵抗での消費電力の割合のことである．負荷での消費電力が最大となる条件と，負荷での電力消費効率が最大となる条件は，一般には異なっている．従って，回路設計を行う人は，その回路の目的に応じて，どちらを優先するのかを判断することになる．

例えば，音声信号などをスピーカーに伝送する回路のような場合には，スピーカーでの消費電力を大きくすることを目的とする場合が多いので，最大電力供給の定理に従って，スピーカーでの電力消費が最大となる条件で設計する．但し，この場合にスピーカーに供給される電力は，電源から供給される全電力の半分にしかならず，残りの半分は電源の内部抵抗で消費されることになり，電力の利用効率は悪くなる．この詳細については，章末の豆知識を参照されたし．

一方，一般の家庭用の電気機器への給電の場合に，最大電力供給の定理に基づく負荷を接続するとエライことになるのである．そのため，家庭用機器の場合には，別の方針に基づく負荷抵抗値の設定がなされている．これについても，どんなエライことになるのか，エライことにならないようにどうしているのか，については，章末の豆知識を参照されたし．

10.3 その他の定理

10.3.1 重ね合わせの理

重ね合わせの理とは，小難しく言えば，「ある物理現象がある原因で引き起こされるとき，その原因が複数あった場合に引き起こされる物理現象は，その原因が個別に引き起こす現象の和となる」，というものである．例えば，複数の荷電粒子がある場所に作る電場は，それぞれの荷電粒子が個別につくる電場の和 (この場合はベクトル和) となる，というのも重ね合わせの理の一つの例である．こうした理屈は，一見すると当たり前のように思えるが，常にまかり通るわけではなく，ある条件が必要なのだが，これについての詳細は，電気回路学の範疇を外れるので各自で調べて欲しい．

ここでは，電気回路学基礎で扱う方程式が全て重ね合わせの理を適用できる，ということを天下り的に信じてもらう．電気回路における「重ね合わせの理」とは，以下のような理屈である．

> 複数の電源が ON している線形回路において，ある回路素子の両端の電圧 (あるいはそこを流れる電流) は，各電源を個別に ON(ON したもの以外は OFF) したときにその素子に発生する電圧 (あるいはそこ

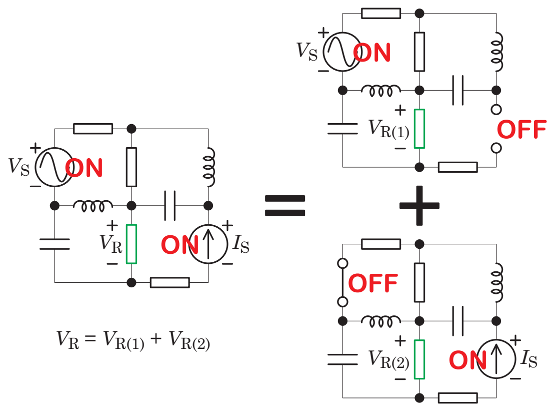


図 10.15 重ね合わせの理.

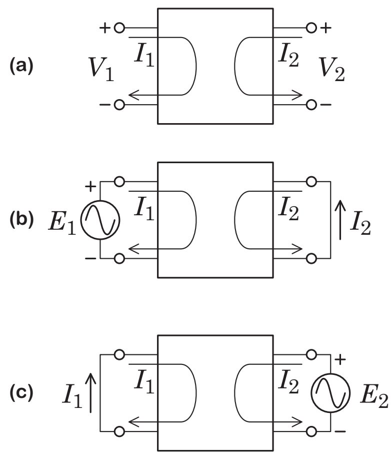


図 10.16 相反定理 (可逆定理).

表 10.1 双対関係にあるパラメータと回路の例.

電圧	電流
インピーダンス	アドミタンス
直列	並列
短絡	開放

を流れる電流) の和となる.

なお，電源の **OFF** は電圧源と電流源では，回路の状態が異なることを思い出して欲しい．即ち，

- 電圧源の **OFF** は短絡,
- 電流源の **OFF** は開放

である.

10.3.2　回路の双対性

電気回路の理論では，**表 10.1** に示すような対をなすパラメータや回路があり，これらのパラメータが「双対性をなしている」と表現する．このとき，ある電気回路の法則が**表 10.1** の片方のパラメータで記述されているとき，もう片方のパラメータで記述してもその法則は成り立つ.

例えば，テブナンの定理は，双対性をなしているパラメータで書き換えれば，以下のようにノートンの定理になる.

テブナンの定理

線形二端子回路の**開放電圧**が V_0 であり，内部**インピーダンス**が Z_i であるとき，その回路は，出力**電圧**が V_0 の**電圧**源と**インピーダンス** Z_i の**直列**回路と等価である.

ノートンの定理

線形二端子回路の**短絡電流**が I_s であり，内部**アドミタンス**が Y_i であるとき，その回路は，出力**電流**が I_s の**電流**源と**アドミタンス** Y_i の**並列**回路と等価である.

10.3.3　相反定理 (可逆定理)

図 10.16 (a) に示すように，ある 4 端子回路があるとき，一方の端子に電圧源 $\boldsymbol{E}_1$ を接続し，他方の端子を短絡した時に，短絡した側に電流 $\boldsymbol{I}_2$ が流れるとする．逆に，先に短絡した側の端子に電圧源 $\boldsymbol{E}_2$ を接続し，他方の端子を短絡した時に，短絡した側に電流 $\boldsymbol{I}_1$ が流れるとする．このとき，以下の関係が成り立つ．これを**相反定理 (可逆定理)** という.

$$\frac{\boldsymbol{E}_1}{\boldsymbol{I}_2} = \frac{\boldsymbol{E}_2}{\boldsymbol{I}_1}. \tag{10.15}$$

この式の意味するとこは以下の通りである.

- どちら側を入力端子にしても，入力と出力の比が等しくなる.
- どちら向きにも信号を伝達できる.

このような相反定理の成り立つ回路のことを**相反回路**という．電気回路学基礎で取り扱う線形回路は，全て相反回路である．しかし，電子回路で扱うトランジスタやダイオードなどの非線形回路素子を含む回路は，相反回路

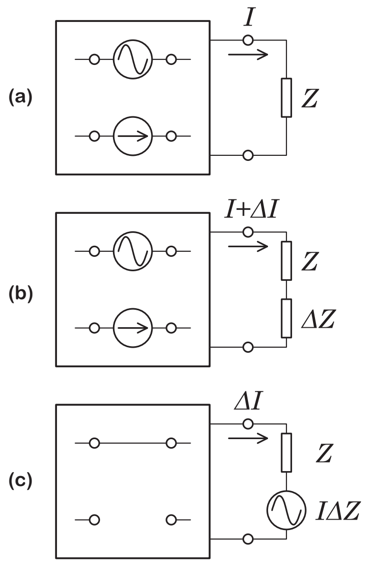


図 10.17 補償定理.

とはならない[*2].

10.3.4 補償定理

補償定理とは，以下のような定理である.

- 回路のある枝に電流 I が流れているとき,
- この枝に更にインピーダンス ΔZ を追加したときの電流の変化 ΔI は,
- 元の回路で電源を全て OFF し，ΔZ と直列に I を妨げる向きに電圧源 $I\Delta Z$ を加えたときに流れる電流に等しい.

[*2] 非線形回路は，入力端子がどちら側であり，出力端子がどちら側であるか，が決まっている．線形回路はどっちを入力にしてもかまわない.

10.4 電源の直列・並列接続について

本章に到達したぐらいのところで，概ね電気回路の考え方がわかってきたのではないかと期待している．が，多くの場合，出題された問題を解くための手順を頭にコピーしただけの場合が多い．ここでは，新しい事を考えるときには，試験問題を解いて高い点数を取ることよりも，根本原理をきちっと理解していることの方が重要である，ということを示す．電気回路の理屈を支配している根本原理とは，以下の二つである．

- KCL（電流は勝手に無くなったりしない）
- KVL（電圧も勝手に無くなったりしない）

この二つを理解していれば，記憶力は不要である (はず) である．

電池を直列につなげれば，電圧がつなげた分だけ増える，ということは良く知っていると思う．これに対し，「では，電流はどうなるの？」ということに対してもきちっと理解している人は少ないと思われる．また，電池を並列につなげると，どうなるのか，ということを電気回路的にきちっと理解している人も少ないと思われる．

ここでは，その根本原理に基づいて，電池の直列・並列接続という極めて単純な回路の中に潜んでいる思わぬ落とし穴について述べる．この落とし穴は，電気回路の基礎を学んでいれば，落とし穴にはならないが，電気回路の上っ面だけしか知らないと，落とし穴にはまる．

10.4.1 電源とは

電気回路で「電源」と言った場合，多くの場合は「電圧源」である．実存する電圧源には内部抵抗 (あるいは内部インピーダンス) があり，純粋な起電力だけが存在するわけではない，ということを別の章で既に述べた．実存する電圧源を使うときには，この内部抵抗に加えて，**電流容量**というものを考慮する必要がある．即ち，以下のように電圧源を捉えなければならない．

- 電圧源は, ある電圧を出す電気回路である．しかし,
- ある最大の電流までしか電流を出力することはできない．その電源が出せる最大電流のことを電源の**電流容量**と言っている．例えば，電源の二つの端子間を短絡したとき (抵抗値がゼロの負荷をつないだとき)，理想電源ならば，無限大の電流が流れることになるが，そんな電源は実存しないのである．

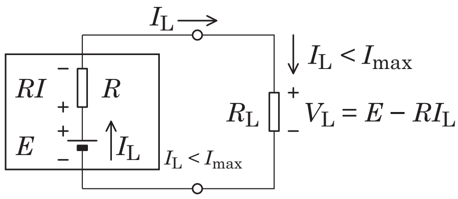


図 10.18 内部抵抗をもち，電流容量が J_{max} の直流電圧源に負荷抵抗 R_L を接続した回路.

ここで，**図 10.18** に示すように，内部抵抗 R_i をもち，電流容量が I_{max}，起電力が E の直流電圧源を考え，それが負荷抵抗 R_L に接続された回路を考えてみる．負荷に対してこの電源が 1 個だけ接続されている場合は，負荷に供給出来る電圧と電流は以下のような特性を持つことになる．

- **電圧**
  負荷に印加される電圧 V_L は，E とはならず，
  $$V_L = E - R_i I_L \tag{10.16}$$
  となる．これは，負荷を接続することによって電流 I_L が流れ，内部抵抗 R_i での電圧降下 $R_i I_L$ が発生するためである．
- **電流**
  負荷に供給出来る最大の電流は I_{max} である．

10.4.2 電源の直列接続

次に，**図 10.19** に示すような，電源の直列接続について考察する．二つの電源の起電力は E_1，E_2，内部抵抗は R_1，R_2，電流容量は I_{1max}，I_{2max} であるとする．このとき，負荷に印加できる電圧については，内部抵抗が増える分だけ電圧降下が大きくなるが，基本的には，

- 直列接続した電源全体の電圧は，それぞれの電源が直列接続のときと同じ負荷電流となる負荷に接続されたときの電圧の和となる．
  $$V_L = E_1 + E_2 - (R_1 + R_2) I_L. \tag{10.17}$$
  ここで，I_L はこの閉路を流れる電流である．例えば，特性が同じ二つの電源を直列接続すれば，その出力電圧は 2 倍になる．

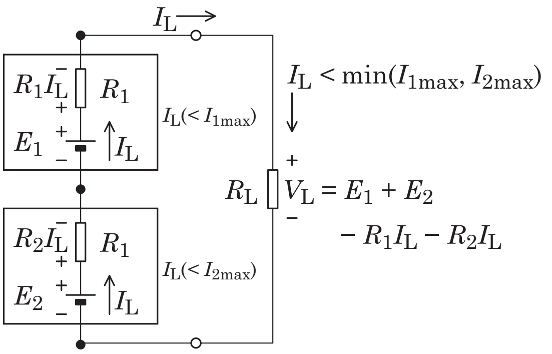


図 10.19 異なる性能の直流電圧源を直列に接続した場合．

次に電流に目を向けてみよう．負荷電流を式で表すと，

$$I_L = \frac{V_L}{R_L} = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2 + R_L} \tag{10.18}$$

となる．従って，負荷抵抗値 R_L を小さくすれば，負荷電流 I_L が大きくなる．どこまで大きくなるのであろうか？電流容量が決まっている電源が一つだけの場合については，既に述べた．今回のように二つの電源が直列に接続されている場合はどうなるのであろうか？

このことを考える上でのキーポイントは，閉路全体を流れる電流が，どの場所も負荷電流 I_L と同じである，という点である．従って，I_L の値が，電源 1 または電源 2 の電流容量のどちらか小さい方の電流容量を超えた時点でアウトである[*3]．

即ち，以下のことが言える．

- **異なる電流容量の電源を直列接続すると，電圧はそれぞれの電源の電圧の和となり増えることになるが，供給できる最大電流は電流容量が一番小さい電源の電流容量によって制限される．**

電気回路の基礎を学習しているにも関わらず，直列接続したら「電流容量も増える」などと勘違いしないように．

10.4.3 電源の並列接続 (同じ電圧の電源の場合)

2 本の電池を並列ではめ込む製品は結構あると思う．このとき，何を期待して 1 本ではなく，2 本にしている

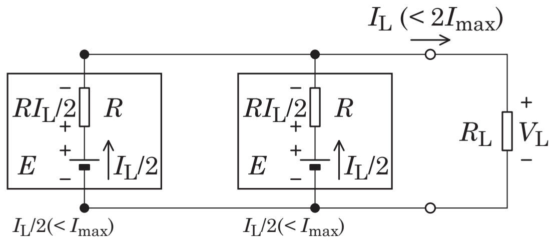


図 10.20 内部抵抗をもち，電流容量が I_{max} の直流電圧源を並列に接続した場合．

のであろうか？結論から先に言うと，

- 出力電圧は同じだが，
- 電流容量が倍になる

ということを期待している[*4]．**図 10.20** に示した回路を用いて具体的に考察してみよう．

二つの電源は全く同じ特性であり，起電力は E，内部抵抗は R，電流容量は I_{max} とする．このとき，負荷を流れる電流 I_L は，各電源を流れる $I_L/2$ の和となっている．従って，各電源は，$I_L/2$ なる電流値が I_{max} を超えるまで電流を出すことができる．従って，並列接続電源全体の電流容量は，$2I_{max}$ となる．一方，負荷の電圧 V_L は，

$$V_L = E - R\frac{I_L}{2} \tag{10.19}$$

となる．即ち，電源が一つだけの場合と比較して，起電力の成分は変わらないが，一つの電源に流れる電流が半分になるので，内部抵抗による電圧降下が半分になっている．

以上の結果をまとめると，

- **特性の揃った二つの電源を並列接続すると，おなじ出力電圧で[*5]，電流容量を 2 倍にすることができる，**

となる．

10.4.4 電源の並列接続 (異なる電圧の電源の場合)

前の節では，特性が揃った電源を並列接続した場合を考えたが，特性が揃っていない電源を並列接続するとどうなるであろうか．結論から先に言うと，

[*3] 電源が壊れるか，もしくは，電流リミッターが働いて電源が OFF になる．

[*4] これは，直列接続の場合と比較すると，「双対」の関係になっている．

[*5] 内部抵抗による電圧降下が一つだけの場合と比較して半分になるが，ほぼ同じと考えてこのように言っている．

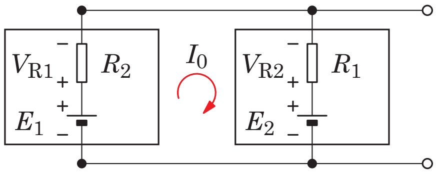


図 10.21 特性の異なる二つの直流電圧源を並列に接続した場合の無負荷状態 (負荷抵抗を接続しない状態) の回路図.

- 二つの電源の起電力が異なると，電源どうしで形成する閉路に電流が流れてしまう．即ち，負荷をつなげなくても，電力が消費されてしまう．電池の場合には，電池が消耗する．

となる．

図 10.21 に示した回路を用いて具体的に考察してみよう．無負荷の時の閉路電流を I_0 とすると，

$$E_1 - E_2 = R_1 I_0 + R_2 I_0 \tag{10.20}$$

となる．従って．

$$I_0 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \tag{10.21}$$

となる．

ここで，$E_1 = E_2$ の場合には，$I_0 = 0$ となり，無負荷時にはこの閉路に電流は流れない．即ち，電力の消費は無い．一方，$E_1 \neq E_2$ の場合には，$I_0 \neq 0$ となり，無負荷の場合でも，内部抵抗によって $(R_1 + R_2)I_0^2$ という電力が消費されてしまうのである．

電池の並列接続によって可動する道具の電池ボックスには，多くの場合，「必ず新品の電池をお使い下さい」と注意書きが書いてあるはずである．これは，並列接続する電池のうち，片方が少し消耗した (即ち，起電力が小さくなっている) 電池であると，上記の理屈により，負荷とは関係無いところで勝手に電池が消耗してしまい，電池を使える時間が短くなってしまうからである．

10.4.5　純粋な起電力の並列接続

前節では，電源を並列接続した例について説明したが，内部抵抗を持たず，起電力だけを持つ純粋な複数の電圧源が，それぞれの起電力が異なるにも関わらず並列につながるという状況は，物理的にあり得ないということも認識しておいて欲しい．

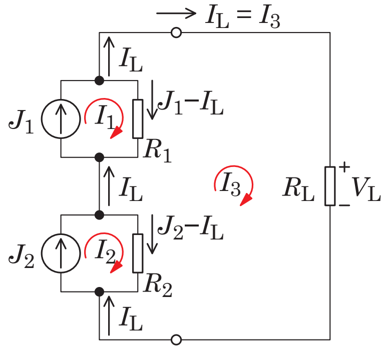


図 10.22 内部抵抗を有する特性の異なる二つの直流電流源を直列に接続した場合の回路図.

10.4.6　純粋な電流源の直列接続

異なる起電力 (だけ) を有する電圧源が並列に接続されるという状況は物理的にあり得ないことを前節で述べたが，電流に関しても同様の認識が必要である．即ち，異なる出力電流 (だけ) を有する電流源が直列に接続されるという状況も，物理的にはあり得ないのである．

10.4.7　純粋でない電流源の直列接続

異なる出力電流の純粋な電流源が直列接続される状況は，物理的にあり得ないということを前節で述べた．しかし，実在する電流源を導線でつなげれば，直列接続が出来てしまう．このとき，何が起こるのであろうか？大まかに言うと，

- 内部抵抗を有する電流源を直列に接続すると，各出力電流の平均値が流れる，

となる．「大まかにいうと」と書いたのは，正確に述べると，多少複雑な式に基づくことになるからである．以下では，それを説明する．

図 10.22 に示すように電流を割り振ると，閉路 1 と閉路 2 については，次式が成り立つ．

$$I_1 = J_1, \tag{10.22}$$
$$I_2 = J_2. \tag{10.23}$$

閉路 3 については，電圧源が無いので，I_3(I_{L}と同じである) の向きに電流ががなれる方向を正の電圧降下の方向としたときに，全ての電圧降下の和がゼロとなる．即ち，次の閉路方程式が成り立つ．

$$0 = R_{\mathrm{L}} I_3 + R_1(I_3 - I_2) + R_2(I_3 - I_2). \tag{10.24}$$

これを J_1，J_2，I_L を用いて書き換えれば，次式のようになる．

$$0 = R_L I_L + R_1(I_L - J_1) + R_2(I_L - J_2). \qquad (10.25)$$

これより，全体の電流 I_L は，

$$I_L = \frac{R_1 J_1 + R_2 J_2}{R_1 + R_2 + R_L} \qquad (10.26)$$

となる．

例えば，ここで，負荷を短絡 $(R_L = 0)$ すると，

$$I_L = \frac{R_1 J_1 + R_2 J_2}{R_1 + R_2} \qquad (10.27)$$

となり，それぞれの電流源の出力電流を内部抵抗比を掛けて足したものになっている．大まかに言えば，平均値である．もう少し平均値であることがわかりやすくするには，出力電流は異なるが，内部抵抗値は同じ $(R = R_1 = R_2)$，という条件を適用してみるとよい．すると，次式が得られる．

$$I_L = \frac{J_1 + J_2}{2}. \qquad (10.28)$$

即ち，二つの電流源の出力電流の平均値が流れるのである．

10.4.8 電流源の直列接続例：太陽電池の直列接続

前節のような異なる出力電流の電流源が直列接続される具体的な例は，多少特異な例であるので，電気回路の教科書にはあまり紹介されていないようである．しかし，実際には，今日において大変重要なエネルギーデバイスにおいて，こうした接続形態は存在するのである．

電流源として機能する代表的なデバイスとして太陽電池がある．太陽電池は半導体の pn 接合への光照射によって電流が発生する電流源である．一方，その電圧は，光照射によって決まるのではなく，pn 接合を形成している半導体の物性 (拡散電位) によって決まる．即ち，光量を調節しても電圧を増減することはできない．従って，必要な電圧を得るためには，太陽電池を直列接続するのである．このときに，直列接続された二つの太陽電池に照射される光の量が異なっていれば，二つの太陽電池の電流が異なることなる．即ち，出力電流の異なる電流源を直列接続したことになるのである．このような状況は，直列接続型の太陽電池の片方の太陽電池が影になってしまい，その電流量が減った，などという場合

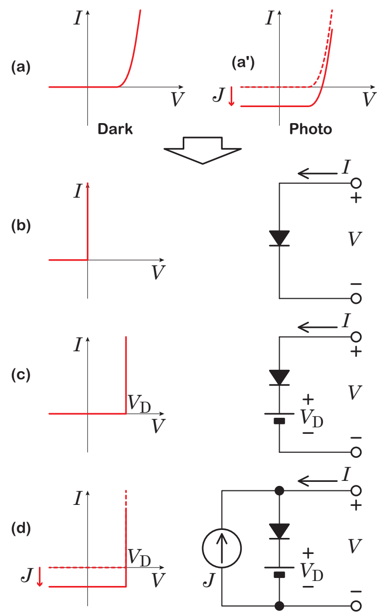


図 10.23 単純化したダイオードの特性.

に相当し，実際に起こりえることなのである．このようなときに，何が起こるのかを考察してみよう．

上記のことを考察するためには，前節で取り扱った内部抵抗を有する電流源という概念だけでは不足である．この電気回路学基礎では取り扱っていないダイオードという回路素子を扱うことになる．そこで，本論に入る前に，pn 接合なるものがどのような電流電圧特性であるのかを紹介しておく．ダイオードとは，片方にしか電流を流さないデバイスであり，一般には，半導体の pn 接合で構成されている．その電流電圧特性を図示すると，**図 10.23** (a) のようになる．これに光が照射されると，同図 (a') のように入射した光による電流 J が加わるのである[*6]．この詳細については「半導体工学」を参考にして欲しい．ここでは，これから述べることに必要な特性だけを抽出した極めて単純化されたダイオードの特性とその等価回路を用いて説明する．

ダイオードの重要な第一の特性は整流性である．即ち，逆向きの電流を流さない，という特性である．従って，同図 (b) のようになる．回路図におけるダイオードは同図 (b) の右側のように表される．しかし，同図 (a) に示すように，実際のダイオードは，先述の「拡散電位」ぐらいの電圧が印加されたときに電流が流れ始める，と

[*6] 加わる電流の向きが逆であることに注意すべし．

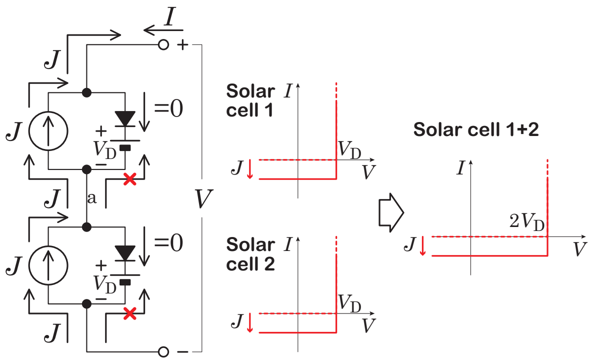


図 **10.24** 特性の揃った太陽電池の直列接続の等価回路.

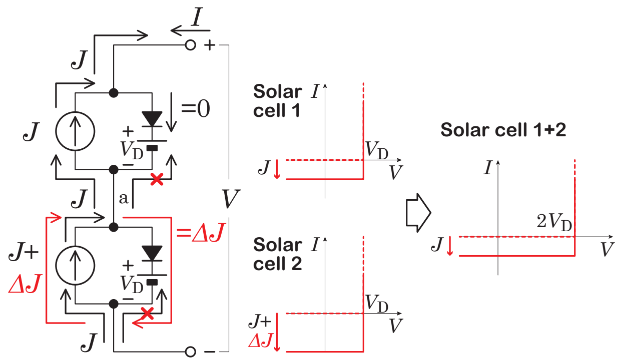


図 **10.25** 特性の揃っていない太陽電池の直列接続の等価回路.

いう特徴を有する．この特徴を簡略版に反映させようとすると，同図 (c) のようになり，等価回路は (かなり無理矢理であるが) 同図 (c) の右側のような回路となる．これに光が照射されたときの状態は，同図 (d) のように照射される光量 (フォトンフラックス) に比例した J が追加されることになる．等価回路的には，J なる電流源が並列につながることになる．これを太陽電池の等価回路として，それが二つ直列接続したときの状況を考察してみよう．

10.4.9 特性の揃った太陽電池の直列接続

まず，**図 10.24** に示すように，特性が揃った太陽電池が直列接続された状態を考えてみよう．この状態を考えるときに必要な知識は，以下の **2** 点である．

- **[電流連続の原則]**
  分岐が無い限り同じ，同じ導線を流れる電流は，場所が変わっても全て同じである．
- **[ダイオードの基本特性]**
  ダイオードには逆向けの電流が流れない．

以上の二つの知識を用いて，回路に流れる電流の挙動を考えてみよう．

下側の太陽電池の電流源の電流，即ち，光照射による電流成分 J に注目すると，この電流は二つの太陽電池の接続点である節点 a に流れ込むことになる．結論から先に言うと，この電流は，上側の太陽電池の電流源の電流と電流連続の原則を満たすように流れる[*7]．この電流の可能性のあるその他の行き先としては，下側の太陽電池のダイオードの経路，上側の太陽電池のダイオードの経路，の二通りが考えられるが，以下の理由により，そちらには流れない．

- 下側の太陽電池のダイオードの経路
  ダイオードに電流が流れるだけの電位差 (=V_D) がダイオードにかかっていないので流れない
- 上側の太陽電池のダイオードの経路
  そもそもダイオードにとっての逆方向なので流れない

従って，特性の揃った二つの太陽電池を直列接続した場合には，以下のようになる．

- **電圧**
  二つの太陽電池が出せる電圧 V_D の和となる．
- **電流**
  二つの太陽電池が出せる電流の和とはならず，一つの太陽電池が出せる電流にしかならない．

10.4.10 特性の揃っていない太陽電池の直列接続

次に，**図 10.25** に示すように，特性が揃っていない二つの太陽電池を直列接続した場合について考察してみよう．具体的には，下側の太陽電池の出力電流が増えた場合であり，下側だけ日光が良く当たったらどうなるか，直列接続された太陽電池から出力される電流は増えるのか？という問題である．結論から先に言うと，「増えない」である．これを示そう．

下側の太陽電池の電流源の増加した電流分を ΔJ とする．このとき，上側の太陽電池に行く経路については，

[*7] 流れるというよりは「つながる」と言った方が適切かもしれない．

ダイオードに対して逆向きなので，ダイオードのある経路に流れ込むことはない．また，節点 a における**電流連続の原則**により，上側の太陽電池の電流源の電流につながることもできない．上側に行けない ΔJ の成分が行ける唯一の経路は，下側のダイオードのある経路である．この場合，電流の向きはダイオードを通過できる向きであるから，この経路を通過できる．従って，下側の太陽電池の出力電流が増えたとしても，その増分は下側の太陽電池の等価回路の閉路を回るだけで，直列接続太陽電池の外には出てこないのである．

即ち，特性の揃っていない二つの太陽電池を直列接続した場合には，以下のようになる．

- **電圧**
  二つの太陽電池が出せる電圧 V_{D} の和となる．
- **電流**
  どちらか片方の出力電流が増えても，その増分は直列接続太陽電池全体の端子からは出てこない．即ち，直列接続太陽電池の電流出力は「増えない」のである．

従って，直列接続した太陽電池の電流が増加するためには，**図 10.26** に示すように，光による電流源の出力電流が同じでなければならない，即ち，両方の太陽電池に対する光照射量が同じでなければならないのである．広い敷地で複数の太陽電池を接続して大面積で発電する場合，どの場所も同じ光照射量にするなどということは，現実的には無理である．従って，電気＆電子回路的にこれらの問題を解決するための策が取られている．興味のある人は，どのような対策が取られているのかを自ら調べてみるとよいと思う．また，本章では取り上げなかったが，太陽電池を並列接続すれば電流容量を増やすことができるが，この場合にも様々な問題があり，実際の太陽電池には，その問題に対する解決策が講じられているので調べてみるとよい．

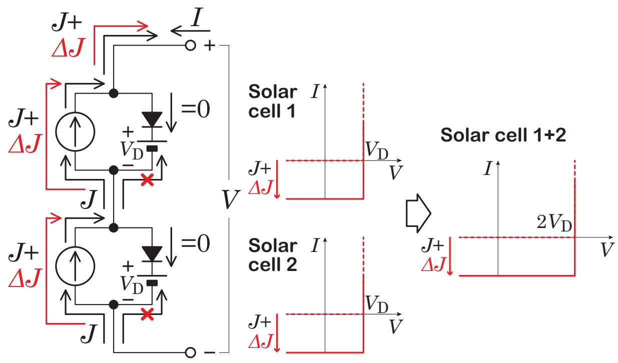


図 10.26 直列接続された太陽電池の両方の光照射量が同様に増えたときの等価回路の様子と電流電圧特性．

豆知識

豆知識

固有電力 (有能電力)

図 10.27 に示すように，内部インピーダンスが $Z_\mathrm{i} = R_\mathrm{i} + \mathrm{j}X_\mathrm{i}$ の電源に，インピーダンス整合した負荷 $Z_\mathrm{L} = R_\mathrm{i} - \mathrm{j}X_\mathrm{i}$ が接続されているときに得られる最大供給電力を，**固有電力**，または**有能電力**という．固有電力 P_max は，

$$P_\mathrm{max} = R_\mathrm{i}|I|^2 = R_\mathrm{i}\frac{|V_\mathrm{o}|^2}{|Z_\mathrm{i}+Z_\mathrm{L}|^2} \tag{10.29}$$

$$= \frac{|V_\mathrm{o}|^2}{4R_\mathrm{i}} \tag{10.30}$$

で与えられる．

なお，この固有電力に対して，電源内部の純粋な起電力成分が出力している電力 P_o は，

$$P_\mathrm{o} = 2P_\mathrm{max} \tag{10.31}$$

となり，純粋起電力から出力された電力のうち，半分が内部インピーダンスで消費され，もう半分が負荷で消費されているとみることができる．

豆知識

反射係数とインピーダンス整合

負荷での消費電力は，本来は負荷のインピーダンスによって異なるものである．しかし，見方を変えると，電源から固有電力に相当する電力が供給されているが，負荷との整合がとれていないので，その一部が反射されてしまっているために負荷によって異なる，という見方もできる．ここでは，このような「**電力の反射**」に関する概念を少し説明する．

かなり天下り的になるが，インピーダンス負荷に電力を供給したときの反射係数は，次式で与えられる．

$$\rho' = \frac{Z_\mathrm{L} - Z_\mathrm{i}^*}{Z_\mathrm{L} + Z_\mathrm{i}}. \tag{10.32}$$

反射係数がゼロ，即ち $\rho' = 0$，即ち $Z_\mathrm{L} = Z_\mathrm{i}^*$ のとき，電源と負荷のインピーダンスが整合していることになる．

P_max の電力が負荷に対して入射されたときに，反射

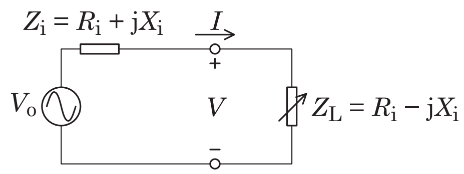


図 10.27 インピーダンス整合した負荷が接続された回路.

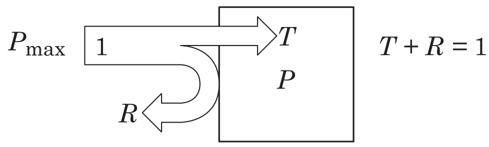


図 10.28 電力の透過と反射の概念.

がある場合には，実際に負荷で消費される電力は，

$$P = (\text{電力の透過係数 } T) \times P_\mathrm{max} \tag{10.33}$$

$$= (1 - \text{電力の反射係数 } R) \times P_\mathrm{max} \tag{10.34}$$

となる．概念的には，**図 10.28** に示すようになる．ここで，反射係数は，

$$R = |\,\text{振幅反射係数}\rho'|^2 \tag{10.35}$$

で与えられる．

$T = 1 - R$ が P_max に対して実際に負荷で消費される電力の比率となることを確認してみよう．

$$1 - |\rho'|^2 = 1 - \rho'\rho'^* \tag{10.36}$$

$$= 1 - \frac{Z_\mathrm{L} - Z_\mathrm{i}^*}{Z_\mathrm{L} - Z_\mathrm{i}}\,\frac{Z_\mathrm{L}^* + Z_\mathrm{i}}{Z_\mathrm{L}^* + Z_\mathrm{i}^*} \tag{10.37}$$

$$= \frac{(Z_\mathrm{L} + Z_\mathrm{L}^*)(Z_\mathrm{i} + Z_\mathrm{i}^*)}{(Z_\mathrm{L} + Z_\mathrm{i})(Z_\mathrm{L}^* + Z_\mathrm{i}^*)} \tag{10.38}$$

$$= \frac{P}{P_\mathrm{max}} \tag{10.39}$$

となり，確かに入射した電力 P_max と実際に消費される電力 P の比率になっていることがわかる．

豆知識

最大電力供給の定理は万能ではない

最大電力供給の定理は，電気回路学の中でも重要な定理であり，私も，「電気回路学を学んだ」というのであれば最低限知っておいて欲しい知識であると思って講義をしている．しかし，多くの定理がそうであるように，**こ**

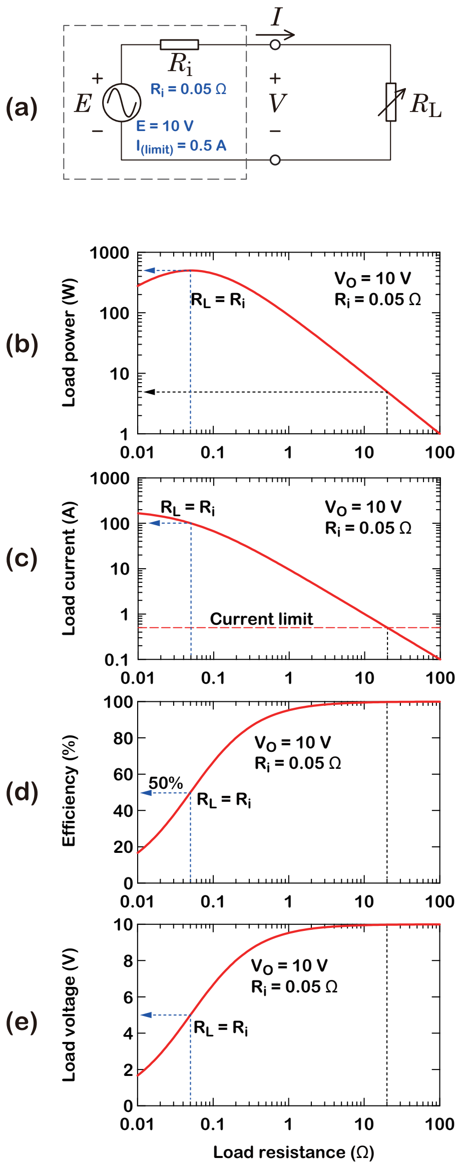


図 10.29 現実の電源における最大電力供給定理の適用．(a) 電流容量が明示された電圧源を含む回路の図．(b) この回路の負荷における消費電力の負荷抵抗依存性．(c) この回路の負荷電流の負荷抵抗依存性．(d) この回路の電力効率の負荷抵抗依存性．(e) この回路の端子間電圧の負荷抵抗依存性．

の定理はある仮定の上に成り立っている，ということを忘れてはならない．また，**最大供給電力となることが，常に一番良いこととなるわけではない**，ということも忘れてはならない．

そのようなことを頭に入れておいて頂くために，以下では次の点について述べる．

- **電圧源 E は理想電源である．**
  （ある仮定の上に成り立っている）
- **電力最大のときに効率最大でなない．**
  （常に一番よいこととなるわけではない）
- **電力最大のときには電圧が半分になる．**
  （常に一番よいこととなるわけではない）

電圧源は理想電源である

「電圧源が理想電源である」とは，こちらが指定した電圧を印加でき，かつ，いくらでも電流を流すことができる電源のことである．電源として理想電源を想定した最大電力供給の定理においては，現実の電源が有する「流せる電流に上限がある」という「電流容量」は無視されている．従って，現実の電源を用いた場合には，電力の上限が電流容量によって制限され，必ずしも最大電力供給の定理から導き出される最大電力を供給できるとは限らない．即ち，最大電力供給の定理に従って最大電力を供給する負荷抵抗を接続しようとしても，そのときに流れる電流が電源の電流容量を超える場合には，実際には実現不可能となる．もしも，そのような負荷抵抗を接続したとすると，電源の許容範囲を越える電流が電源に流れるため，電源の内部抵抗成分に相当する箇所での過剰な電力消費によって発熱し，電源が損傷するか，もしくは電源の保護回路が働いて電源が OFF になる．

例えば，**図 10.29**(a) に示すような回路を想定してみよう．電源の起電力は $E = 10$ V，内部抵抗は $R_\mathrm{i} = 0.05$ Ω，電流容量は $I_\mathrm{(limit)} = 0.5$ A とした．このとき，単純に最大電力供給定理を適用すると，$R_\mathrm{i} = R_\mathrm{L} = 0.05$ Ω のときに最大電力が供給される．**図 10.29**(b) は，このことを示すためにプロットした負荷電力の負荷抵抗依存性であり，$R_\mathrm{L} = R_\mathrm{i}$ で最大値（計算すると 500 W）となっている．

このときの負荷電流 $I_\mathrm{maxP(ideal)}$ は，

$$I_\mathrm{maxP(ideal)} = \frac{E}{2R_\mathrm{i}} = \frac{10}{2 \times 0.05} = 100 \text{ A}$$

となり，これと同じ電流が電源にも流れる．電源の電流容量が 0.5 A であるから，100 A という電流は大幅に許容範囲を超えている[*8]．即ち，**図 10.29**(a) の回路におい

[*8] 電気回路に関する経験が豊富になってくると，どれくらいの電流が普通であり，どれくらいまで大きくなると過大なのか，という認識を持つようになる．もちろん，同じ電流値であっても，

て最大電力供給定理で与えられる最大電力を供給することは実際には不可能なのである．

図 10.29(c) の赤実線は電流 I の負荷抵抗依存性をプロットしたものであり，赤破線は電源の電流容量である．**図 10.29**(b) と**図 10.29**(c) から，電源の電流容量の範囲内で電力を供給できるのは，赤実線の I が赤破線の電流容量を越えない負荷抵抗に限定され，その抵抗は最大電力供給の条件を満たす抵抗よりもずっと大きいことがわかる．この制限内で最大の電力が得られるのは，その制限内における最小の負荷抵抗を接続したときとなる．同図から，そのような負荷抵抗の値がおおよそ 20 Ω であることが読み取れる．これを計算によって求めると，以下のようになる．

$$R_{\mathrm{L(limit)}} = \frac{E}{I_{\mathrm{(limit)}}} - R_{\mathrm{i}} = \frac{10}{0.5} - 0.05$$
$$= 19.95 \approx 20\ \Omega$$

となる．また，このときの負荷での消費電力 $P_{\mathrm{L(limit)}}$ は，

$$P_{\mathrm{L(limit)}} = R_{\mathrm{L(limit)}}\ I_{\mathrm{(limit)}}^2 = 4.988 \approx 5.0\ \mathrm{W}$$

となる．この電力の値は，最大電力供給の条件を満たすときの電力の値と比較すると極めて小さい．しかし，必要とする電力がこの程度で十分である場合には、無理に最大電力供給の条件を満たす必要がないことは理解できるであろう．そのような場合には，むしろ別の要件を満たすことを優先した方がよくなる．その別の要件というのが，次に述べる「効率」や「端子間電圧の維持」である．電源の端子が家庭用のコンセントであり，負荷抵抗に相当するものがコンセントに差し込んで使う電気機器である場合には，最大電力供給の条件については頓着せず，次節で述べるように「別の要件」が優先される．

電力最大のときに効率最大でなない

もしも，**図 10.29**(a) の電流容量が十分に大きいとすると，負荷抵抗の値を最大電力供給の定理を満たす値まで小さくすることが可能となる．しかし，この場合においても，留意しておくべきことがある．それが効率と端子間電圧（この場合は負荷電圧と同じ）である．本節では，まず効率について述べる．

ここでいう効率とは，電源 E から供給される全電力の中に占める負荷の電力の比率である．

$$\eta = \frac{\text{負荷の電力}}{\text{供給される全電力}} \times 100 = \frac{R_{\mathrm{L}} I^2}{(R_{\mathrm{i}} + R_{\mathrm{L}}) I^2} \times 100$$
$$= \frac{R_{\mathrm{L}}}{R_{\mathrm{i}} + R_{\mathrm{L}}} \times 100\ \%$$

と表される．

図 10.29(d) は，この効率の負荷抵抗依存性をプロットしたものである．この図や上式から容易にわかると思うが, 最大電力供給の定理を満たす負荷抵抗, 即ち, $R_{\mathrm{L}} = R_{\mathrm{i}}$ なる負荷抵抗を接続した場合には，効率は 50% となる．即ち，最大電力供給の定理を満たす場合，電源から供給される全電力のうち，半分は電源の内部抵抗で消費され，無駄な電力を消費することになる．ここでいう「無駄な電力」は，電源の内部抵抗成分の加熱などに使われることになる．この加熱が過大になると発火などが起こる可能性がある．また，そのような事態に至らない場合であっても，無駄な電力が電源側で消費されることに変わりはない．従って，効率を優先する場合には，最大電力供給の定理は適用されないのである．

電力最大のときには電圧が半分になる

次に，もう一つの留意点である端子間電圧について述べる．電源に内部抵抗があると，

$$V = E - R_{\mathrm{i}} I \tag{10.40}$$

より，電源内部において $R_{\mathrm{i}} I$ なる電圧降下が生じ，**図 10.29**(e) に示すように，端子間の電圧 V が E よりも小さくなる．この端子間電圧の減少が顕著になり，接続した負荷（電気機器など）を稼働させるために必要な電圧を下回ると，その機器はもはや機能しなくなる．そのようなことが起こらないように，電源の内部抵抗 R_{i} の大きさや，電流 I の大きさを決める負荷抵抗 R_{L} の大きさは，E に対して $R_{\mathrm{i}} I$ が無視出来るほど小さくなるように設定される．また，端子間電圧の減少が無視できるほど小さい場合の電力効率は，**図 10.29**(d) に示すように，ほぼ 100% となり，無駄な電力が電源側で消費されることもなくなる．一般に，全ての家庭用の機器類の負荷抵抗の値は端子間電圧が大きく変動しない程度となるように設計されている．これは，普段の生活において，コンセ

それが「普通」と認識されるか「過大」と認識されるかは，分野によって異なる．上記の，100 A という電流値は，「弱電」と呼ばれる電子機器の分野では，一般には極めて大きい電流と認識される．即ち，「電源容量の 0.5 A より大きい」ということよりも以前に，そもそも「えらくデカイ電流だな」，という認識をもつことになる．

ントに何かを差し込んだときに，電圧が下がるなどという不具合が生じていないことからもわかるであろう．

ではどんなときに最大電力供給の定理を使うのか？

以上の説明を聞くと，「最大電力供給の定理」は，効率を度外視した無意味な定理に思えてくるかもしれないが，そうではない．内部抵抗での無駄な消費電力が大きくても，負荷での電力の大きさが是が非でも大きくなければならない，という要件があれば，最大電力供給定理に従って負荷抵抗の値を決定することになる．

例えば，スピーカーへの電力伝送のような場合には，スピーカーの音量が大きいことが他のなによりも重要となる場合がある．そのような場合には，効率が悪くても，電力が大きい方を優先して内部抵抗や負荷抵抗の値が選定される．但し，扱う電力の大きさが極めて大きい場合には，電力を供給する側の内部抵抗成分の発熱によって，電力供給側の損傷や事故などが起こる危険性があることに留意しておく必要がある．無理にでも最大電力を実現した方が目的を達成できるという場合には，例えば，発熱量を事前に計算し，発火や損傷などが起こらぬように冷却装置をつける，などの措置を講じておく必要がある．

なお，電源の内部抵抗と負荷抵抗の関係が最大電力供給の定理を満たす場合には，先述の通り，負荷に印加される電圧 $\boldsymbol{V}$ が $\boldsymbol{E}$ の半分になるが，上記のスピーカーのような場合には，そうなることを前提にして設計する．

以上のように，最大電力供給の定理というのは，「何にもまして最大電力を!」という目的のときは役に立つのだが，目的がそれ以外のときには，「いやいや，そうじゃなくて，他のことに気を配りなさい」となるので注意されたし．

課題

テブナンの定理

テブナンの定理を証明せよ

略解

図 10.30 の□で囲まれた回路について考える．簡単のために，この□で囲まれた回路が，以下の二つの電圧源と二つの電流源を持つ，と仮定する．

$$V_{\mathrm{S1}}, V_{\mathrm{S2}}, \quad I_{\mathrm{S1}}, I_{\mathrm{S2}}. \tag{10.41}$$

端子 ab 間の電圧は，重ね合わせの理によると，各電源が個別に動作したときの ab 間の電圧の和である．従って，以下のように表すことができるはずである．

$$V = A_0 I + A_1 V_{\mathrm{S1}} + A_2 V_{\mathrm{S2}} + A_3 I_{\mathrm{S1}} + A_4 I_{\mathrm{S2}}. \tag{10.42}$$

ここで，A_i は□内の回路素子によって決まる定数である．これを少し書き直すと，

$$V = A_0 I + B_0, \tag{10.43}$$
$$B_0 = A_1 V_{\mathrm{S1}} + A_2 V_{\mathrm{S2}} + A_3 I_{\mathrm{S1}} + A_4 I_{\mathrm{S2}}. \tag{10.44}$$

ここで，端子 ab が開放になったときを考えてみる．開放であれば，$I = 0$ であるから，$V = B_0$ となる．これを以下のように書いておく．

$$V_{\mathrm{o}} = B_0. \tag{10.45}$$

次に，$I \neq 0$ で内部の電源を全て OFF にするとどうなるであろうか．

$$V_{\mathrm{S1}} = V_{\mathrm{S2}} = I_{\mathrm{S1}} = I_{\mathrm{S2}} = 0 \tag{10.46}$$

であるから，$B_0 = 0$ となり，次式が成り立つ．

$$V = A_0 I. \tag{10.47}$$

これを以下のように書いてみよう．

$$V = Z_{\mathrm{i}} I. \tag{10.48}$$

すると，もともとの $V = A_0 I + B_0$ なる式は，先ほど決めた V_{o} と Z_{i} を用いると，以下のように書けることになる．

$$V = Z_{\mathrm{i}} I + V_{\mathrm{o}}. \tag{10.49}$$

この式の意味するところを回路図にすると，**図 10.31** のようになる．即ち，**図 10.30** の回路は，**図 10.31** と等価である，ということになる．

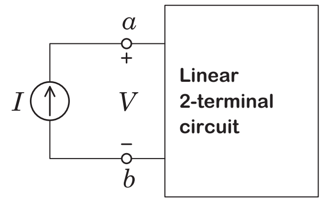


図 10.30 テブナンの定理を考えるための回路．

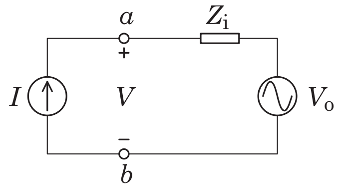


図 10.31 テブナンの定理の証明によって得られた式が意味する回路．

課題

ノートンの定理

ノートンの定理を証明せよ

略解

ノートンの定理の場合も，その証明方法は，テブナンの定理の場合とほぼ同様である．**図 10.32** の□で囲まれた回路について考える．この□で囲まれた回路が，以下の二つの電圧源と二つの電流源を持つ，と仮定する．

$$V_{\mathrm{S1}}, V_{\mathrm{S2}}, \quad I_{\mathrm{S1}}, I_{\mathrm{S2}}. \tag{10.50}$$

重ね合わせの理により，端子 a に流れ込む電流は，各電源が個別に動作したときに流れ込む電流の和である．従って，以下のように表すことができるはずである．

$$I = C_0 V + C_1 V_{\mathrm{S1}} + C_2 V_{\mathrm{S2}} + C_3 I_{\mathrm{S1}} + C_4 I_{\mathrm{S2}}. \tag{10.51}$$

ここで，C_i は□内の回路素子によって決まる定数であるこれを少し書き直すと，

$$I = C_0 V + D_0, \tag{10.52}$$
$$D_0 = C_1 V_{\mathrm{S1}} + C_2 V_{\mathrm{S2}} + C_3 I_{\mathrm{S1}} + C_4 I_{\mathrm{S2}}. \tag{10.53}$$

ここで，端子 ab が短絡になったときを考えてみる．短絡であれば，$V = 0$ であるから，$I = D_0$ となる．これを以下のように書いておく．

$$I_{\mathrm{s}} = D_0. \tag{10.54}$$

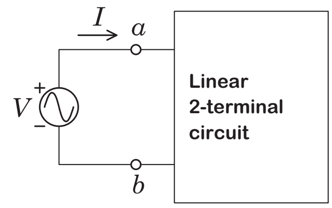


図 10.32 ノートンの定理を考えるための回路.

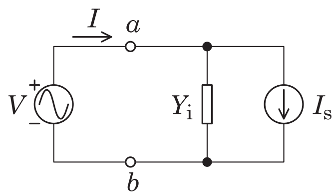


図 10.33 ノートンの定理の証明によって得られた式が意味する回路.

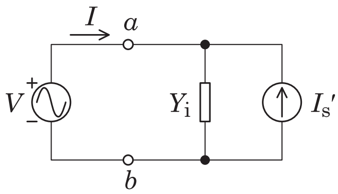


図 10.34 ノートンの定理の証明によって得られた式が意味する回路にて電流の向きを「普通の」向きにした場合の図.

次に，$V \neq 0$ で内部の電源を全て OFF にするとどうなるであろうか.

$$V_{S1} = V_{S2} = I_{S1} = I_{S2} = 0 \tag{10.55}$$

であるから，$D_0 = 0$ となり，次式が成り立つ.

$$I = C_0 V. \tag{10.56}$$

これを以下のように書いてみよう.

$$I = Y_i V. \tag{10.57}$$

すると，もともとの $I = C_0 V + D_0$ なる式は，先ほど決めた I_s と Y_i を用いると，以下のように書けることになる.

$$I = Y_i V + I_s. \tag{10.58}$$

この式の意味するところを回路図にすると，**図 10.33** のようになる．電流源の向きが当初のノートンの定理の紹介で示した図と逆であるが，$I_s = D_0$ の代わりに，$I_{s\prime} = -D_0$ とすれば，**図 10.34** のようにすることができる.

課題

整合 (抵抗の場合)

抵抗のみの場合の供給電力最大の法則を証明せよ

略解

図 10.11 における電力を R_L, R_i, V_o を用いて書くと，以下のようになる.

$$P = R_L I^2 = R_L \left(\frac{V_o}{R_i + R_L} \right)^2. \tag{10.59}$$

P の R_L 依存性をプロットすると，**図 10.11** (b) のようになり，ある R_L で P が最大値を持つ．そのとき，$R_L = R_i$ である，というのがこの法則である.

P が最大値をとるのは，$\mathrm{d}P/\mathrm{d}R_L = 0$ の時であるから，そのときに $R_L = R_i$ となっていることを示せばよい．P の R_L による微分を行えば，次式が得られる.

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R_L} = V_o^2 \frac{R_i - R_L}{(R_i + R_L)^3}. \tag{10.60}$$

この式より，$\mathrm{d}P/\mathrm{d}R_L = 0$ となるのが，$R_L = R_i$ の時であることがわかる.

課題

整合 (インピーダンスの場合)

一般のインピーダンスの場合の供給電力最大の法則を証明せよ

略解

負荷が複素インピーダンスの場合，有効電力を表す式は，

$$P = R_L |I|^2 \tag{10.61}$$

$$= R_L \frac{|V_o|^2}{|Z_i + Z_L|^2} \tag{10.62}$$

$$= R_L \frac{|V_o|^2}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2} \tag{10.63}$$

となる．負荷が抵抗だけの場合には，R_L に関する微分が最大になる条件だけを見出せばよかったが，負荷が複

素インピーダンスの場合には，X_L に関する微分が最大になるという条件も加わる．

$$\frac{\partial P}{\partial R_L}=0,\ \text{かつ}\ \frac{\partial P}{\partial X_L}=0. \tag{10.64}$$

この二つの条件を満たす R_L と X_L を求めると，

$$R_L=R_i,\ \text{かつ}\ X_L=-X_i \tag{10.65}$$

となる，というのがこの法則の証明の流れである．

まず，式 (10.63) を X_L で微分すると，

$$\frac{\partial P}{\partial X_L}=-2|V_o|^2\left\{\frac{R_L(X_i+X_L)}{\left[(R_i+R_L)^2+(X_i+X_L)^2\right]^2}\right\} \tag{10.66}$$

となる．これより，$\partial P/\partial X_L=0$ となる X_L の条件は，式 (10.66) から

$$X_L+X_i=0 \tag{10.67}$$

となることである，ということがわかる．また，こうなる条件は，R_L によらず，X_i と X_L の関係だけで決まっている，ということもわかる[*9]．従って，P を最大にするための必要条件の一つは，

$$X_L=-X_i \tag{10.68}$$

であり，あとは，この条件下で，P が最大になる R_L を見出せばよい．

そこでまず，式 (10.63) において，$X_L=-X_i$ としておくことにする．すると，式 (10.63) は以下のようになる．

$$P=R_L\frac{|V_o|^2}{(R_i+R_L)^2}. \tag{10.69}$$

この式は，負荷が抵抗 R_L だけの場合の電力の式と同じである．従って，$\partial P/\partial R_L=0$ となる条件は，

$$R_L=R_i \tag{10.70}$$

ということがわかる．

以上より，一般的な複素インピーダンスを内部インピーダンス，負荷インピーダンスとした場合には，供給電力最大の条件を満たすための条件は，以下の通りとなる．

$$R_L=R_i,\quad \text{かつ}\quad X_L=-X_i. \tag{10.71}$$

この式の意味するところは，

$$Z_L=Z_i^* \tag{10.72}$$

[*9] $R_L=0$ でも $\partial P/\partial X_L=0$ となるが，そのときは，そもそも有効電力が無いのであるから，$P=0$ となってしまい，最大もくそもない．

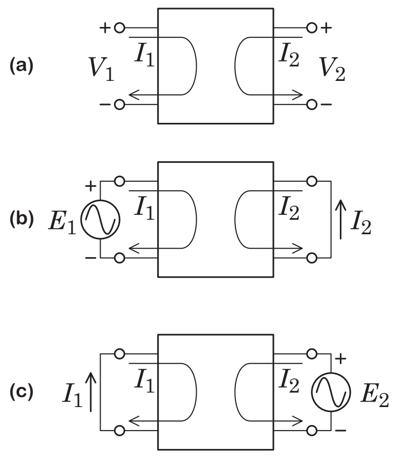


図 10.35 相反定理 (可逆定理) の課題用の図．

である．即ち，負荷インピーダンスと電源の内部インピーダンスが複素共役の関係であれば，最大電力供給の条件が満たされる．言い換えれば，これが満たされるときに，インピーダンス整合がなされる，と言うことができる．

課題

相反定理

図 10.35 (a) において，左側と右側の電流と電圧の関係を表すと，一般的には，

$$I_1=y_{11}V_1+y_{12}V_2, \tag{10.73}$$

$$I_2=y_{21}V_1+y_{22}V_2 \tag{10.74}$$

と書ける．このとき，

$$y_{12}=y_{21} \tag{10.75}$$

が成り立っているときに，この回路が相反性を有することを証明せよ．

略解

図 10.35 (b) のように，$V_1=E_1$，$V_2=0$ とすると，

$$I_2=y_{21}E_1 \tag{10.76}$$

となる．一方，**図 10.35** (c) のように，] $V_1=0$，$V_2=E_2$ とすると，

$$I_1=y_{12}E_2 \tag{10.77}$$

となる．これより，$y_{12}=y_{21}$ であれば，

$$\frac{E_1}{I_2}=\frac{E_2}{I_1} \tag{10.78}$$

となる.

事前基盤知識確認事項

[1] 微分によって極値を求める (その 1)

次式で示される関数 P は，$R_{\mathrm{L}} = R_{\mathrm{i}}$ のときに極大となることを示せ．V_{o}，R_{i} は定数とする．

$$P(R_{\mathrm{L}}) = R_{\mathrm{L}}\left(\frac{V_{\mathrm{o}}}{R_{\mathrm{i}}+R_{\mathrm{L}}}\right)^2.$$

略解

課題 整合 (抵抗の場合) を参照されたし．

[2] 微分によって極値を求める (その 2)

次式で示される二変数の関数 P は，$R_{\mathrm{L}} = R_{\mathrm{i}}$ かつ $X_{\mathrm{L}} = -X_{\mathrm{i}}$ のときに極大となることを示せ．V_{o}，R_{i}，X_{i} は定数とする．

$$P(R_{\mathrm{L}}, X_{\mathrm{L}}) = R_{\mathrm{L}}\left(\frac{|V_{\mathrm{o}}|^2}{(R_{\mathrm{i}}+R_{\mathrm{L}})^2+(X_{\mathrm{i}}+X_{\mathrm{L}})^2}\right).$$

略解

課題 整合 (インピーダンスの場合) を参照されたし．

事後学習内容確認事項

A. テブナンの定理（テブナン等価回路）

1. テブナン等価回路

図 10.36 の回路のテブナン等価回路を求めよ．

2. 最大電力

最大電力を供給するための R_L を求め，その最大電力を求めよ．

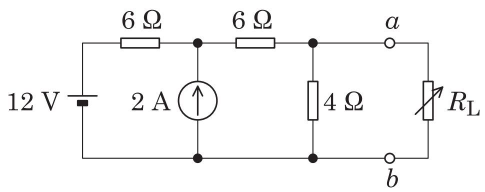


図 10.36 テブナン等価回路問題の図.

略解

1. テブナン等価回路

1.1 R_i を求める.

まず，テブナンの等価回路における内部インピーダンス (この場合は，抵抗成分のみであるので内部抵抗) R_i を求める．この R_i は，負荷が接続されている端子 ab の電源側 (左側) の全ての電源を OFF にした場合に，端子 ab から電源側 (左側) を見たときの抵抗である．

電圧源の OFF とは，電圧源を短絡 (ショート) にすることであり，電流源の OFF とは，電流源を開放 (オープン) にすることであるから，R_i を求めるための回路図は，図 10.37 のようになる．即ち，R_i は，4 Ω と $6+6=12$

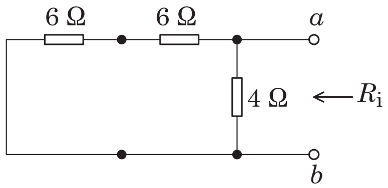


図 10.37 テブナン等価回路の R_i を求めるための図.

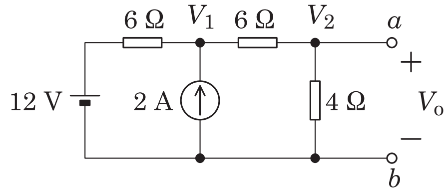


図 10.38 テブナン等価回路の V_o を求めるための図.

Ω の抵抗を並列接続したものとなるから，

$$R_i = 1 \Big/ \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right) = 3\ \Omega.$$

1.2 V_o を求める.

次に，テブナン等価回路の電圧源の電圧 V_o を求める．テブナン等価回路の電圧源の電圧は，端子 ab に負荷を接続しないときの開放電圧であり，**図 10.38** における V_o となる．

図 10.38 のように V_1，V_2 を設定し，節点電圧法を適用すると，

$$2 = \frac{V_1 - 12}{6} + \frac{V_1 - V_2}{6},$$
$$0 = \frac{V_2 - V_1}{6} + \frac{V_2 - 0}{4}.$$

これを書き直すと，

$$24 = 2V_1 - V_2, \tag{10.79}$$
$$0 = -2V_1 + 5V_2. \tag{10.80}$$

上式から V_1 を消去して V_2（即ち V_o）を求めよう．式 (10.79) と式 (10.80) の和より，

$$24 = 4V_2 \quad よって \quad V_2 = V_o = 6\ \text{V}.$$

以上より，テブナン等価回路は，**図 10.39** のようになる．

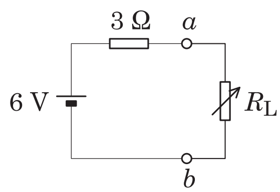


図 10.39 図 10.36 のテブナン等価回路.

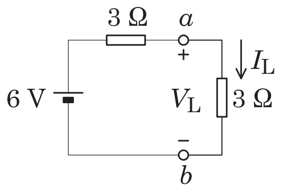


図 10.40 テブナン等価回路において負荷に最大電力を供給する負荷抵抗を接続した回路.

2. 最大電力

図 10.39 より，最大電力を与える負荷抵抗の値は

$$R_L = 3\ \Omega.$$

このときの回路は，**図 10.40** のようになる．負荷にかかる電圧を V_L，負荷に流れる電流を I_L とすると，最大電力は，

$$P_{\mathrm{Max}} = V_L I_L = \frac{V_L^2}{R_L}$$

である．負荷に掛かる電圧 V_L は，電源の電圧を二つの 3 Ω の抵抗で分割した電圧となるから，

$$V_L = \frac{3}{3+3} \times 6 = 3\ \mathrm{V}.$$

したがって，

$$P_{\mathrm{Max}} = \frac{V_L^2}{R_L} = \frac{3^2}{3} = 3\ \mathrm{W}$$

となる．

B. ノートンの定理（ノートン等価回路）

1. ノートン等価回路

図 10.41 の回路のノートン等価回路を求めよ．

2. 最大電力を与える負荷抵抗値

最大電力を供給するための R_L を求め，その最大電力を求めよ．

略解

1. ノートン等価回路

1.1 R_i を求める

まず，ノートンの等価回路における内部インピーダンス（この場合は，抵抗成分のみであるので内部抵抗）R_i

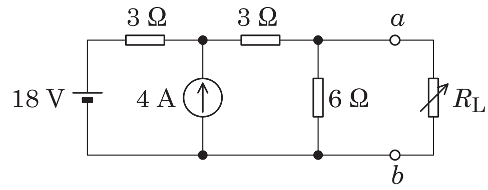


図 10.41 ノートン等価回路問題の図.

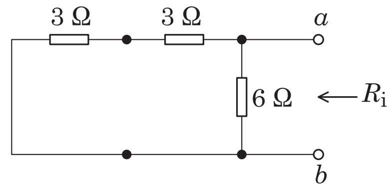


図 10.42 ノートン等価回路の R_i を求めるための図.

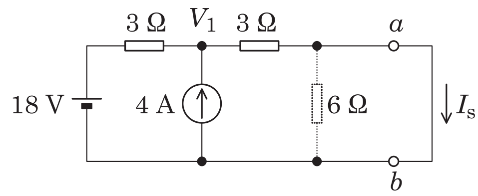


図 10.43 ノートン等価回路の I_s を求めるための図.

を求める．この R_i は，負荷が接続されている端子 ab の電源側（左側）の全ての電源を OFF にした場合に，端子 ab から電源側（左側）を見たときの抵抗である．

電圧源の OFF とは，電圧源を短絡（ショート）にすることであり，電流源の OFF とは，電流源を開放（オープン）にすることであるから，R_i を求めるための回路図は，**図 10.42** のようになる．即ち，R_i は，6 Ω と 3+3 = 6 Ω の抵抗を並列接続したものとなるから，

$$R_i = 1 \Big/ \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = 3\ \Omega.$$

1.1 I_s を求める

次に，ノートン等価回路の電流源の電流 I_s を求める．ノートン等価回路の電流源の電流は，端子 ab を短絡したときの短絡電流であり，**図 10.43** における I_s となる．このとき，端子 ab は短絡されているため，短絡経路と並列につながっている 6 Ω の抵抗には電流が流れなくなる．従って，わかりやすくするために，6 Ω の抵抗を外してしまおう．

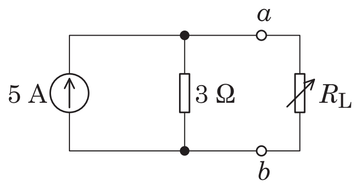


図 10.44 図 10.41 のノートン等価回路.

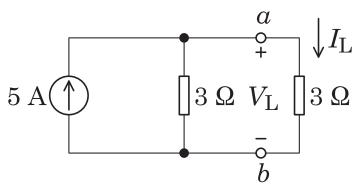


図 10.45 ノートン等価回路において最大電力を供給する回路.

図 10.43 のように V_1 を設定し，節点電位法を適用すると，

$$4 = \frac{V_1 - 18}{3} + \frac{V_1 - 0}{3}.$$

これより，

$$V_1 = 15 \text{ V}.$$

これより，ab を流れる電流 I_s は，

$$I_s = \frac{V_1}{3} = \frac{15}{3} = 5 \text{ A}.$$

以上より，ノートン等価回路は，**図 10.44** のようになる．

2. 最大電力

最大電力を供給する負荷は，前問の結果より $R_L = 3$ Ω である．この時の回路は，**図 10.45** のようになる．

負荷に流れる電流 I_L は，電流源の電流 5 A を二つの 3 Ω の抵抗で分割した電流である．従って，

$$I_L = \frac{3}{3+3} \times 5 = 2.5 \text{ A}.$$

従って，このときの負荷での消費電力は，

$$\begin{aligned} P_{\text{Max}} &= R_L I_L^2 = 3 \times 2.5^2 = 3 \times 6.25 \\ &= 18.75 = 18.8 \text{ W} \end{aligned}$$

となる．

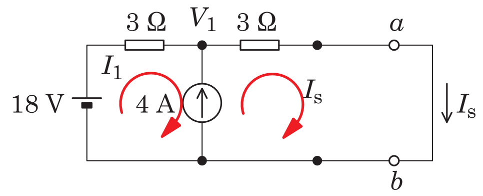


図 10.46 閉路電流法を用いて短絡電流を求める．

別解

I_s を求めるときに，閉路電流法を用いたらどうなるだろう？という質問があったので，追記します．

図 10.46 のように閉路電流をとると，I_1 を設定した閉路の方程式は，

$$18 = 3I_1 + ?\ (\text{電流源に掛かる電圧})$$

となってしまう．このようなときは，少しトリッキーなやり方をすることになる．即ち，電流源に掛かる電圧は，この時点ではわからないから，例えば，V_1 としておくのである．すると，

$$\begin{aligned} 18 &= 3I_1 + V_1, \\ V_1 &= 3I_s \end{aligned}$$

となる．これに加えて，もう一つ式が加わる．即ち，電流源の経路に流れる電流値が 4 A である，と既に与えられている点である．電流源には，I_s と，それと逆の I_1 が流れている，と設定しているから，

$$I_s - I_1 = 4.$$

以上の式を解けば，同じ結果が得られる．

即ち，閉路電流法や節点電位法で，「およっ！？どうすんの，これ？」と思ったら，未知の電圧，もしくは電流を仮定してみるのである．未知のものを一つ仮定したから，もう一つ式が必要になるが，それは，今回のように，ケースバイケースで見つかることになる．

参考文献

[1] http://homepage3.nifty.com/jm4jui-ken/newpage19.htm

[2] http://www.comet-ant.co.jp/new/HTML/products_peri_swr_1.html

第 11 章

二端子対網の行列表現：Y 行列, Z 行列, K 行列, H 行列, G 行列

本章では，異なる機能を有する複数の回路網を連結して所望の機能を実現する際に利用される二端子対網の行列表現について学習する．

11.1　二端子対網とは

これまでに扱ってきた回路網は**図 11.1** (a) に示すような回路が主であった．これを一端子対網という．これに対し，入力側と出力側 (一次側と二次側という言い方もする) に，それぞれ二端子を有する**図 11.1** (b) のような回路を二端子対網という．このような回路は，異なる機能を有する複数の回路網を連結して所望の機能を実現する際に利用されることが多い．

入力側の電圧と電流は，出力側の電圧と電流との間に，□で表された電気回路の特性に依存するなんらかの関係を有する．このような関係を表す方法として，行列演算の手法が適用できるであろう，ということは容易に想像ができる．本章では，二端子対網の入力側と出力側を関連づける各種の行列について紹介する．

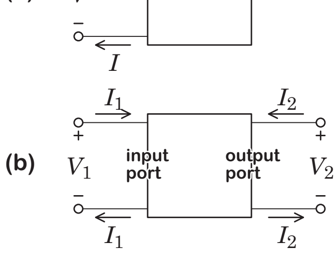


図 11.1 (a)1 端子対網と (b) 二端子対網.

11.2　アドミタンス行列：Y 行列

図 11.1 (b) のような二端子対網があるとき，アドミタンス行列は，次式で定義される．

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2, \tag{11.1}$$
$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2. \tag{11.2}$$

これを行列形式で書けば，次式のようになる．

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}. \tag{11.3}$$

各種の行列表現がある中で，この形式の利点は，二端子対網を並列接続するときに便利である，という点である．

11.2.1　Y 行列：要素決定法

未知の二端子対網の□の中を Y 行列で表そうとするとき，その行列の要素の値を知る必要がある．そのためには，**図 11.2** に示すような接続をして，得られた電圧と電流を用いて以下のような計算をすればよい．

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0}, \tag{11.4}$$
$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}, \tag{11.5}$$
$$y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0}, \tag{11.6}$$
$$y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}. \tag{11.7}$$

11.2.2　Y 行列：等価回路

Y 行列で表されるような電流と電圧の関係になるような回路を等価回路で表すと，**図 11.3** (a) のようになる．

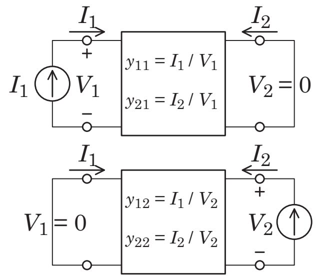


図 11.2 Y 行列の要素を決定するための接続方法.

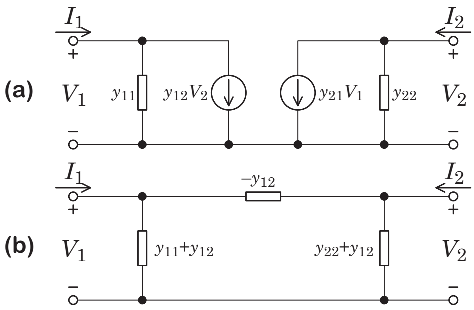


図 11.3 Y 行列の等価回路.

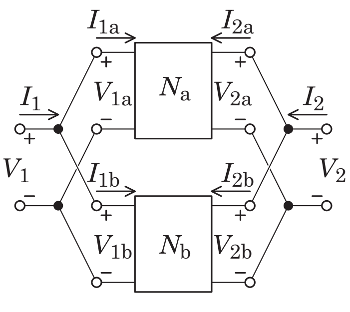


図 11.4 Y 行列で表された二つの二端子対網の並列回路.

図 11.3 (b) のようにも表すことはできるが，負の回路定数を持つ回路素子を必要とするため，物理的には実現不可能な回路である.

11.2.3　Y 行列：並列接続

Y 行列で表される二端子対網は，**図 11.4** に示すように N_a，N_b で表される**二つの二端子対網を並列接続したときに，全体の Y 行列が以下のように簡便に計算できる.**

$$Y = N_a + N_b. \tag{11.8}$$

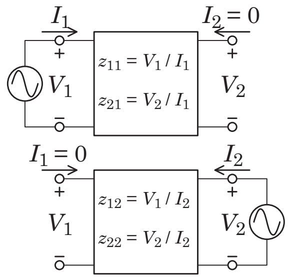


図 11.5 Z 行列の要素を決定するための接続方法.

11.3　インピーダンス行列：Z 行列

図 11.1 (b) のような二端子対網があるとき，インピーダンス行列は，次式で定義される.

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2, \tag{11.9}$$
$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2. \tag{11.10}$$

これを行列形式で書けば，次式のようになる.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \tag{11.11}$$

各種の行列表現がある中で，この形式の利点は，二端子対網を直列接続するときに便利である，という点である.

11.3.1　Z 行列：要素決定法

未知の二端子対網の□の中を Z 行列で表そうとするとき，その行列の要素の値を知る必要がある．そのためには，**図 11.5** に示すような接続をして，得られた電圧と電流を用いて以下のような計算をすればよい.

$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}, \tag{11.12}$$
$$z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}, \tag{11.13}$$
$$z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}, \tag{11.14}$$
$$z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}. \tag{11.15}$$

11.3.2　Z 行列：等価回路

z 行列で表されるような電流と電圧の関係になるような回路を等価回路で表すと，**図 11.6** (a) のようになる．**図 11.6** (b) のようにも表すことができる.

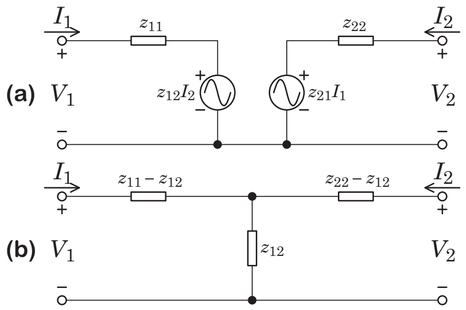


図 11.6 Z 行列の等価回路.

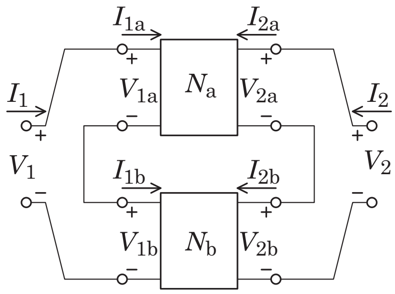


図 11.7 Z 行列で表された二つの二端子対網の直列回路.

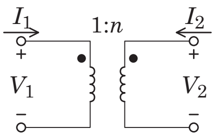


図 11.8 トランス (変成器，変圧器).

11.3.3 Z 行列：直列接続

Z 行列で表される二端子対網は，**図 11.7** に示すように N_a，N_b で表される**二つの二端子対網を直列接続したときに，全体の Z 行列が以下のように簡便に計算できる**.

$$Z = N_a + N_b. \tag{11.16}$$

11.3.4 Z 行列では表せない回路

二端子対網の行列表現は，如何なる回路でも表現できるわけではない．例えば，**図 11.8** に示すトランスについては，入力側と出力側の電圧と電流の関係が以下のようになっている.

$$V_1 = \frac{1}{n} V_2, \tag{11.17}$$
$$I_1 = -n I_2. \tag{11.18}$$

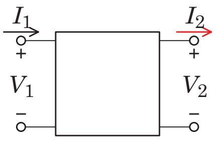


図 11.9 K 行列で表そうとする二端子対網．出力側の電流の向きに注意！

この関係式は，Z 行列で表すことができないことがわかる.

11.4 縦続行列：K 行列

図 11.9 のような二端子対網があるとき，縦続行列は，次式で定義される.

$$V_1 = AV_2 + BI_2, \tag{11.19}$$
$$I_1 = CV_2 + DI_2. \tag{11.20}$$

ここで，注意しなければならない点がある．**図 11.9 で示した回路の出力側の電流の向きは，図 11.1 (b) で示した回路の出力側の電流の向きとは逆である**，という点である．このようにするのは，この二端子対網を縦続接続するときに，一段目の電流と二段目の電流の向きが同じになるようにするためである.

これを行列形式で書けば，次式のようになる.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}. \tag{11.21}$$

各種の行列表現がある中で，この形式の利点は，二端子対網を縦続接続するときに便利である，という点である.

11.4.1 K 行列：要素決定法

未知の二端子対網の□の中を K 行列で表そうとするとき，その行列の要素の値を知る必要がある．そのためには，**図 11.10** に示すような接続をして，得られた電圧と電流を用いて以下のような計算をすればよい.

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0}, \tag{11.22}$$
$$B = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0}, \tag{11.23}$$
$$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0}, \tag{11.24}$$
$$D = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0}. \tag{11.25}$$

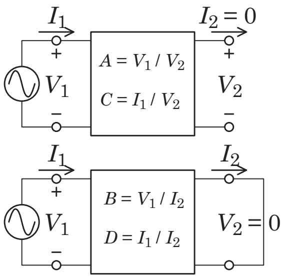


図 11.10 K 行列の要素を決定するための接続方法.

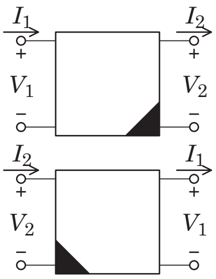


図 11.12 K 行列回路の入出力逆転.

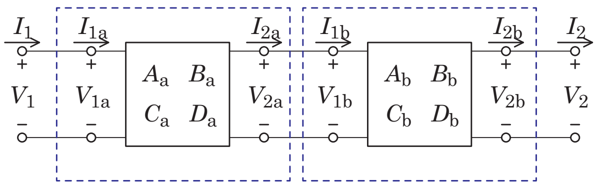


図 11.11 K 行列で表された二つの二端子対網の縦続接続回路.

11.4.2 縦続行列：縦続接続

K 行列で表される二端子対網は，**図 11.11** に示すように

$$N_a = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix}, \tag{11.26}$$

$$N_b = \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \tag{11.27}$$

で表される**二つの二端子対網を縦続接続したときに，全体の K 行列が以下のように簡便に計算できる**という特徴を有する．

$$K = N_a N_b = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix}. \tag{11.28}$$

11.4.3 K 行列：入出力入替

K 行列で表される二端子対網は，伝送路などを表すときに用いられる．このとき，入射信号に対して，反射信号も扱うことになる．従って，**図 11.12** に示すように，K 行列で表される回路の入力と出力を逆転した場合も取り扱うことになる．入力と出力を逆転した二端子対網に対しても，何らかの K 行列が定まるが，相反定理を満たす場合と，満たさない場合で，行列の要素が異なってくることに注意する必要がある．この節では，その点について述べる．

相反定理を満たさない場合

相反定理を満たさない場合，というのは，後述の相反定理を満たす場合も含む，より一般的な条件である．このとき，

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{11.29}$$

であるとすると，入出力逆転版の方程式は，以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{|K|} \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}. \tag{11.30}$$

相反定理を満たす場合

相反定理を満たす場合は，前節の「満たさない場合」において，$|K| = 1$ となる場合である．即ち，以下のように，D と A を入れ替えればよいだけ，となる．

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}. \tag{11.31}$$

11.5 ハイブリッド行列 (その 1)：H 行列

図 11.1 (b) のような二端子対網があるとき，ハイブリッド行列は，次式で定義される．

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2, \tag{11.32}$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2. \tag{11.33}$$

これを行列形式で書けば，次式のようになる．

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}. \tag{11.34}$$

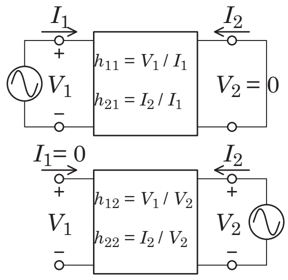


図 **11.13** H 行列の要素を決定するための接続方法.

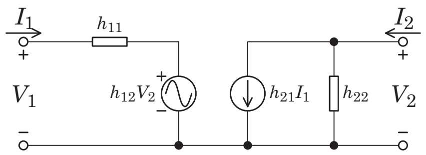


図 **11.14** H 行列の等価回路.

11.5.1　H 行列：要素決定法

未知の二端子対網の□の中を H 行列で表そうとするとき，その行列の要素の値を知る必要がある．そのためには，**図 11.13** に示すような接続をして，得られた電圧と電流を用いて以下のような計算をすればよい．

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0}, \tag{11.35}$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}, \tag{11.36}$$

$$h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0}, \tag{11.37}$$

$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0}. \tag{11.38}$$

11.5.2　H 行列：等価回路

H 行列で表されるような電流と電圧の関係になるような回路を等価回路で表すと，**図 11.14** のようになる．

11.6　ハイブリッド行列 (その 2)：G 行列

図 11.1 (b) のような二端子対網があるとき，G 行列は，次式で定義される．

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2, \tag{11.39}$$

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \tag{11.40}$$

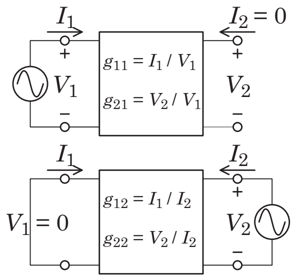


図 **11.15** G 行列の要素を決定するための接続方法.

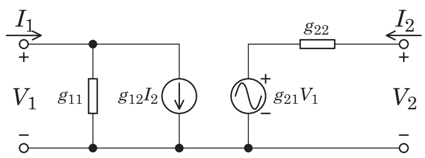


図 **11.16** G 行列の等価回路.

これを行列形式で書けば，次式のようになる．

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \tag{11.41}$$

11.6.1　G 行列：要素決定法

未知の二端子対網の□の中を G 行列で表そうとするとき，その行列の要素の値を知る必要がある．そのためには，**図 11.15** に示すような接続をして，得られた電圧と電流を用いて以下のような計算をすればよい．

$$g_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{I_2=0}, \tag{11.42}$$

$$g_{21} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0}, \tag{11.43}$$

$$g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_1=0}, \tag{11.44}$$

$$g_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{V_1=0}. \tag{11.45}$$

11.6.2　G 行列：等価回路

G 行列で表されるような電流と電圧の関係になるような回路を等価回路で表すと，**図 11.16** のようになる．

11.6.3　バイポーラトランジスタの小信号等価回路

図 11.17 は，エミッタ接地にてバイポーラトランジスタを利用するときの回路である．E, B, C は，それぞれ，

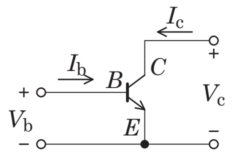


図 11.17 バイポーラトランジスタ.

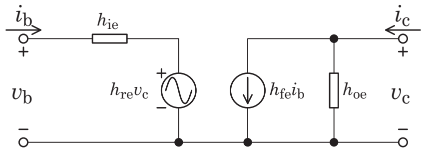


図 11.18 バイポーラトランジスタの小信号等価回路.

エミッタ，ベース，コレクタを表す．ベース電流 I_b に微弱な変動 i_b が加わったときに，コレクタ電流 I_c には，h_{fe} 倍された変動 $i_c = h_{fe}i_b$ が発生する．これによって，ベース側に入力された小信号を増幅するのである．

図 11.17 に示すようなバイポーラトランジスタの小信号等価回路は，**図 11.18** のように表される．即ち，小信号に関しては，以下のような H 行列の関係式が成り立つ．

$$v_b = h_{ie}i_b + h_{re}v_c, \tag{11.46}$$

$$i_c = h_{fe}i_b + h_{oe}v_c. \tag{11.47}$$

ここで，h_{**} をトランジスタの h パラメータといい，それぞれ，以下のような意味合いを持っている．

- h_{ie}: ベース入力インピーダンス (~ 6 kΩ)
- h_{re}: 逆電圧帰還率 (~ 1.5×10^{-4})
- h_{fe}: ベース・コレクタ電流増幅率 (~ 200)
- h_{oe}: 出力アドミタンス (~ 8 μS)

この中でも，特に h_{fe} は，増幅作用をもたらすパラメータであるので，トランジスタ回路では重要なパラメータとして位置づけられており，「エイチ・エフ・イー」と称されている．詳しくは，電子回路学で学習するであろう．

11.6.4　電界効果トランジスタの小信号等価回路

図 11.19 は，ソース接地にて電界効果トランジスタを利用するときの回路である．S, D, G は，それぞれ，ソース，ドレイン，ゲートを表す．ゲート電圧 V_g に微弱な変動 v_g が加わったときに，ドレイン電流 I_d には，g_m 倍

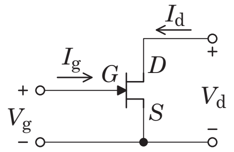


図 11.19 電界効果トランジスタ (FET).

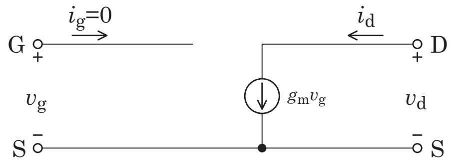


図 11.20 近似を適用した FET の小信号等価回路.

された変動 $i_d = g_m v_g$ が発生する．これによって，ゲート側に入力された小信号を増幅するのである．

図 11.19 に示すような FET の小信号等価回路を近似を考慮して描くと，**図 11.20** のように表される．即ち，小信号等価回路の電圧と電流には以下のような Y 行列の関係式が成り立つ．

$$i_g = 0, \tag{11.48}$$

$$i_d = g_m v_g. \tag{11.49}$$

ここで，g_m(Y 行列の y_{21} に相当) を FET の相互コンダクタンスという．このパラメータは，FET の増幅係数であり，「ジー・エム」と称されている．

なお，FET は極めて高い入力インピーダンスをもつ，という特徴を有するデバイスである．従って，一次側については，電圧はかかるが，電流はほとんど流れない，と近似される．そのため，等価回路では，y_{11} がゼロ (入力インピーダンスが無限大) となっており，電流源成分である y_{12} もゼロとなっている．一方，出力側のアドミタンス y_{22} は，出力側に接続される負荷アドミタンスと比較すると，通常は十分大きいため，$y_{21}V_1 = g_m vg$ によって流れる電流のほとんどは，負荷側に流れる．そのため，等価回路では y_{22} が省略されている．

事前基盤知識確認事項

[1] 回路を表す行列の要素を求める (Y 行列型).

一次側と二次側の電圧と電流の関係式が次式となる**図 11.21** に示すような回路があるとする.

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2,$$
$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2.$$

このとき，二次側を短絡 ($V_2 = 0$) にした状態で一次側に I_1 なる既知の電流を流し，そのときの一次側の電圧 V_1 と二次側の電流 I_2 を計測することにより，y_{11} と y_{21} が決定できることを示せ．また，一次側を短絡 ($V_1 = 0$) にした状態で二次側に I_2 なる既知の電流を流し，そのときの二次側の電圧 V_2 と一次側の電流 I_1 を計測することにより，y_{12} と y_{22} が決定できることを示せ.

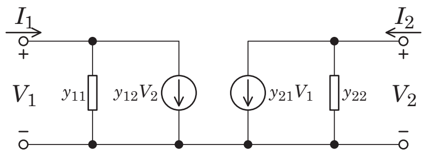


図 11.21 Y 行列の形式で表すことのできる回路.

略解

二次側を短絡した場合．即ち，$V_2 = 0$ とした場合，与式は以下のようになる.

$$I_1 = y_{11}V_1,$$
$$I_2 = y_{21}V_1.$$

I_1 は既知であり，V_1 と I_2 は計測により明らかになることから，次式によって，y_{11} と y_{21} を決定することができる.

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1}, \quad y_{21} = \frac{I_2}{V_1}.$$

一次側を短絡した場合．即ち，$V_1 = 0$ とした場合，与式は以下のようになる.

$$I_1 = y_{12}V_2,$$
$$I_2 = y_{22}V_2.$$

I_2 は既知であり，V_2 と I_1 は計測により明らかになることから，次式によって，y_{12} と y_{22} を決定することができる.

$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2}, \quad y_{22} = \frac{I_2}{V_2}.$$

[2] 方程式が示す等価回路を描く (H 行列型).

一次側と二次側の電圧と電流の関係式が次式となる回路を描け.

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2, \tag{11.50}$$
$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2. \tag{11.51}$$

略解

第一式より，一次側の電圧 V_1 が $h_{11}I_1$ と $h_{12}V_2$ の和となっていることから，一次側の等価回路は，それぞれの電圧が現れるような回路素子の直列接続と考えることができる．それぞれ以下のように解釈できる.

- $h_{11}I_1$ の電圧成分
  一次側の電流 I_1 が抵抗 h_{11} に流れたことによる電圧降下.
- $h_{12}V_2$ の電圧成分
  二次側の電圧 V_2 に比例した電圧を出す電圧源．比例定数が h_{12}.

以上より，一次側の等価回路は，**図 11.22** の一次側のような回路となる.

第二式より，二次側の電流 I_2 が $h_{21}I_1$ と $h_{22}V_2$ の和となっていることから，二次側の等価回路は，それぞれの電流が流れるような回路素子の並列接続と考えることができる．それぞれ以下のように解釈できる.

- $h_{21}I_1$ の電流成分
  一次側の電流 I_1 に比例した電流を流す電流源．比例定数が h_{21}.
- $h_{22}V_2$ の電流成分
  二次側の電圧 V_2 がコンダクタンス h_{22} に印加されることによって流れる電流.

以上より，二次側の等価回路は，**図 11.22** の二次側のような回路となる.

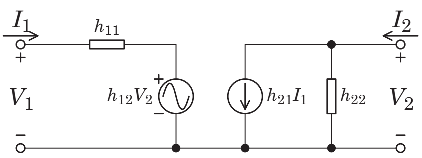


図 11.22 H 行列表現に相当する方程式が表す等価回路.

事後学習内容確認事項

A. 行列要素を用いた計算

図 11.23 の回路において，I_1, I_2 を求めよ．なお，二端子対網の z 行列要素は次の通りとする．

$$\begin{bmatrix} 40\ \Omega & j20\ \Omega \\ j30\ \Omega & 50\ \Omega \end{bmatrix}$$

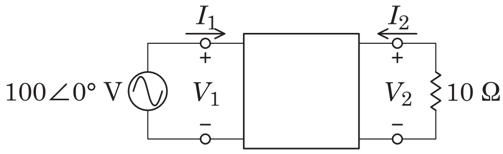


図 11.23 行列要素を用いた計算の図.

略解

$z_{12} \neq z_{21}$ であるから，**この回路は相反では無い**ことに注意のこと．

マトリクスを用いて電圧と電流の関係を直接書き下すと，

$$V_1 = 40I_1 + j20I_2,$$
$$V_2 = j30I_1 + 50I_2.$$

与えられた回路から (I_2 の電流の向きに注意して),

$$V_1 = 100,$$
$$V_2 = -10I_2.$$

であるから，

$$100 = 40I_1 + j20I_2, \tag{11.52}$$
$$-10I_2 = j30I_1 + 50I_2. \tag{11.53}$$

式 (11.53) より，

$$I_1 = j2\,I_2. \tag{11.54}$$

これを式 (11.52) に代入して，

$$100 = j80I_2 + j20I_2 \quad \therefore \quad I_2 = \frac{100}{j100} = -j.$$

これを式 (11.54) に代入して，

$$I_1 = j2\,(-j) = 2.$$

まとめると，

$$I_1 = (2\angle 0°)\ \text{A},$$
$$I_2 = (1\angle -90°)\ \text{A}.$$

B. 行列要素を求める計算

図 11.24 の回路の y 行列を求めよ．

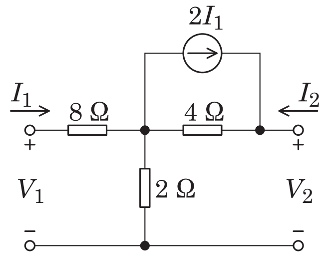


図 11.24 行列要素を求める計算の図.

略解

まず，

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \quad と \quad y_{21} = \frac{I_2}{V_1}$$

を求める回路として，**図 11.25** のような回路を考える．節点 1 の電位を V_0 と設定すると，I_1, I_2, V_1, V_2 が V_0 の定数倍として表されるハズであり，それを利用すれば，わり算して y_{ij} を求めるときに，V_0 が消えてくれるハズである．

節点 1 について考えよう．I_1 が 8 Ω を通して流れ込む成分と，$2I_1$ として流れ出る成分が電流源関係であり，それ以外は，抵抗を通して流れ出る，と設定すると，

$$I_1 - 2I_1 = -I_1 = \frac{V_0}{4} + \frac{V_0}{2} = \frac{3}{4}V_0. \tag{11.55}$$

ここで，8 Ω を流れる電流 I_1 については，向きに注意し

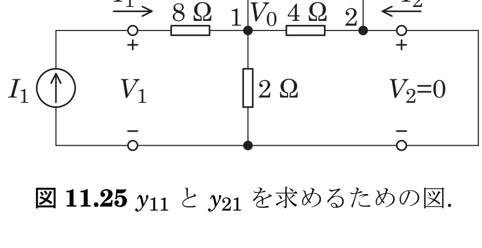


図 11.25 y_{11} と y_{21} を求めるための図.

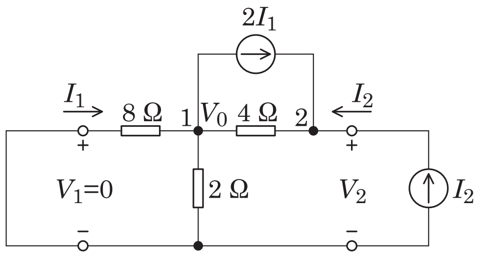


図 11.26 y_{12} と y_{22} を求めるための図.

て，次のようにも書ける (普通のオームの法則).

$$I_1 = \frac{V_1 - V_0}{8}. \tag{11.56}$$

従って，式 (11.55) より，

$$\frac{V_1 - V_0}{8} = -\frac{3}{4}V_0,$$
$$V_1 - V_0 = -6V_0,$$
$$\therefore\ V_1 = -5V_0. \tag{11.57}$$

これを式 (11.56) に代入すれば,

$$I_1 = \frac{-5V_0 - V_0}{8} = -0.75V_0. \tag{11.58}$$

この式と，式 (11.57) とから,

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{-0.75V_0}{-5V_0} = 0.15 \text{ S}.$$

節点 2 では,

$$I_2 + 2I_1 = \frac{0 - V_0}{4} = -0.25V_0.$$

式 (11.58) を用いて I_1 を V_0 で表すと,

$$I_2 - 2 \times 0.75V_0 = -0.25V_0,$$
$$\therefore\ I_2 = 1.25V_0.$$

従って,

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{1.25V_0}{-5V_0} = -0.25 \text{ S}.$$

次に，y_{12} と y_{22} を求める回路としては，**図 11.26** のような回路を考える.

節点 1 では,

$$I_1 - 2I_1 = \frac{V_0 - V_2}{4} + \frac{V_0}{2},$$
$$-I_1 = \frac{V_0 - V_2}{4} + \frac{V_0}{2}.$$

ここで,

$$I_1 = \frac{0 - V_0}{8} = -\frac{V_0}{8} \tag{11.59}$$

であるから，これを左辺に代入して,

$$\frac{V_0}{8} = \frac{V_0 - V_2}{4} + \frac{V_0}{2},$$
$$V_0 = 2V_0 - 2V_2 + 4V_0,$$
$$2V_2 = -V_0 + 2V_0 + 4V_0 = 5V_0,$$
$$\therefore\ V_2 = 2.5V_0. \tag{11.60}$$

従って,

$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = \frac{-V_0 / 8}{2.5V_0} = -0.05 \text{ S}.$$

節点 2 では,

$$I_2 + 2I_1 = \frac{V_2 - V_0}{4}.$$

式 (11.59) と式 (11.60) を用いて，I_1 と V_2 を V_0 で表すと,

$$I_2 - \frac{V_0}{4} = \frac{2.5V_0 - V_0}{4}.$$

$$I_2 = \frac{2.5}{4}V_0 = 0.625V_0.$$

従って,

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{0.625V_0}{2.5V_0} = 0.25 \text{ S}.$$

以上の結果をまとめると，以下のようになる.

$$y_{11} = 0.15 \text{ S},$$
$$y_{12} = -0.05 \text{ S},$$
$$y_{21} = -0.25 \text{ S},$$
$$y_{22} = 0.25 \text{ S}.$$

なお，この場合も，$y_{12} \neq y_{21}$ となっており，相反回路では無いことがわかる.

第 12 章

二端子対網の伝送的性質：反復パラメータ，影像パラメータ，特性インピーダンス

本章では，複数の二端子対網を伝送路的に縦続接続したときの入力電圧・電流と最終段の出力電圧・電流の関係，並びに，電力反射の抑制に関して学習する．

12.1　伝送路と伝送量

二端子対網を伝送路的に扱うとは，一次側への入力に対して，二次側に出力が出る回路，として扱う，ということである．伝送路において重要なのは，入力に対して出力がどうなるか，という点であるから，**図 12.1** に示すような二端子対網を考えた場合，以下のパラメータが重要となる．

$$\frac{V_2}{V_1} \quad 及び \quad \frac{I_2}{I_1} \tag{12.1}$$

但し，実際の伝送路では，V_2/V_1 や I_2/I_1 という「比」そのもののダイナミックレンジ (取り得る値の桁の範囲) が極めて広いため，「比」の対数を使い，それを**伝送量**と呼んでいる．

$$\theta_{\mathrm{v}} = \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \ln\left|\frac{V_1}{V_2}\right| + \mathrm{j}\arg\left(\frac{V_1}{V_2}\right), \tag{12.2}$$

$$\theta_{\mathrm{i}} = \ln\left(\frac{I_1}{I_2}\right) = \ln\left|\frac{I_1}{I_2}\right| + \mathrm{j}\arg\left(\frac{I_1}{I_2}\right). \tag{12.3}$$

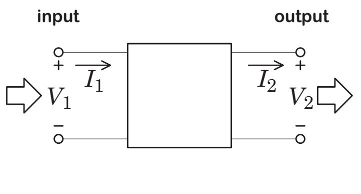


図 12.1 二端子対網を伝送路的に捉えた場合の入力と出力．

式 (12.1) と見比べると，分母と分子が入れ替わっていることに気づく．伝送路の場合，一般に，出力の大きさが入力よりも小さくなるため，出力/入力の大きさが 1 以下となり，その対数をとった値が負になる．これを正の値にするために分母と分子が逆転している．また，分母と分子にある電圧と電流はフェーザ形式 (複素数) で表したものである．従って，その対数をとった値にも実部と虚部があり，それぞれ，**減衰量** (単位：ネーパ)，**位相量** (単位：ラジアン，または，度) と呼ばれている．これらの量は，その名前が示す通り，以下のような意味を持つ．

- **減衰量**
  入力に対して出力がどれだけ減衰したか
- **位相量**
  入力に対して出力の位相がどれだけ変化したか

12.1.1　伝送量の使い方

ある二端子対網の伝送量が $\theta = \alpha + \mathrm{j}\beta$ であるとき，入力を $V_1 = |V_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_1}$，出力を $V_2 = |V_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_2}$ とすると，以下の関係が成り立つ．

$$V_2 = \mathrm{e}^{-\theta} V_1 \tag{12.4}$$

これは電流についても同様である．大きさと偏角について個別に見てみると，以下のようになる．

$$|V_2| = \mathrm{e}^{-\alpha}|V_1|, \tag{12.5}$$

$$\arg(V_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi_1-\beta)}. \tag{12.6}$$

即ち，

- 実効値が $\mathrm{e}^{-\alpha}$ 倍される (減衰する)
- 位相が $-\beta$ だけ遅れる

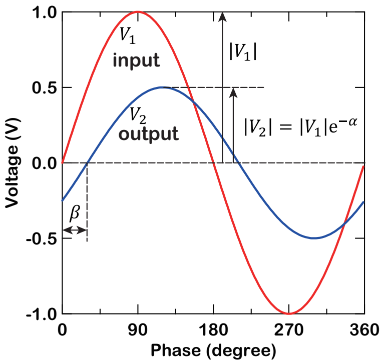


図 12.2 伝送量が $\alpha+\mathrm{j}\beta$ の二端子対網の入力電圧波形と出力波形波形．

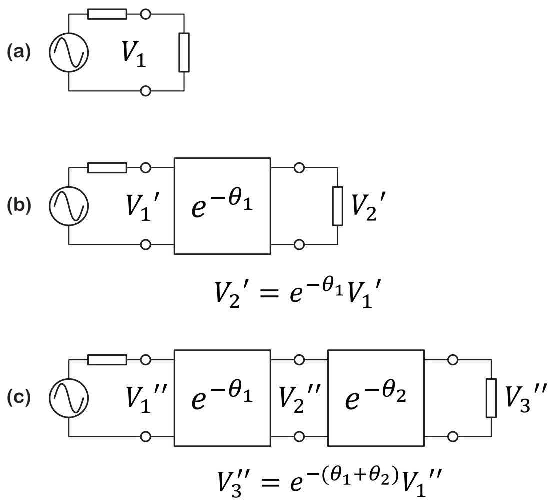


図 12.3 二端子対網の縦続接続時の伝送量．

従って，伝送量が $\alpha+\mathrm{j}\beta$ の二端子対網の入力電圧波形と出力電圧波形の関係は，**図 12.2** のようになる．

12.2　伝送路の縦続接続と電力の反射

図 12.3 に示すように，信号の伝送を多段の二端子対網を用いて行う場合，原理的には，各二端子対網の伝送量を加算したものを用いれば，最終段の出力結果を計算することができる．

しかし，負荷に電力を供給するとき，電源側の内部インピーダンスと負荷側の内部インピーダンスが整合していない場合には，ほとんどの電力が負荷側で反射する場合もあり得る，ということを既に学んだ．

従って，何も考えずに二端子対網を多段縦続接続をす

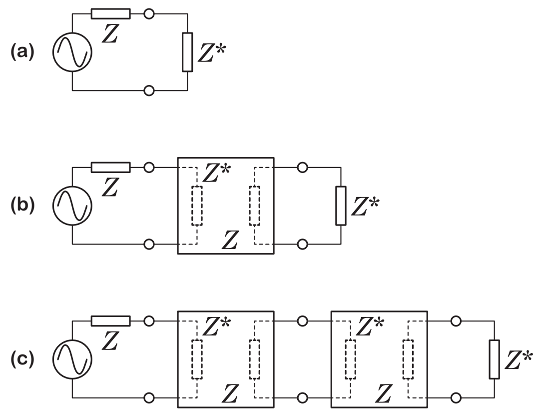


図 12.4 二端子対網の縦続接続時のインピーダンス整合．

ると，接続部分において電力の反射が起こるために効率よく信号が伝達できなくなり，最悪の場合は，信号情報を有する電力が全く最終段に到達しない，ということもあり得るのである．このような問題が発生しないような接続をするために考案されたのが，本章で学習する**反復パラメータ**である．

12.3　インピーダンス整合

図 12.4 (a) に示すように電源と負荷が接続された回路では，インピーダンス整合が成り立つための条件は，電源の内部インピーダンスと負荷のインピーダンスが同図のように複素共役の関係にあることである．即ち，**図 12.4** (a) のように，電源の内部インピーダンスが $\boldsymbol{Z}$ であり，負荷のインピーダンスが $\boldsymbol{Z}^*$ であれば整合する．

次に，**図 12.4** (b) のように二端子対網が電源と負荷の間に挿入されたとしよう．ここで，この二端子対網は，入力インピーダンスが電源側の入力インピーダンスの複素共役となっており，出力インピーダンスは電源の入力インピーダンスと同じになっているものとする．このような条件が満たされれば，入力端子において電力の反射は生じない．また，出力端子側から二端子回路網を見込んだときも反射は生じない．従って，全体を通して電力の反射が生じないことになる．同様の理由により，**図 12.4** (c) のように，更に二端子対網が接続されても同様となる．この場合には，二端子対網どうしの接続部分での反射が懸念されるが，接続部から左側を見たインピーダンスと右側を見たインピーダンスがお互いに複素共役になっていることから，この接続部でも反射は起こら

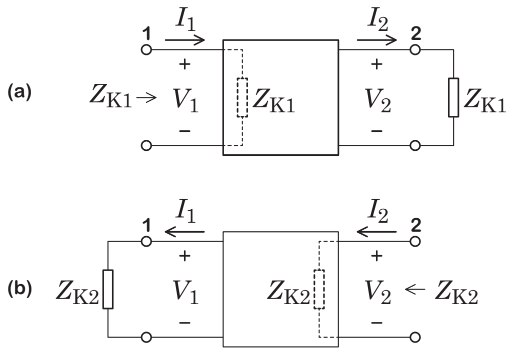


図 12.5 反復インピーダンスの定義のための図.

ない.

以下では，二端子対網がこのような素性を持つために必要な条件について述べる.

12.4 反復パラメータ

ここでは，二端子対網をどれだけ縦続接続しても，二端子対網の片方から見込んだインピーダンスが変わらない**反復インピーダンス**というものがあることを示す．なお，以下の三つのパラメータのセットを**反復パラメータ**という.

- 入力側 (一次側) から見た反復インピーダンス
- 出力側 (二次側) から見た反復インピーダンス
- 伝送量

12.4.1 反復インピーダンスの定義

図 12.5 (a) に示すように，二端子対網を間に入れても，負荷側を見たインピーダンスが変わらないようなインピーダンスを反復インピーダンスという．二端子対網の縦続パラメータとの間には，以下のような関係がある.

$$Z_{K1} = \frac{1}{2C}\left[(A-D) \pm \sqrt{(A-D)^2+4BC}\right] \qquad (12.7)$$

これに対し，**図 12.5** (b) に示すように，負荷側からみたインピーダンスが上記の定義と同様になる場合も，反復インピーダンスという．この場合の二端子対網の縦続パラメータと反復インピーダンスとの間の関係は，次式のようになる.

$$Z_{K2} = \frac{1}{2C}\left[(D-A) \pm \sqrt{(D-A)^2+4BC}\right] \qquad (12.8)$$

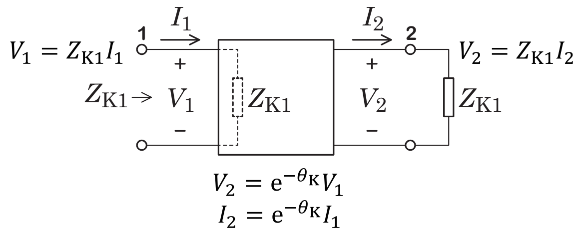


図 12.6 反復伝送量の定義のための図.

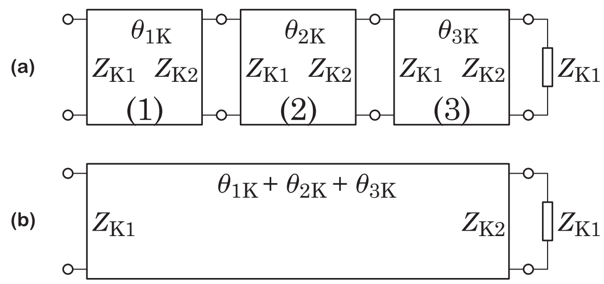


図 12.7 二端子対網の縦続接続時の反復パラメータ.

入力側から見たときとの違いは，D と A が入れ替わっている点である.

12.4.2 反復伝送量の定義

図 12.6 に示すように，反復インピーダンスが定義された二端子対網に対しても伝送量が定義され，それを**反復伝送量**という．二端子対網の縦続パラメータとの間には，以下のような関係がある.

$$\mathrm{e}^{\theta_K} = \frac{A+D}{2} + \sqrt{\frac{(A+D)^2}{4} - 1}, \qquad (12.9)$$

$$\cosh\theta_K = \frac{A+D}{2}. \qquad (12.10)$$

12.4.3 反復パラメータの定義

上記で定義した Z_{K1}，Z_{K2}，θ_K を反復パラメータという．ある二端子対網 i の反復パラメータが Z_{K1}，Z_{K2}，θ_{iK} であるとき，これを多段縦続接続した場合の全体の反復パラメータは，入出力インピーダンスは変わらず，伝送量が「和」になるだけとなる．即ち，**図 12.7** に示すように，全体の反復パラメータが以下のようになる.

- 入力インピーダンス

$$Z_{K1} \qquad (12.11)$$

- 出力インピーダンス

$$Z_{\mathrm{K2}} \tag{12.12}$$

- 伝送量

$$\sum_i \theta_{i\mathrm{K}} \tag{12.13}$$

ここで，

$$Z_{\mathrm{K1}} = Z^*, \tag{12.14}$$
$$Z_{\mathrm{K2}} = Z \tag{12.15}$$

が満たされていれば，**図 12.4** に示したように，どれだけ二端子対網を縦続接続しても，電力が反射しない状況を作ることができるのである．

課題

反復インピーダンスと K 行列の要素の関係を導出せよ

略解

図 12.8 に示すような回路において，電圧と電流の関係は，以下のような関係になっている．

$$V_1 = AV_2 + BI_2, \tag{12.16}$$
$$V_2 = CV_2 + DI_2, \tag{12.17}$$
$$Z_{\mathrm{K1}} = \frac{V_2}{I_2}. \tag{12.18}$$

まず，入力インピーダンスが反復インピーダンスとなるために必要な条件を導出しよう．そのためには，A，B，C，D が

$$\frac{V_1}{I_1} = Z_{\mathrm{K1}} \tag{12.19}$$

を満たせばよい．

式 (12.16)，式 (12.17) より，次式が得られる．

$$\frac{V_1}{I_2} = A\frac{V_2}{I_2} + B, \tag{12.20}$$
$$\frac{I_1}{I_2} = C\frac{V_2}{I_2} + D. \tag{12.21}$$

これに，式 (12.18) の $Z_{\mathrm{K1}} = V_2/I_2$ を適用すると，

$$\frac{V_1}{I_2} = AZ_{\mathrm{K1}} + B, \tag{12.22}$$
$$\frac{I_1}{I_2} = CZ_{\mathrm{K1}} + D. \tag{12.23}$$

となる．上式から I_2 を消去すれば，A，B，C，D が満たすべき条件が得られ，次式のようになる．

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{AZ_{\mathrm{K1}} + B}{CZ_{\mathrm{K1}} + D} = Z_{\mathrm{K1}} \tag{12.24}$$

この式を Z_{K1} について解けば，次式が得られる．

$$Z_{\mathrm{K1}} = \frac{1}{2C}\left[(A-D) \pm \sqrt{(A-D)^2 + 4BC}\right] \tag{12.25}$$

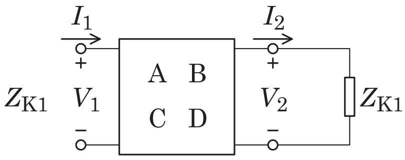


図 12.8 二端子対網の縦続行列 (K 行列) と反復インピーダンスの関係を導出するために用いる図．

相反定理を満足する回路の場合には，

$$AD - BC = 1 \tag{12.26}$$

より，

$$Z_{\mathrm{K1}} = \frac{1}{2C}\left[(A-D) \pm \sqrt{(A+D)^2 - 4}\right] \tag{12.27}$$

なお，複合 (±) は，実部が負にならない方を選ぶ．

次に，出力インピーダンスが反復パラメータとなる条件を導出しよう．入力側からみた場合に，

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{12.28}$$

である場合，出力側からみると，K 行列の章で確認したように，次式のようになる．

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}. \tag{12.29}$$

従って，出力側からみた反復インピーダンスの条件は，入力側からみた場合に得られた条件式の A と D を入れ替えたものになる．即ち，以下の通りである．

$$Z_{\mathrm{K1}} = \frac{1}{2C}\left[(D-A) \pm \sqrt{(D-A)^2 + 4BC}\right]. \tag{12.30}$$

この場合も，相反定理を満足する回路の場合には，

$$AD - BC = 1 \tag{12.31}$$

より，

$$Z_{\mathrm{K1}} = \frac{1}{2C}\left[(D-A) \pm \sqrt{(D+A)^2 - 4}\right] \tag{12.32}$$

となる．

課題

縦続行列パラメータと反復伝送量の関係を導出せよ

略解

縦続行列 (K 行列) パラメータの基本式より，

$$V_1 = AV_2 + BI_2, \tag{12.33}$$
$$I_1 = CV_2 + DI_2. \tag{12.34}$$

である．伝送量 θ_K は，

$$I_2 \mathrm{e}^{-\theta_{\mathrm{K}}} I_1, \tag{12.35}$$
$$V_2 \,\mathrm{e}^{-\theta_{\mathrm{K}}} V_1 \tag{12.36}$$

で定義される．また，相反定理が成り立つ回路であれば，

$$AD - BC = 1 \tag{12.37}$$

が成り立つ．以上の式を組み合わせることにより，導出される．

式 (12.34) と式 (12.35) から I_1 を消去すると，

$$I_2 = \frac{C}{e^{\theta_K} - D} V_2 \tag{12.38}$$

となる．これを式 (12.33) に代入すると，

$$V_1 = AV_2 + \frac{BC}{e^{\theta_K} - D} V_2 \tag{12.39}$$

となる．これに，相反定理の式 (12.37) を適用すれば，

$$V_1 = AV_2 + \frac{AD - 1}{e^{\theta_K} - D} V_2 \tag{12.40}$$

となる．この V_1 を式 (12.36) に代入すれば，

$$e^{\theta_K} = \frac{V_1}{V_2} = A + \frac{AD - 1}{e^{\theta_K} - D} \tag{12.41}$$

となる．これを式変形すると，

$$\frac{e^{\theta_K} + e^{-\theta_K}}{2} = \frac{A + D}{2}, \tag{12.42}$$

$$\cosh\theta_K = \frac{A + D}{2} \tag{12.43}$$

となり，導出された．

また，式 (12.42) において，

$$x = e^{\theta_K} \tag{12.44}$$

とおけば，

$$x^2 - (A + D)x + 1 = 0 \tag{12.45}$$

なる二次方程式となるので，これを解けば，

$$x = e^{\theta_K} = \frac{A + D}{2} + \sqrt{\left(\frac{A + D}{2}\right)^2 - 1} \tag{12.46}$$

となる．

豆知識

豆知識

実用単位系の伝送量の単位：デシベル (dB)

本章で紹介した伝送量のように物理量の対数をとるとき，数学的に対数をとる場合には，底が e の自然対数の方が都合がよいが，実用的には 10 を底にした方が比率の桁がわかりやすい．そのため，実用単位系では，次式のように，10 を底にした対数がとられる．

$$\log_{10}\frac{B}{A} \tag{12.47}$$

このようにして計算した量の実用単位として「ベル (B)」という単位が用いられている．また，よく使う比率が扱い易い数値になるように，これを更に 10 倍したものが利用されている．

$$10\log_{10}\frac{B}{A} \tag{12.48}$$

この量の単位として「デシベル (dB)」が用いられている．

電気系の入出力の比率をこうした対数表示する場合には，電力と電圧・電流で取り扱いが異なっており，以下のようになっている．

- 電力の場合

$$10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} \tag{12.49}$$

- 電圧・電流の場合

$$10\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = 20\log_{10}\frac{V_2}{V_1}, \tag{12.50}$$

$$10\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 = 20\log_{10}\frac{I_2}{I_1}. \tag{12.51}$$

即ち，電力の場合は，$10\log_{10}$ をとり，電圧・電流の場合には，$20\log_{10}$ をとる．これは，以下のように，電力が電圧や電流の二乗に比例しているためである．

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} \tag{12.52}$$

豆知識

デシベル (dB) とネーパー (Np)

入出力の比率の対数をとるときに，底が 10 なのか，e なのか，によって，以下のように，異なる単位を用い，どちらの底で対数をとったものなのかを明示している．

- 底が 10 ⇒ 単位は「デシベル (dB)」

$$20\log_{10}\frac{V_2}{V_1}$$
$$20\log_{10}\frac{I_2}{I_1}$$
$$10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} \tag{12.53}$$

- 底が e ⇒ 単位は「ネーパー (Np)」

$$\ln\frac{V_2}{V_1} \tag{12.54}$$

$$\ln\frac{I_2}{I_1} \tag{12.55}$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{P_2}{P_1} \tag{12.56}$$

豆知識

Weber-Fechner の法則

デシベルの話が出てくるときによく引き合いに出されるのが「人間の感覚は対数的である」という Weber-Fechner の法則である．これは，人間の感覚で「増えた」ということを実感できるのは，$1,2,3,\cdots$ とリニアに増えるよりも，$1,2,4,8,\cdots$ もしくは $1,10,100,1000,\cdots$ という風に倍々もしくは桁で増えるときである，という法則である．これを言いだした人が，Ernst Heinrich Weber (1975-1878)[*1]と Gustav Theodor Fechner (1801-1887)[*2]であったので，Weber-Fechner の法則と呼ばれている．

従って，人間の感覚に対応するような物理量は dB などの単位で表されることが多い．身近な物理量で，dB が単位になっている例としては音量や光量などが挙げられる．なお，照明関係の光量については，リニアスケールの単位が用いられている場合が多いが，光ファイバによる光の伝送の際の光強度の減衰量については，dB が用いられている．

豆知識

なぜ自然対数は ln なの？

もしかするといるかもしれない，というよりも，過去

[*1] A German physician who is considered as a founder of experimental psychology.

[*2] A German experimental psychologyst.

に実際にいた「ln って何？」という大学性のために少し述べる．答えは自然対数関数であるのはすぐにわかる．

しかし，自然対数を英語にすれば，natural logarithm であるから，それを省略すれば，「nl」のはずである．なぜ反対になっているのであろうか？これは，ラテン語がもとになっているからである．ラテン語では，形容する単語が後ろに来るので，自然対数をラテン語で表すと，logarithmus naturalis となる．これが「ln」となっている所以である．

豆知識

双曲線関数

この章では，双曲線関数が出てくるので公式を確認しておこう．

$$\sinh\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}, \tag{12.57}$$

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}. \tag{12.58}$$

なお，参考までに三角関数については，以下の関係がある．

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j2}, \tag{12.59}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}. \tag{12.60}$$

豆知識

動作減衰量

電気回路では，$10\log_{10}$ をとった量で定義されている**動作減衰量**なるパラメータがある．これは，回路に負荷を接続したときに，もともとの電源が供給可能な最大電力 (固有電力) に対して，どれくらいの比率の電力が出力側に伝達されているか，を表す量である．式で書くと，次式のようになる．

$$10\log_{10}\left(\frac{P_{\max}}{P}\right) \quad \text{(dB)} \tag{12.61}$$

ここで，$P_{\max}$ は電源の固有電力，P はある負荷を想定したときに，実際に負荷に伝達 (供給) される電力である．

豆知識

入力・出力・伝達インピーダンス

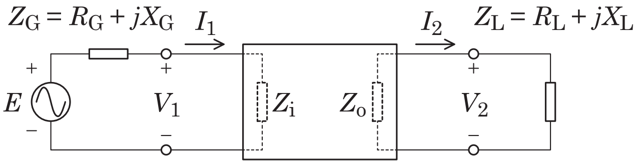


図 12.9 二端子対網の入力インピーダンス，出力インピーダンス，伝達インピーダンスの定義のための図．

ここでは，これまでに既に学んだ入力・出力インピーダンスに加えて，伝達インピーダンスなるものを定義する．なお，二次側の電流の向きの設定が，用いている教科書の向きとは逆であることに留意して欲しい．これは，K 行列を用いるからである．

図 12.9 に示したような二端子対網について，入力インピーダンス，出力インピーダンスは既に定義した通りである．これらとともに伝達インピーダンスを定義すると，以下のようになる．

- **入力インピーダンス**
  入力側から二端子対網をみたときのインピーダンス
$$Z_i = \frac{V_1}{I_1} \tag{12.62}$$
- **出力インピーダンス**
  負荷側 (出力側) から二端子対網をみたときのインピーダンス
$$Z_o = \frac{V_1}{I_1} \tag{12.63}$$
- **伝達インピーダンス**
  入力の電流に対する出力電圧の比
$$Z_T = \frac{V_2}{I_1} \tag{12.64}$$

豆知識

影像パラメータ

ここでは，二端子対網の入力側，出力側にインピーダンスを接続したときに，二端子対網自身の入力インピーダンス，出力インピーダンスが接続されたインピーダンスと鏡のように同じになるようなインピーダンスを紹介する．これを**影像インピーダンス**という．かつて，フィルタを設計・構成するための手段であったが，現在は他の手段によってフィルタが設計されており，影像パラ

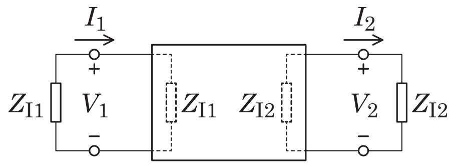


図 12.10 影像インピーダンスの定義のための図.

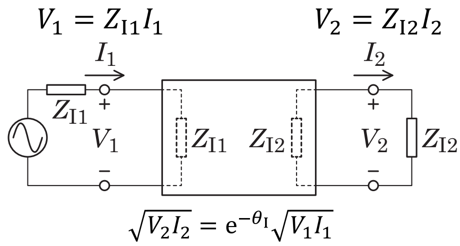


図 12.11 影像伝送量の定義のための図.

メータは不要となっていることから，いずれはシラバスから削除する予定である．なお，以下の三つのパラメータのセットを**影像パラメータ**という．

- 入力側 (一次側) から見た影像インピーダンス
- 出力側 (二次側) から見た影像インピーダンス
- 伝送量

図 12.10 に示すように，ある二端子対網について，入力端子の左右のインピーダンスが等しく，出力端子の左右のインピーダンスも等しくなるようなインピーダンスのペアを影像インピーダンスという．二端子対網の縦続パラメータとの間には，以下のような関係がある．

$$Z_{\mathrm{I1}} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}, \tag{12.65}$$

$$Z_{\mathrm{I2}} = \sqrt{\frac{BD}{AC}}. \tag{12.66}$$

図 12.11 に示すように，影像インピーダンスが接続された二端子対網の伝送量を影像伝送量という．影像伝送量を θ_{I} とすると，以下のようになる．

$$\sqrt{V_2 I_2} = \mathrm{e}^{-\theta_{\mathrm{I}}}\sqrt{V_1 I_1}. \tag{12.67}$$

二端子対網の縦続パラメータとの間には，以下の関係がある．

$$\mathrm{e}^{\theta_{\mathrm{I}}} = \sqrt{AD} + \sqrt{BC}, \tag{12.68}$$

$$\coth\theta_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{AD}{BC}}. \tag{12.69}$$

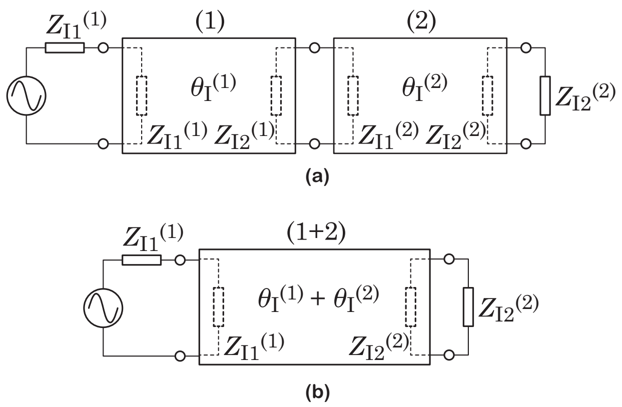


図 12.12 二端子対網の縦続接続時の影像パラメータ.

上記で定義した $Z_{\mathrm{I1}}, Z_{\mathrm{I2}}, \theta_{\mathrm{I}}$ を影像パラメータという．ある二つの二端子対網を縦続接続したとき，$Z_{\mathrm{I2}}^{(1)} = Z_{\mathrm{I1}}^{(2)}$ であれば，これらを縦続接続した場合の全体の反復パラメータは，伝送量が「和」になるだけとなる．即ち，**図 12.12** に示すように，全体の影像パラメータが以下のようになる．

$$Z_{\mathrm{I1}}^{(1)},\ Z_{\mathrm{I2}}^{(2)},\ \theta_{\mathrm{I}}^{(1)} + \theta_{\mathrm{I}}^{(2)}$$

課題

式 (12.65) と式 (12.66) を導出せよ

略解

縦続行列 (K 行列) の基本関係式：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{12.70}$$

より，次式が得られる．

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{I1}} &= \frac{V_1}{I_1} \\ &= \frac{AV_2 + BI_2}{CV_2 + DI_2} \\ &= \frac{A(V_2/I_2) + B}{C(V_2/I_2) + D} \\ &= \frac{AZ_{\mathrm{I2}} + B}{CZ_{\mathrm{I2}} + D}. \end{aligned} \tag{12.71}$$

入出力を入れ替えると，

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \tag{12.72}$$

となるから，

$$Z_{\mathrm{I2}} = \frac{DZ_{\mathrm{I1}} + B}{CZ_{\mathrm{I1}} + A}. \tag{12.73}$$

となる．これらより，以下の二つの式を得る．

$$CZ_{\mathrm{I1}}Z_{\mathrm{I2}} + DZ_{\mathrm{I1}} - AZ_{\mathrm{I2}} - B = 0, \tag{12.74}$$
$$CZ_{\mathrm{I1}}Z_{\mathrm{I2}} - DZ_{\mathrm{I1}} + AZ_{\mathrm{I2}} - B = 0. \tag{12.75}$$
$$\tag{12.76}$$

これらの式の和と差より，次の関係式を得る．

$$Z_{\mathrm{I1}}Z_{\mathrm{I2}} = \frac{B}{C}, \tag{12.77}$$
$$\frac{Z_{\mathrm{I1}}}{Z_{\mathrm{I2}}} = \frac{A}{D}. \tag{12.78}$$

よって，以下のように影像インピーダンスを A，B，C，D により表すことができる．

$$Z_{\mathrm{I1}} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}, \tag{12.79}$$
$$Z_{\mathrm{I2}} = \sqrt{\frac{DB}{CA}}. \tag{12.80}$$

一方，伝達量のうち，電圧の伝達量については，

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{V_2} &= A + \frac{BI_2}{V_2} \\ &= A + \frac{B}{Z_{\mathrm{I2}}} \\ &= A + \frac{B}{\sqrt{\frac{DB}{CA}}} \\ &= \sqrt{\frac{A}{D}}\left(\sqrt{AD} + \sqrt{BD}\right)\end{aligned} \tag{12.81}$$

となり，電流の伝達量については，

$$\begin{aligned}\frac{I_1}{I_2} &= \frac{CV_2}{I_2} + D \\ &= CZ_{\mathrm{I2}} + D \\ &= C\sqrt{\frac{DB}{CA}} + D \\ &= \sqrt{\frac{D}{A}}\left(\sqrt{AD} + \sqrt{BD}\right)\end{aligned} \tag{12.82}$$

となる．ここで，

$$\sqrt{V_2I_2} = \mathrm{e}^{\theta_{\mathrm{I}}}\sqrt{V_1I_1} \tag{12.83}$$

より，

$$\mathrm{e}^{\theta_{\mathrm{I}}} = \sqrt{\frac{V_2I_2}{V_1I_1}} \tag{12.84}$$

である．これに，先ほどの V_1/V_2 と I_1/I_2 を代入すれば，

$$\mathrm{e}^{\theta_{\mathrm{I}}} = \sqrt{AD} + \sqrt{BD} \tag{12.85}$$

が得られる．

第 13 章

過渡現象の基礎

これまでの章では，電気回路の交流電源を ON してから十分に時間が経過した後の定常状態について学んだ．ここでは，電気回路の電源を ON してから定常状態に至るまでの過渡状態について学ぶ．過渡現象は直流・交流の如何に関わらず存在するが，本章では，簡単化のために直流に限定し，最も簡単な RL 直列回路と RC 直列回路の過渡応答について学習する．[*1]

13.1　回路素子の特性の復習

過渡現象を扱う場合には，定常的な正弦波交流の電圧と電流だけを対象として導入したフェーザの概念を使うことはできない．従って，抵抗，コイル，コンデンサの特性は，以下のような一般形で扱う．

- 抵抗 R

$$v(t) = R\,i(t) \tag{13.1}$$

- コイル L

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) \tag{13.2}$$

- コンデンサ C

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t \tag{13.3}$$

[*1] 「第 12 章 二端子対網の伝送的性質」については，電子・物理工学科の学問体系との関わりが薄い話題であると考えられる．従って，第 12 章の代わりに本章を学習対象とする．過渡現象については，選択科目の電気回路学 II で学習する項目となっているが，電子・物理工学科で他の学問を学習する場合に，電気回路学 II を選択しなかったとしても，最低限これくらいは学習しておく必要があると思われるからである．なお，より詳しい過渡現象については，電気回路学 II において学習して欲しい．

13.2　RL 直列回路

本節では，**図 13.1** の RL 直列回路において，時刻 $t = 0$ でスイッチ S を閉じたときに回路に流れる電流 $i(t) = i_{\mathrm{R}}(t) = i_{\mathrm{L}}(t)$，抵抗 R にかかる電圧 $v_{\mathrm{R}}(t)$，コイル L にかかる電圧 $v_{\mathrm{L}}(t)$ を求める．なお，$t = 0$ におけるコイルの電流はゼロとする．

抵抗 R とコイル L に関しては，次式が成り立つ．

$$v_{\mathrm{R}}(t) = R\,i(t), \tag{13.4}$$

$$v_{\mathrm{L}}(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t). \tag{13.5}$$

キルヒホッフの電圧と電流の法則から，

$$v_{\mathrm{R}}(t) + v_{\mathrm{L}}(t) = E, \tag{13.6}$$

$$i_{\mathrm{R}}(t) = i_{\mathrm{L}}(t) = i(t). \tag{13.7}$$

となる．従って，次式が得られる．

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) + R\,i(t) = E. \tag{13.8}$$

この微分方程式を解いて $i(t)$ を求めると，

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \tag{13.9}$$

となる．ここで，$\tau = \dfrac{L}{R}$ である．

従って，抵抗 R とコイル L にかかる電圧は，それぞれ以下のようになる．

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{R}}(t) &= R\,i(t) \\ &= E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right), \end{aligned} \tag{13.10}$$

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{L}}(t) &= L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) \\ &= E\mathrm{e}^{-t/\tau}. \end{aligned} \tag{13.11}$$

電流と電圧の挙動を図示すると，**図 13.2** のようになる．時定数 τ は, コイルに流れる電流が最大値の $(1-\mathrm{e}^{-1})$ $(= 0.63 = 63\%)$ に到達する時間である．

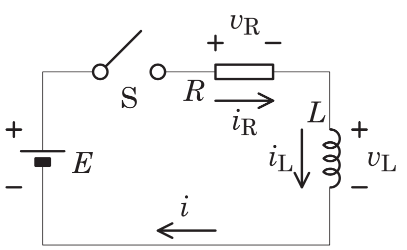


図 13.1 RL 直列回路の過渡現象を考えるための回路．

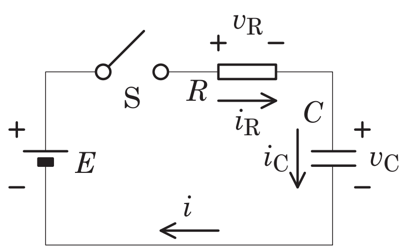


図 13.3 RC 直列回路の過渡現象を考えるための回路．

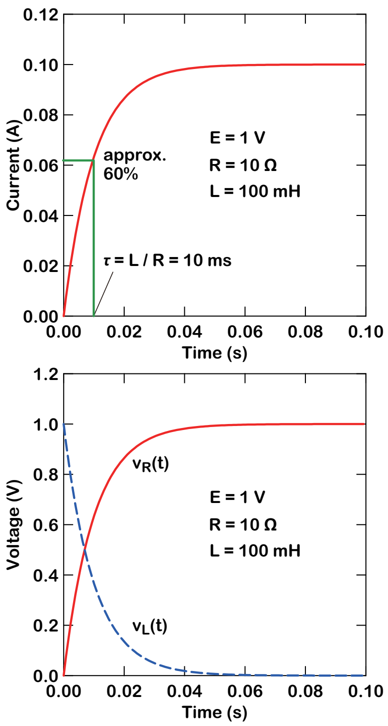


図 13.2 RL 直列回路の過渡応答．

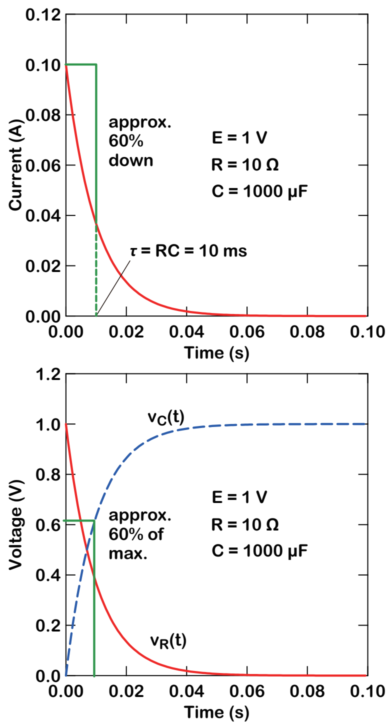


図 13.4 RC 直列回路の過渡応答．

以上の結果から，以下のことがわかる．

RL 直列回路に電圧を印加しても，コイルにはすぐに電流が流れない．

時定数 $\tau = \dfrac{L}{R}$ は，このときの遅延時間の指標となる．

13.3　RC 直列回路

本節では，**図 13.3** の RC 直列回路において，時刻 $t = 0$ でスイッチ S を閉じたときの電流 $i(t)$，抵抗 R にかかる電圧 $v_R(t)$，コンデンサ C にかかる電圧 $v_C(t)$ を求める．なお，$t = 0$ でコンデンサに蓄積されている電荷はゼロとする．

抵抗 R とコンデンサ C に関しては，次式が成り立つ．

$$v_R(t) = R\,i(t), \tag{13.12}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t. \tag{13.13}$$

キルヒホッフの電圧と電流の法則から，

$$v_R(t) + v_C(t) = E, \tag{13.14}$$

$$i_R(t) = i_C(t) = i(t). \tag{13.15}$$

となる．従って，次式が得られる．

$$\frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t + R\,i(t) = E. \tag{13.16}$$

この積分方程式を解くと，

$$i(t) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{13.17}$$

となる．ここで，$\tau = RC$ である．

従って，抵抗 R とコンデンサ C にかかる電圧は，それぞれ以下のようになる．

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{R}}(t) &= R\,i(t) \\ &= E\mathrm{e}^{-t/\tau}, \end{aligned} \tag{13.18}$$

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{C}}(t) &= \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t \\ &= E\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right). \end{aligned} \tag{13.19}$$

電流と電圧の挙動を図示すると，**図 13.4** のようになる．時定数 τ は，コンデンサの電圧 $v_{\mathrm{C}}(t)$ が最大値の $(1-\mathrm{e}^{-1})$ $(=0.63 = 63\%)$ に到達する時間である．

以上の結果から，以下のことがわかる．

> **RC 直列回路に電圧を印加しても，コンデンサにはすぐに電圧がかからない．**

時定数 $\tau = RC$ は，このときの遅延時間の指標となる．

13.4 RLC の見方

電気回路の過渡応答は，本章で学習したように，微分方程式を解けばわかる．数値的な予測を必要とする場合には，本章のような取り組みが大切である．しかし，電気回路学を学習したのであれば，ある程度簡単な回路ならば，ぱっと見ただけでその応答の概略を予測できる方が望ましい．そのためには，以下の状況における R，L，C の応答を理解しておくとよい．

- スイッチを入れたり・切ったりした瞬間
  電圧や電流の時間変化が極めて大きいときである．交流回路として考えた場合には，極めて周波数が高い状況に対応する．
- スイッチを入れてから十分な時間が経過した後
  これは直流の定常状態のことである．

以下では，上記のような状況にあるときに，電気回路屋が抵抗 R，コイル L，コンデンサ C をどのように見るのか，について述べる．

• 抵抗 R

理想的な抵抗は，オームの法則からわかるように，電圧や電流の時間変化の程度とは関係がない式で表される．従って，抵抗 R は，如何なる状況であっても抵抗 R として扱う．

• コイル L

コイルの電流電圧特性は，もともとは，電流の変化に対する逆起電力が起源となっている．従って，スイッチを入れた瞬間や，スイッチを切った瞬間という極めて大きな変化を伴うときには，大きな電圧が L にかかることになる．究極の場合を考えると，その電圧によって L には電流が流れなくなるため，開放 (open) と同じと想定するのである．

一方，十分に時間が経過した後は，時間変化の無い直流状態であるから，コイルは単なる導線となる．即ち，短絡 (short) として扱うことになる．

• コンデンサ C

コンデンサは，二つの電極が向かい合ったものである．これに電流が流れ込むと，蓄積された電荷の量に比例した電圧が発生する．抵抗が直列に接続されている場合には，本章で学習したように，C の電圧が印加電圧と同じになるまでに時間を要する．これは有限の速度で電荷が蓄積されるからである．一方，抵抗が無い C だけを考えた場合には，所要時間ゼロでその電圧になる．これは，無限の速度で電荷が蓄積されることを意味する．見方を変えると，電荷がコンデンサに向かって (あるいは，コンデンサの方へ), 無限の速度で移動することを意味する．これは，抵抗ゼロであることに相当する．従って，スイッチを入れた瞬間や，切った瞬間のコンデンサは，短絡 (short) と同じであると想定するのである．

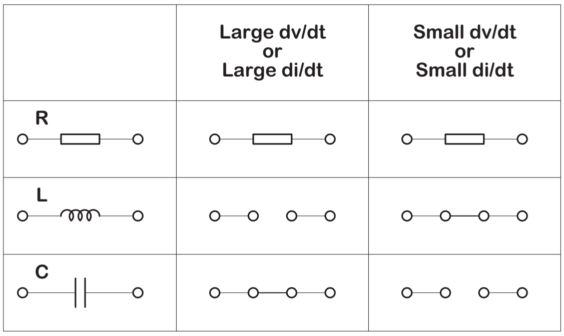
一方，十分に時間が経過した後は，時間変化の無い直流状態であるから，コンデンサは単なる離れた電極となる．即ち，開放 (open) として扱うことになる．

以上の特性をまとめると，**表 13.4** のようになる．

• インピーダンスの式による理解

コイルやコンデンサに対する上述のような見方は，本講義で学習したインピーダンスを表す式からでも理解することができる．

表 13.1 急激な変化を伴うときと，直流定常状態における回路素子の振る舞い．



- **コイル**

周波数を ω，コイルのインダクタンスを L とすると，そのインピーダンス Z_L は，

$$Z_\mathrm{L} = \mathrm{j}\omega L \tag{13.20}$$

であった．この表式から，

- **変化が激しい場合**（ω が大きい高周波に対応）：インピーダンス $Z_\mathrm{L} = \mathrm{j}\omega L$ が大きくなる．極端な場合として，$\omega \to \infty$ とすれば，

$$Z_\mathrm{L} \to \infty \tag{13.21}$$

となる．即ち，ω が十分に大きい高周波の場合には，コイルを**開放 (open)** と見なしてよい，ということになる．

- **変化が緩やかな場合**（ω が小さい低周波に対応）：インピーダンス $Z_\mathrm{L} = \mathrm{j}\omega L$ が小さくなる．極端な場合として，$\omega \to 0$ とすれば，

$$Z_\mathrm{L} \to 0 \tag{13.22}$$

となる．即ち，十分に小さい ω の低周波の場合には，コイルを**短絡 (short)** と見なしてよい，ということになる．

- **コンデンサ**

周波数を ω，コンデンサのキャパシタンスを C とすると，そのインピーダンス Z_C は，

$$Z_\mathrm{C} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \tag{13.23}$$

であった．この表式から，

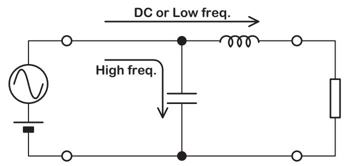


図 13.5 コイルとコンデンサによるローパスフィルタ．

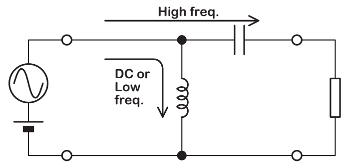


図 13.6 コイルとコンデンサによるハイパスフィルタ．

- **変化が激しい場合**（ω が大きい高周波に対応）：インピーダンス $Z_\mathrm{C} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$ が小さくなる．極端な場合として，$\omega \to \infty$ とすれば，

$$Z_\mathrm{C} \to 0 \tag{13.24}$$

となる．即ち，ω が十分に大きい高周波の場合には，コンデンサを**短絡 (short)** と見なしてよい，ということになる．

- **変化が緩やかな場合**（ω が小さい低周波に対応）：インピーダンス $Z_\mathrm{C} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$ が大きくなる．極端な場合として，$\omega \to 0$ とすれば，

$$Z_\mathrm{C} \to \infty \tag{13.25}$$

となる．即ち，十分に小さい ω の低周波の場合には，コンデンサを**開放 (open)** と見なしてよい，ということになる．

- **ローパス・ハイパス**

周波数の異なる信号に対してコイルとコンデンサが上述のような特徴を示すことを利用すると，複数の周波数成分を有する信号から，低周波だけを通過させる回路や，高周波だけを通過させる回路ができる．[*2] もっともシンプルな例は，**図 13.4** 及び**図 13.4** に示した回路である．

[*2] 見方によっては，共振回路の性質を利用した回路とみることもできる．

豆知識

豆知識

交直混在回路におけるコイルとコンデンサの役割

本章では，**表 13.4** に示したように，周波数領域によって，コイルやコンデンサを開放や短絡に置き換えることができることを学習した．直流と交流が混在する回路では，コイルとコンデンサのこうした特徴が利用されており，以下に示すように，利用目的に応じて特別な名称が付けられている．

- **チョークコイル**
  ある端子の信号を別の端子に伝達するとき，交流成分をカットして，直流成分だけを伝達したい場合に，端子間の接続素子として使う．[*3]
- **カップリングコンデンサ**
  ある端子の信号を別の端子に伝達するとき，直流成分をカットして，交流成分だけを伝達したい場合に，端子間の接続素子として使う．
- **バイパスコンデンサ**
  抵抗に流れる電流のうち，交流成分だけは抵抗をバイパスするようにして流れて欲しい場合に，抵抗と並列に接続して使う．
- **平滑化コンデンサ**
  ある二端子間の交流電圧の脈動を抑制するために，そのに端子間をまたぐように接続して使う．[*4]

より実践的な理解のためには，これらがどのような状況で必要になるのかを知っておいた方がよいと思われるので，以下に幾つかの典型的な事例を示した．

• 半波整流回路（平滑化コンデンサとチョークコイル）

コンセントから直接給電出来るのは，正弦波交流であるが，電気・電子デバイスの多くは直流で駆動される．そのため，交流を直流に変換する回路が必要となる．**図 13.7** は，そのような回路の一例であり，C_1 が平滑化コンデンサである．**図 13.8** は，**図 13.7** における平滑化コンデンサ C_1 の有無が，負荷抵抗 R_L の電圧 V_{RL} に与える影響を示したものである．

この回路では，まず，第 8 章で学んだ変圧器によって，実効値 100 V の正弦波電圧（コンセントからの電圧）を必要な低電圧 (実効値 12 V とする) まで小さくする．次に，ダイオードの整流作用を利用して，**図 13.8**(b) に示すようにプラスの成分だけにする．正弦波に含まれるマイナス成分を捨てて，プラス成分だけをとることを**半波整流**という．なお，ダイオードにおける電圧降下が約 0.7 V あるため，半波整流された波形の振幅は，**図 13.8**(a) に示した整流前の波形の振幅よりも約 0.7 V 程

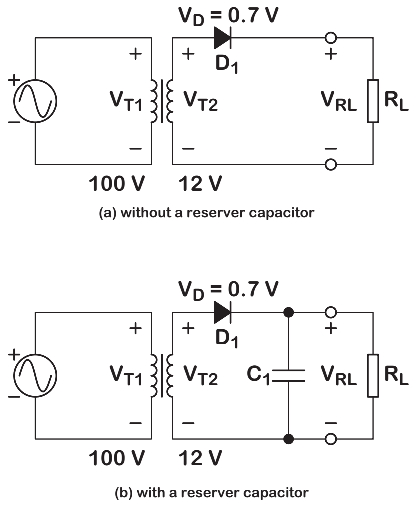


図 13.7 半波整流回路．(a) 平滑化コンデンサ無し．(b) 平滑化コンデンサ有り．

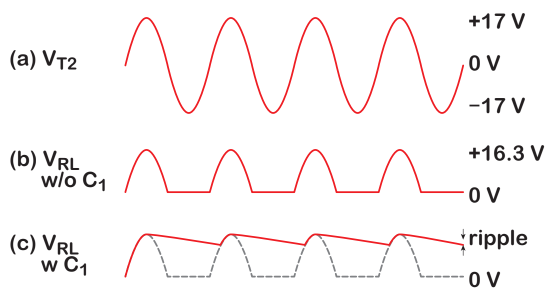


図 13.8 平滑化コンデンサの有無による半波整流回路の各部の電圧波形の違い．

[*3] choke は「詰まらす」などの意味の動詞，もしくは，「詰まらすもの」という意味の名詞．英語では，a choke coil, a choking coil, もしくは a choke という．

[*4] この用途では，コンデンサが周波数によって「短絡」や「開放」になるという性質が利用されている，というよりも，蓄積された電荷によって電圧を維持できるという性質が利用されている，と見た方が理解しやすい．

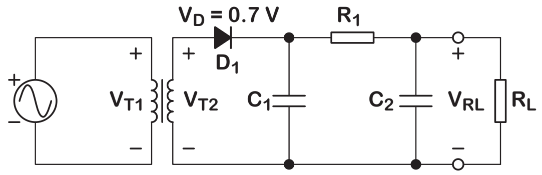


図 13.9 RC 平滑化フィルタ付半波整流回路.

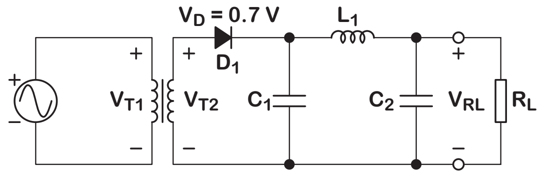


図 13.10 LC 平滑化フィルタ付半波整流回路.

度小さくなる.*5

半波整流によって得られた**図 13.8**(b) の波形は，まだ脈動しており，直流とはいえない波形である．このような脈動電圧を平滑化して直流電圧に近づけるために，電荷蓄積によって電圧を維持することが可能なコンデンサを並列に接続する．こうした目的で接続されるコンデンサのことを**平滑化コンデンサ**と呼ぶ．**図 13.7**(b) に示すようにコンデンサを接続すると，負荷に印加される電圧の波形は，**図 13.8**(c) のようになる．負荷に印加される電圧の脈動は，コンデンサへの電荷蓄積によって抑制される．

しかし，その抑制は完璧ではなく，コンデンサから電荷が（負荷抵抗を通して）放出される時間帯では，電圧が時間とともに減少する.*6 この電圧の目減りを**リップル (ripple)** という．リップルによる電圧降下 ΔV は，近似的には次式で与えられる.*7

$$\Delta V = \frac{V_{\mathrm{m}}}{fC_1R_{\mathrm{L}}} \tag{13.26}$$

ここで，f は元の波形の周波数，V_{m} は元の波形の振幅である．**図 13.8**(b) では，$V_{\mathrm{m}} = 16.3$ V である．このとき，例えば，$f = 60$ Hz，$R_{\mathrm{L}} = 10$ kΩ，$C_1 = 4700$ μF とすると，$\Delta V = 5.8$ mV となる．上記の近似式はかなり粗い近似式であるため正確ではないが，コンデンサの挿入によってかなり脈動が抑制されることがわかる．

上記のリップルを更に抑制するためには，コンデンサの容量を大きくするか，負荷抵抗を大きくする必要がある．負荷抵抗を勝手に変えるわけにはいかないため，コンデンサの容量を大きくする方策がとられる．といっても，面積を必要とするコンデンサを大きくすれば，それだけ回路の中に占めるコンデンサの占有面積も増えるため，コンパクトにまとめるためには，別の方策をとる必要がある．その一例が，**図 13.9** に示した RC 平滑化フィルタ付半波整流回路である．R_1 と C_2 がローパスフィルタとしての役割を果たし，リップルを抑制する．見方を変えると，R_1 と C_2 は電圧分割回路のような役割を果たすため，リップルによる電圧降下を ΔV とすると，このフィルタを通した後の電圧降下 $\Delta V'$ は，

$$\Delta V' = \Delta V \frac{X_{\mathrm{C2}}}{\sqrt{R_1^2 + X_{\mathrm{C2}}^2}} \tag{13.27}$$

となる．ここで，

$$X_{\mathrm{C2}} = \frac{1}{\omega C_2} \tag{13.28}$$

である．先述の $\Delta V = 5.8$ mV のリップル電圧があったとき，$R_1 = 100$ Ω，$C_2 = 1000$ μF なる抵抗とコンデンサを接続すると，リップル電圧は $\Delta V' = 1.5$ mV まで抑制される．

上記の方法により，V_{RL} に重畳する脈動は抑制されるが，R_1 における電圧降下が直流成分に対しても発生するため，V_{RL} 全体の大きさが低下することになる．このような電圧の目減りを抑制しつつ，脈動も抑制する方法として，**図 13.10** に示したように，R_1 の代わりにコイルを用いる方法がある．この方式では，電流変動が大きいときにコイルが大きな抵抗として振る舞い，変動が小さいときにはコイルは単なる導線として振る舞う，という**チョークコイル**としての性質を用いている．従って，先ほどの抵抗を用いた場合のように，交流と直流の両方に対して電圧の目減りが起こるのではなく，交流（即ち，リップル）に対してだけ電圧の目減りが起こる．先ほどの例題で，$L_1 = 10$ H とし，R_1 の代わりに ωL_1 とすれば，LC 回路を用いた場合のリップルは，$\Delta V' = 4$ μV まで抑制される．しかも，直流成分の電圧の目減りは無い．

但し，いいことずくめではないことに留意されたし．

---

*5 ダイオードの種類によって電圧降下の大きさは異なる．0.7 V はシリコンダイオードの場合における電圧降下の典型値である．

*6 本章で学習したコンデンサと抵抗の直列接続の場合に近い状況である．

*7 この導出に関しては，後述の課題を参照されたし．

コイルがコイルとして機能するためには，電圧ではなく電流が必要である．これは，コイルの基本式

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) \tag{13.29}$$

からわかると思う．このとき，負荷抵抗 R_L が極めて大きく，ほとんど電流が流れない場合には，電流の大きさが小さいために，$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ の大きさも小さいものとなる．即ち，それなりの電流が流れてくれなければ，仮にチョークコイルを用いたとしても，あまり大きな効能は期待できないのである．

• 全波整流回路

上記の半波整流回路は，ダイオードを 1 個だけ用いた簡単な整流回路であるため，正弦波交流のマイナス分を捨てていた．**図 13.11** に示すように，ダイオードを 4 個用いると，捨てていたマイナスの成分も使うことができる．半波整流回路が正弦波の半分を使うのに対し，この場合には，正弦波を全部使うので，このような回路を全波整流回路という．[*8] このような全波整流回路は，交流を直流に変換するときに広く用いられている．この場合にも，先述のような LC フィルタを用いたリップル抑制措置をとることができ，一般によく用いられている．

• トランジスタ増幅回路（カップリングコンデンサとバイパスコンデンサ）

トランジスタは電子回路学での学習項目であるが，そこで使われるトランジスタ以外の回路素子は，電気回路学で学習した素子となる．ここでは，**カップリングコンデンサ**と**バイパスコンデンサ**を例にとって，電子回路において電気回路素子がどのように使われるのかを述べる．ここではトランジスタの動作に関する詳細には触れないので，電子回路学を学習する段階になって，抵抗やコンデンサの役割を再度復習するときに，改めてこの節を見直して頂くとよいと思う．

図 13.12 は，電子回路学にて学習することになるエミッタ接地トランジスタ増幅回路の一例であり，入力した微小信号 v_in を増幅して v_out として出力する回路である．[*9] トランジスタについて学習するとわかるのだが，

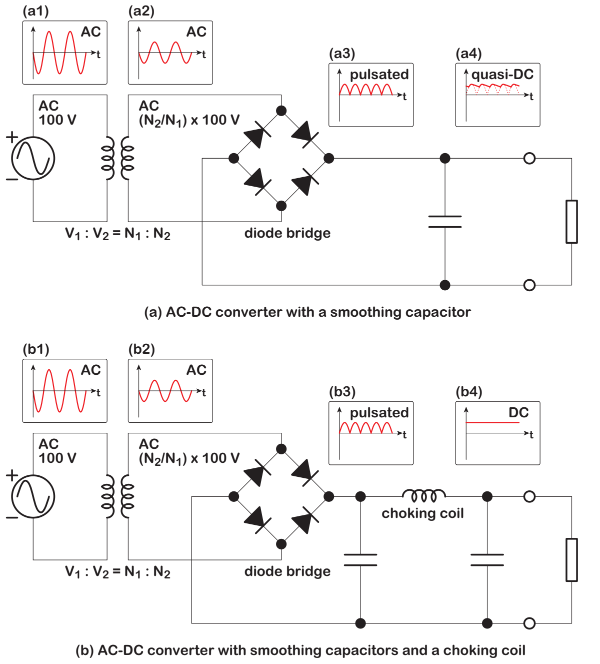


図 13.11 (a) 全波整流回路（平滑化コンデンサのみ）．(b) 全波整流回路（LC フィルタ付）．

増幅素子としての所望の動作をトランジスタにさせるためには，微小信号を入力するベース端子 B に適当な直流バイアス電圧が印加されていなければならない．即ち，ベース端子 B に入力すべき電圧は，直流バイアス電圧と微小信号が重畳した電圧でなければならないのである．

図 13.12 では，その直流バイアス電圧をベース端子 B に与えるために，$V_\mathrm{CC} = +10$ V の電池から供給される直流電圧を抵抗 R_1 と R_2 で分割して与えている（+1.8 V になる）．この電圧に，増幅したい微小信号電圧 v_in を重畳させたいのだが，v_in をベース端子 B に直結するとマズイことが起こる．なぜなら，v_in が 0 V を中心に振動しているので，v_in をベース端子 B に直結すると，ベース端子 B の平均的な直流バイアス電圧が 0 V になってしまうからである（せっかくバイアス電圧を印加しよう

[*8] 4 個のダイオードで構成されている四角形の回路をダイオードブリッジという．ダイオードブリッジ単独でも全波整流回路と呼ばれる場合がある．

[*9] トランジスタ (厳密にはバイポーラトランジスタ) は電流増幅素子なので，本来は，電圧が増幅されるという見方はよろしくない．くどい言い方になるが，より厳密には，「ベースに印加された微小交流電圧による微小ベース交流電流を h_FE 倍したものがコレクタ側の交流電流として流れ，それが負荷抵抗を流れることによって，負荷側にベース側の微小交流電圧を増倍したような交流電圧が発生する」，という言い方になる．ここでは，交流が重畳しているときの「電圧」（バイアス電圧）のかけ方について説明しているので，あえて電流ではなく電圧を主人公のようにして述べているが，バイポーラトランジスタの本当の主人公は電流である．

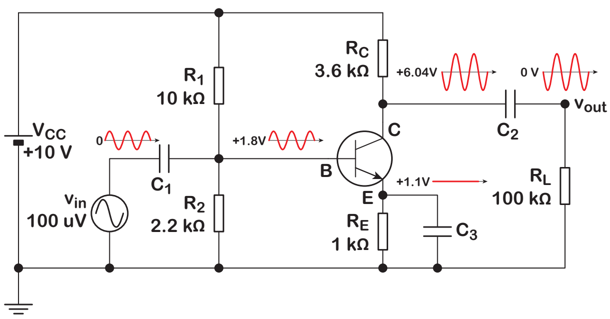


図 13.12 電圧分割バイアス式増幅回路の例.

としたのに).

このとき，ベース端子 B のバイアス電圧をかき乱すことなく $v_{\rm in}$ を加えるために用いられるのが**カップリングコンデンサ**である．図中の C_1 がそれである．適切な容量のカップリングコンデンサ C_1 を介して $v_{\rm in}$ をベース端子 B に接続すると，直流成分にとっては，カップリングコンデンサは「開放」と同等となるので，$v_{\rm in}$ が接続されていないのと同等となる．即ち，ベース端子 B の直流バイアス電圧を乱すことがない．一方，交流成分である微小信号にとっては，カップリングコンデンサ C_1 の部分は「短絡」(直結) と同等になるため，ベース端子 B にその微小信号 $v_{\rm in}$ が伝達される．これにより，ベース端子 B の電圧は，バイアス電圧 (+1.8 V) と微小信号 $v_{\rm in}$ が重畳した所望の電圧となる．どれくらいの容量のコンデンサを接続すればよいか，については本章末の課題としたので，各自にて確認して欲しい．

このようなカップリングコンデンサは，増幅回路の出力段にも存在する．図中の C_2 がそれである．トランジスタについて学習するとわかるのだが，コレクタ端子 C の電圧（増幅された電圧）には，直流バイアスが重畳している．これに対し，一般には，負荷抵抗 $R_{\rm L}$ に印加する電圧は，0 V を中心にして振動していることが望まれる．従って，コレクタ端子 C の電圧を負荷抵抗 $R_{\rm L}$ に直結すると，望みの状態にはならないのである．

望みの状態にするためには，同図のようにカップリングコンデンサ C_2 を介してコレクタ端子 C と負荷抵抗を接続すればよい．直流成分にとっては，カップリングコンデンサは「開放」と同等であるから，コレクタ端子 C と負荷抵抗 $R_{\rm L}$ は接続されていないのと同等となる．一方，交流成分（増幅された信号）にとっては，カップリングコンデンサは「短絡」と同等であるから，増幅された信号だけは，ちゃんと負荷抵抗 $R_{\rm L}$ に伝達される．これにより，負荷抵抗の電圧は 0 V を中心として振動する電圧となる．

なお，**図 13.12** には，もう一つのコンデンサ C_3 があり，トランジスタのエミッタ端子 E に接続された抵抗 $R_{\rm E}$ と並列に接続されている．これが，**バイパスコンデンサ**と呼ばれているものである．$R_{\rm E}$ は，トランジスタを増幅素子として機能させるために必須の抵抗ではないのだが，トランジスタの直流バイアス電圧が安定するという効能があるために接続されている．[*10] 但し，この $R_{\rm E}$ だけをエミッタ端子 E に接続すると，マズイことが生じる．なぜなら，この $R_{\rm E}$ だけがエミッタ端子に直列接続されると，増幅回路の入力端子であるベース端子 B から右側を見たときの入力抵抗が $R_{\rm E}$ だけ増えることになるため，ベース端子 B からエミッタ端子 E に流れる交流電流（増幅したい信号の電流）が，大幅に減少してしまうからである．[*11] これにより，実効的な増幅率が下がってしまうことになる．バイパスコンデンサ C_3 は，この問題を回避するために接続される．適切な容量のバイパスコンデンサを接続すると，直流成分にとっては，コンデンサは「開放」と同等であるから，接続していないのと同等となる．一方，交流成分にとっては，コンデンサは「短絡」と同等であるから，$R_{\rm E}$ の両端を導線で接続したのと同等となる．即ち，交流成分にとっては，エミッタ端子 E が $R_{\rm E}$ を介さずに接地されているのと同等となる．これにより，直流バイアスに関係する成分は $R_{\rm E}$ の効能を享受し，かつ，交流成分にとっては $R_{\rm E}$ が無いような状態を実現しているのである．これについても，どれくらいの容量のコンデンサを接続すればよいのか，については，章末の課題としたので，各自にて確認して欲しい．

[*10] トランジスタの直流バイアス電圧は，いくつかの要因によりシフトしてしまう可能性を有している．$R_{\rm E}$ を入れると，ベース・エミッタ間に印加される電圧が減ることになるが，負帰還が働くことによって，バイアス電圧のシフトを抑制してくれる．詳しくは，電子回路学で学習されたし．

[*11] ベース・エミッタ間に印加される直流バイアス電圧も減少するが，これについては，予め設計時に減少分を考慮して電圧をかければよい．しかし，どんな信号がくるかわからない入力信号については，予め措置することができないため問題となる．なお，$R_{\rm E}$ によるベース・エミッタ間の電圧減少については，章末のバイパスコンデンサに関する課題でものべているので，そちらも参照されたし．

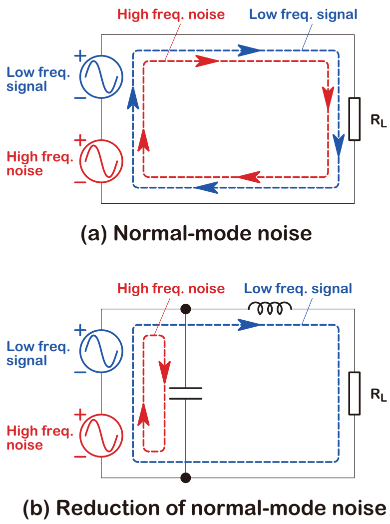


図 13.13 (a) ノーマルモードノイズの概念図と，(b) その対策．

図 13.14 ノーマルモードノイズが機器に侵入することを防ぐ対策が施された交流電源レセプタブル (Schaffner FN9222) [1]．パソコンを含む精密機器の電源入力端子としてよく見かけるであろう．

• ノイズ除去（RL フィルタとチョークコイル）

電気製品を駆動する場合，一般にはコンセントから電源をとる．このとき，製品側は，単純な正弦波の電圧が印加されることを期待している．しかし，雷などの原因によって，ノイズ，即ち，急峻に変化する電圧が重畳することがある．その重畳電圧の大きさが大きいと，電気製品が破損する場合がある．このようなノイズを電気製品側に伝達しないようにするためにコイルが用いられている．ノイズには，以下の二つがあり，それぞれに応じて，コイルの使い方が異なる．

- **ノーマルモードノイズ (normal-mode noise)**
  図 13.13(a) に示すように，回路のどこかにノイズ源があり，それが導線を通して伝達される場合に生じる．この場合，往路も復路も，信号とノイズの向きが同じとなる．**ディファレンシャル (差動) モードノイズ (differential-mode noise)** とも呼ばれる．

- **コモンモードノイズ (common-mode noise)**
  図 13.15(a) に示すように，往路と復路の両方が同じようにノイズの影響を受ける場合に生じる．この場合，往路と復路では，信号とノイズの向きが逆になる．

一般に，ノイズは，本来回路に流れるべき信号よりも高周波である場合が多い．そのため，上記のようなノイズに対する対策としては，回路の中にある高周波成分を負荷に伝達しないいようにする，という方法がとられる．以下では，その具体例を説明する．

• ノーマルモードノイズ対策

ノーマルモードノイズを除去したい場合には，**図 13.13**(b) に示すように RL フィルタを電源と負荷の間に設ける．本章で学習したように，高周波にとってのコンデンサは「短絡」に近いのに対し，コイルは「開放」に近い．一方，低周波にとってのコンデンサは「開放」に近いのに対し，コイルは「短絡」に近い．従って，高周波のノイズは，**図 13.13**(b) のように，コンデンサ側の回路を通り，コイル側（負荷側）の回路を通らない．一方，低周波の信号は，コンデンサ側の回路は通らず，コイル側（負荷側）の回路をちゃんと通る．これにより，負荷 R_L には，本来の信号である低周波成分だけが伝達されることになる．

• コモンモードノイズ対策

コモンモードノイズの場合には，**図 13.15**(b) に示すように，コモンモードチョークコイルと呼ばれるコイルを用いる．コモンモードチョークコイルとは，本講義で学習した変成器（トランス）の一種であるが，使い方（つなぎ方）が異なることがわかる．このように接続すると，チョークコイルは，**図 13.16** に示すように，往路と復路で流れる向きが同じコモンモードノイズに対してはコイルとして機能する．即ち，高周波成分のノイズをカットする役割を果たす．一方，往路と復路で流れる向きが反対の信号に対しては，磁束が打ち消しあうために，コイルとしては機能せず，たんなる導線として働く．従って，信号に影響を与えることなく，コモンモードノイズを除去できる．参考までに，コモンモードチョークコイ

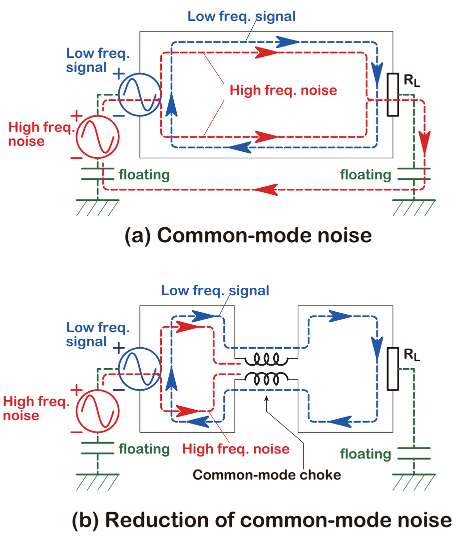


図 13.15 (a) コモンモードノイズの概念図と，(b) その対策．

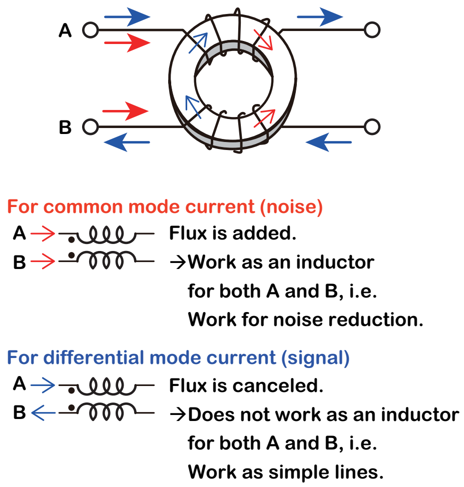


図 13.16 コモンモードチョークコイルの作用．

図 13.17 コモンモードチョークコイルの概観 (Schaffner RB series) [1]．プリント基板の上に乗っているのを見たことがある人もいるであろう．

ルの概観を**図 13.17** に示した．

豆知識

集積回路の多層配線

計算機に内蔵されている**図 13.18** のような CPU (central processing unit) が，膨大な数のトランジスタを組み込んだ超大規模集積回路 (ultra large scale integrated circuits; ULSI) の一種であるということは，電子・物理工学科を受験した人であれば知っていると思う．

この CPU の動作速度が速いほど，単位時間当たりに処理できる情報量が多くなる．かつては静止画像を扱うのが精一杯であったものが，今や動画や三次元画像も画面に描画できるようになったのは，CPU の処理速度の向上や，新たに画像処理専用に用いられるようになった GPU (graphics processing unit) の処理速度の向上による．

集積回路の信号処理の速さは，"0"と"1"の情報を単位時間当たりにどれだけ多く処理できるか，という CPU のクロック周波数によって決まる．従って，パソコンなどを選ぶときには，CPU のクロック周波数が高いものほど処理速度が速く，それだけ価格も高額となっている．

"0"と"1"の切り替え速度は，**図 13.19** に示した信号処理の心臓部であるトランジスタ (metal oxide semiconductor field effect transistor (MOS FET)) の ON と OFF の切り替え速度によって決まる．MOS FET では，ゲートに印加する電圧を制御することによってチャネルに電流を流す・流さないを制御する．この切り替え時間は，電流の担い手であるキャリア (電子や正孔) が

図 13.18 Intel Core i7 の外観 [2]．外観だけ見ても単なるパッケージである．

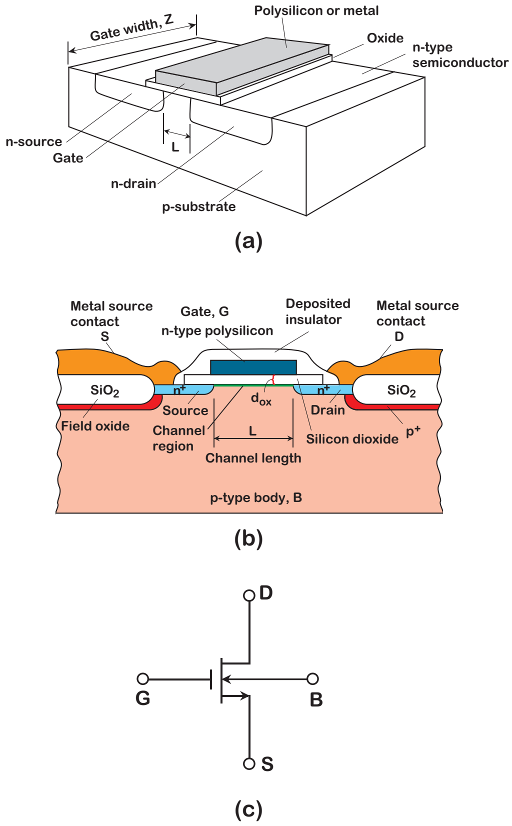


図 13.19 MOS FET の (a) 鳥瞰図，(b) 断面図，及び (c) 回路記号.

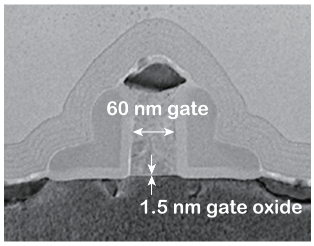


図 13.21 60 nm 世代の MOS FET の断面写真 [3].

MOS FET のゲート電極直下のチャネル部を通過する時間 (ゲート遅延時間) で決まる．従って，チャネル部の長さを短くすれば切り替え時間が速くなる．即ち，信号処理の高速化は，トランジスタの微細化によって達成されてきた．

図 13.20 は，年ごとに微細化してきた MOS FET の特性長 (~ チャネル長) とクロック周波数の変遷を示したものである．微細化は年々順調に進んでいのがわかる．参考までに，60 nm 世代の MOS FET の断面写真を**図 13.21** に示しておく [3]．一方，クロック周波数については，ある時点から頭打ちになっていることがわかる．

ここでは，何故このような頭打ちになってしまったのか，を本章で学習した過渡現象と関連付けて説明する．

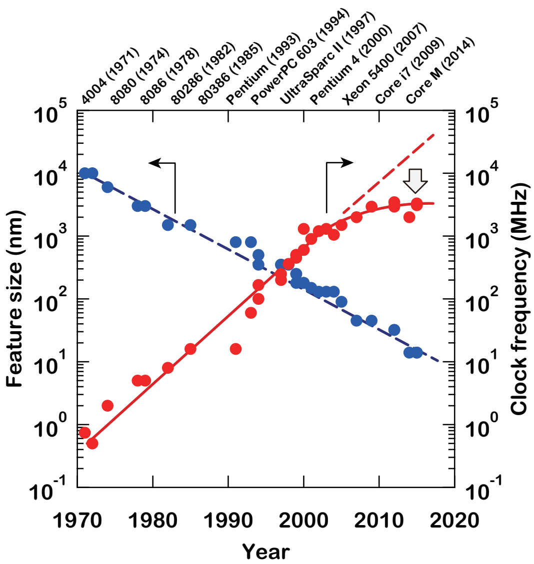


図 13.20 CPU のトランジスタの微細化とクロック周波数の変遷 [2].

CPU を適切に動作させるためには，トランジスタを適切に配線しなければならない．極めて多数のトランジスタを限られた面積の中で配線するために，**図 13.22** に示すような多層配線が利用されている [4]．この電子顕微鏡写真は，完成した多層配線の配線間絶縁体をエッチングによって除去し，配線だけを残して撮影されている．これにより，多層配線の様子を判りやすくしている．*12

この電子顕微鏡写真から，多層配線の断面の基本的な構造を描くと**図 13.23** に示すような模式図のようになる．即ち，上下左右に隣り合った配線はコンデンサの構造を形成しているのである．また，配線自身にも抵抗があるため，集積回路の配線を電気回路として扱うときには，抵抗とコンデンサが入り交じった回路として扱うこ

*12 この写真の色は，素人ウケするように後から人為的に着色されたものである．物理を学んだ者であれば，可視光の波長より小さい電子波を使って観測したら物体にこんな色が付くはずがない，ということを見抜いて欲しい．

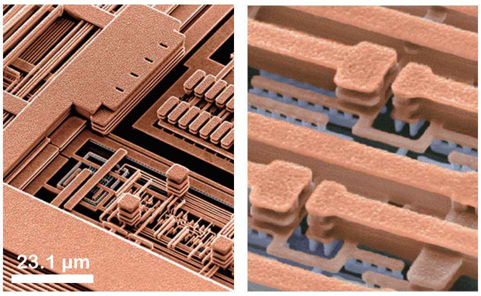


図 13.22 IBM の多層配線の電子顕微鏡写真 [4]．エッチングによって配線間の絶縁膜を除去した後の写真．

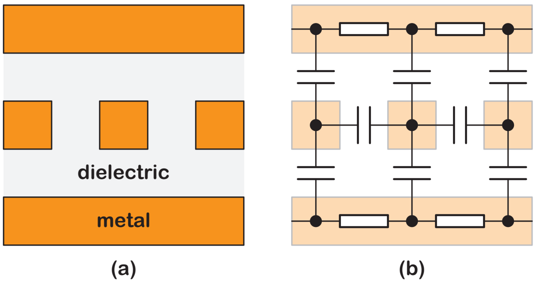


図 13.23 簡単化した多層配線断面の模式図．

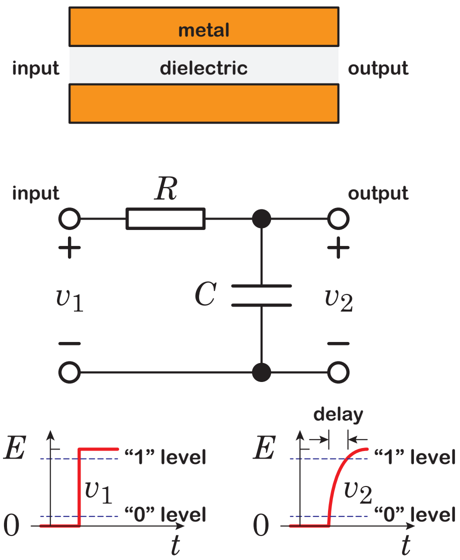


図 13.24 多層配線の基本構造の等価回路．

とになる．但し，**図 13.23** に示した回路のままでは解析が困難である．ここでは，上下，または左右で隣り合った二つの配線だけに注目する．すると，**図 13.24** のような回路，即ち，本章で学習した RC 直列回路となる．

論理回路は, "0" と "1" の情報をやりとりすることで情報処理を行うが，集積回路では，トランジスタの ON/OFF によって変化する電圧信号を他のトランジスタ等に伝達することによってこの情報処理を行う．このとき，信号伝達用の配線は，既に示したように，必ず**図 13.24** に示した構造になる．$t = 0$ でこの回路の入力端子の電圧が 0 から E に変化した場合，入力端子側では $t = 0$ で論理値が"0"から"1"に変化したことになる．しかし，本章で学習したように，この回路において，入力側の電圧が 0 から E に変化したとしても，出力側の端子間の電圧はすぐには E に到達せず，次式のように変化する．

$$v_2(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \tag{13.30}$$

ここで，$\tau = RC$ である．即ち，入力端子側の信号の変化が出力端子側に反映されるのに遅延時間が伴う．このような遅延のことを RC 遅延と呼んでいる．

上記のような RC 遅延時間を伴う信号伝達回路の場合，クロック周波数の周期 T が $\tau = RC$ よりも十分に大きい $RC \ll T$ の場合には，**図 13.25**(b) に示すように，多少の遅れ時間を伴うが，出力側でも正常に"0"と"1"の切り替えがなされる．しかし，高周波数化によって T が RC に近づくと，**図 13.25**(c) に示すように，入力側の変化が出力に反映されなくなる．即ち，情報処理デバイスとして機能しなくなる．これが，CPU のクロック周波数の頭打ちの原因である．

こうした頭打ちを打開するために各種の施策が実施された．その中で，現在の CPU に採用されている施策内容を以下に紹介する．RC 遅延については，電気回路に

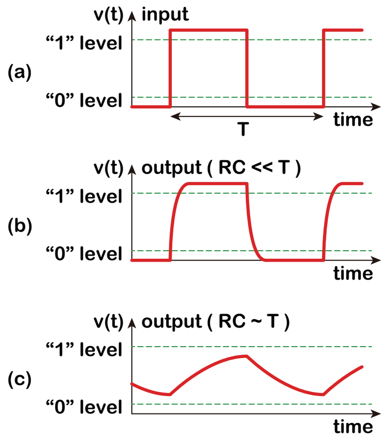


図 13.25 配線間容量による信号遅延が"0"/"1"情報伝達に及ぼす影響．

関する知識があれば理解できたが，以下に述べる施策内容の一部については，電磁気学に関する知識が必要となるので，各自にて学習して欲しい．

豆知識

Cu 配線と低誘電率配線間絶縁体

前節で述べた RC 遅延の影響を低減するための方策の一つは極めて単純であり，以下のような方策である．

- R を小さくする
- C を小さくする

• R を小さくする

抵抗 R は，配線材料の抵抗率を ρ，断面積を S，長さを L とすると，

$$R = \rho\frac{L}{S} \tag{13.31}$$

で表される．従って，R を小さくために行うことのできる施策は以下の三つである．

L 配線を短くする
二箇所を配線でつなぐ距離は，ULSI の微細化によって短くなる．従って，微細化をそのまま歓迎すればよいはずである．

S 配線を太くする
配線の太さは，ULSI の微細化によって細くなる．従って，微細化に伴って何らかの別の対策をする講じる必要がある．なお，**図 13.26** に示したように [3]，多層配線の最下層には高密度に実装されたトランジスタが存在するため，それらを配線するために配線は細くなる．しかし，上層についてはそうした制限が無いため，他の制限事項を考慮した上で，可能な限り太い配線が用いられている．

ρ 低抵抗率の配線材料を使う
上記の何らかの別の対策がこれにあたる．現存の金属材料の中から，より抵抗率の小さい材料で，かつその他の要求事項を満たす材料を選定することになる．なお，究極の方策として，抵抗ゼロの超伝導を用いるという施策も考えられる．*13

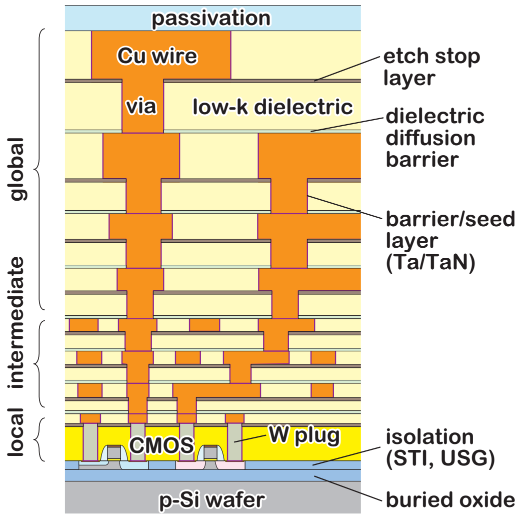


図 13.26 多層配線における階層構造．

集積回路の黎明期から用いられていた配線材料は，抵抗率が $\rho = 2.8\ \mu\Omega$ cm の Al であった．Al よりも抵抗率の小さい材料として，Au (2.4 $\mu\Omega$ cm)，Cu (1.7 $\mu\Omega$ cm)，Ag (1.6 $\mu\Omega$ cm) が挙げられる．これらの材料のコスト，プロセス整合性，信頼性などが検討された結果，Cu が利用されるようになった [5]．

なお，近年では，トランジスタ周辺のローカル配線と，遠方まで伸びるグローバル配線とでは，課せられる制限や可能な施策が異なることから，それらを区別した施策が検討されている．特に，オンチップメモリとの接続を担う配線などのグローバル配線については，RC 遅延や配線間のクロストークの問題を回避できる光インターコネクトなどの施策が検討されている [6]．

• C を小さくする

C を小さくするための方策を考えるためには，電磁気学に関する知識を有している必要がある．電磁気学によると，コンデンサの容量 C は，

$$C = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{d} \tag{13.32}$$

で与えられる．ここで，ε_r は配線間の絶縁体の比誘電率，ε_0 は真空の誘電率，d は配線間の距離，S はコンデンサの面積 (即ち，配線の側面の面積) である．従って，

*13 現時点では，超伝導を利用するためには極低温への冷却が必要となり，費用がかかりすぎる．しかし，デバイスの微細化と高密度化が進行すれば，単位面積当たりの消費電力が尋常ではなくなるため，超伝導配線でなくても大規模な冷却装置が必要となるはずであろう．同じ冷却が必要ならば，超伝導にしてもコスト的にはトントンになるのでは？という発想もあるかと思われる．

C を小さくするために講じることのできる施策は以下の三つである．

- S 断面積を小さくする
  これは配線を細くすることに対応するため，先述の配線を太くしたい，という要求と逆である．但し，配線が対向しない面については，太くてもかまわない．また，後述の配線間距離が十分広い場合には，断面積に関する制約はある程度緩和されるので，太い配線でもかまわない．
- d 配線間隔を広くする
  これは微細化とは逆行する．特に，多層配線の最下層は，高密度に実装されたトランジスタに近いため，それらを接続するための配線の間隔はどうしても狭くなってしまう．但し，トランジスタから遠く離れた上層の配線については，配線間の隙間を大きくすることが可能である．
- ε_{r} 低誘電率の絶縁体を使う
  上記二つの施策とは異なり，この施策は他の要因と干渉しない唯一の逃げ道となっている．

集積回路の黎明期から用いられていた絶縁体は比誘電率が 4 の $\mathrm{SiO_2}$ である．そのため，これよりも小さい比誘電率を持つ低誘電率材料 (low-k 材料と呼んでいる) の探索もしくは開発が始まった．なお，**図 13.26** に示したように，多層配線の階層の上層部の配線については，場所に余裕があるため，縦方向や横方向の d を広くするという方策がとられている．[*14]

R を小さくする施策と比較すると，C を小さくするための施策には，実は限界がある．抵抗率については，超伝導を用いれば，究極的にはゼロにできる．[*15] 一方，比誘電率についてはゼロにすることはできない．最も小さい比誘電率の値は"1"であり，その値を示す材料は固体ではなくガス (または真空) しかない．冒頭で示したように，配線間が空隙になっている状態の多層配線が究極の姿である．しかし，それでも R が有限である限り，$\tau = RC$ はゼロにはならない．また，そのようなことをすれば機械的強度が無くなってしまうという問題も

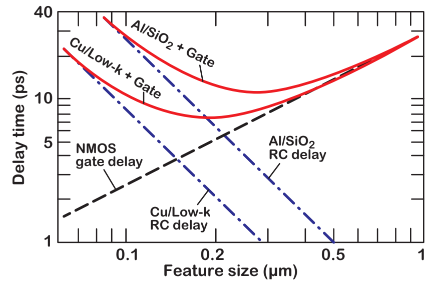


図 13.27 微細化によるゲート遅延と RC 遅延の変化 [7].

ある．従って，何らかの固体の絶縁物で配線間を埋めておく必要がある．固体物質で比誘電率の低い材料の典型例は有機高分子であり，その比誘電率は 2 ~ 3 である．しかし，集積回路の製造工程における配線形成行程では数百度の加熱を伴うため，一般的な高分子はその温度に耐えることができない．現時点では，無機系の $\mathrm{SiO_2}$ と有機系を混在させ，機械的強度や耐熱性をある程度維持し，かつ，比誘電率も $\mathrm{SiO_2}$ よりはある程度低い，というハイブリッド膜で我慢しているのが現状である．

図 13.27 は，従来の Al ($\rho = 2\ \mu\Omega$ cm) と $\mathrm{SiO_2}$ ($\varepsilon_{\mathrm{r}} = 4$) による配線の場合と，Cu ($\rho = 3\ \mu\Omega$ cm) と Low-k 材料 ($\varepsilon_{\mathrm{r}} = 2$) による配線の場合の遅延時間と素子寸法の関係を図示したものである [7]．トランジスタの寸法の微細化を進めると，ゲート遅延時間についてはいくらでも小さくなる．しかし，配線が関与した全体の遅延時間については，RC 遅延が重畳するために，あるところまでしか小さくならない．配線に Al を用い，絶縁体に $\mathrm{SiO_2}$ を用いた場合には，素子寸法が 0.3 μm ぐらいから微細化の効果が無くなる．これに対し，配線に Cu を用い，絶縁体に $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 2$ の Low-k 材料を用いた場合には，0.2 μm まで微細化による高速化が図れることがわかる．しかし，0.2 μm よりも小さくなると，もはや，微細化しても高速化は図れないこともわかる．

こうした CPU の高速化の頭打ちが顕在化したことにより，CPU メーカーは，現在可能な最良の施策として，別の解決策を講じるようになった．それがマルチコアの CPU の開発である．要するに，一つのチップの中に複数の CPU を組み込み，それらを連動させる方式である．純粋に CPU の処理速度が速くなったわけでは無いので，単純な数値計算などは速くならない．しかし，関連の無い複数のアプリの同時稼働や，並列演算が可能な画像処理のような場合には高速化が可能となる．

[*14] 配線の断面積が大きくなることにより，コンデンサの面積が大きくなってしまうので，それによる C の増加を抑えるためにも d を広くする必要がある．

[*15] R がゼロであれば，C が如何なる値であっても $\tau = RC$ はゼロとなり，C について気にする必要がなくなる，というメリットもある．

課題 リップルの近似式

図 13.28(a) 及び**図 13.28**(b) に示した半波整流回路と全波整流回路におけるリップルの近似式が次式で与えられることを示せ．なお，ダイオードの電圧降下は無視してよい．

- (a) 半波整流の場合

$$\Delta V = \frac{V_\mathrm{m}}{fRC} \tag{13.33}$$

- (b) 全波整流の場合

$$\Delta V = \frac{V_\mathrm{m}}{2fRC} \tag{13.34}$$

ここで，f は整流前の波形の周波数である．

略解

• 半波整流の場合

半波整流の場合の元の波形と整流された波形は，**図 13.29**(a) のようになる．ここで，以下のような近似を行う [8].

- 時刻 t_1 とそのときの電圧
  厳密には，t_1 は元の波形が極大になる時効よりも遅い (右側になる) が，元の波形が極大となる時刻であると近似する．
- 時刻 t_2
  厳密には，t_2 は元の波形が再び極大になる時刻よりも早い (左側になる) が，元の波形が再び極大となる時刻であると近似する．

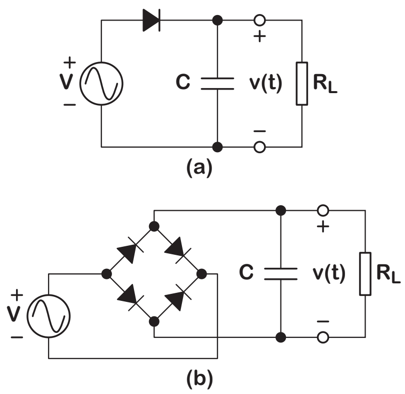


図 13.28 リップル近似式に関する問題の (a) 半波整流回路と (b) 全波整流回路．

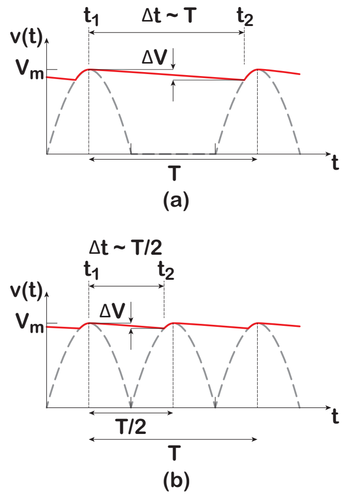


図 13.29 リップル近似式を求めるための波形．(a) 半波整流の場合．(b) 全波整流の場合．

これらの近似は，電圧の目減りがそれほど大きくない状況であれば，良い近似を与える（RC 時定数が十分大きければよい）．これらの近似により，リップルによる電圧の目減りは，本章で学習した RC 回路の過渡現象に帰着させることができる．即ち，$t = t_1$ で $v = V_\mathrm{m}$ のコンデンサの電圧が，$t = t_2$ においてどれだけ低下するかを求めればよい．

$\Delta t = t - t_1$ とすると，RC 回路の過渡現象で学習したように，コンデンサの電圧は，次式に従って，指数関数的に減少する．

$$v(t) = V_\mathrm{m} \exp\left(-\frac{\Delta t}{RC}\right). \tag{13.35}$$

RC が十分に大きいことから，指数関数をテーラー展開して第 2 項までで近似すると，次式のようになる．

$$\begin{aligned} v(t) &= V_\mathrm{m}\left(1 - \frac{\Delta t}{RC} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{RC}\right)^2 - \cdots\right) \\ &= V_\mathrm{m}\left(1 - \frac{\Delta t}{RC}\right). \end{aligned} \tag{13.36}$$

先の近似より，電圧の目減り ΔV は，$t = t_1$ と $t = t_2$ のときの電圧の差であるから，

$$\Delta V = V_\mathrm{m}\frac{T}{RC} \tag{13.37}$$

となる．$f = 1/T$ を用いれば，以下のように求めるべき式が得られる．

$$\Delta V = \frac{V_\mathrm{m}}{fRC}. \tag{13.38}$$

• **全波整流の場合**

全波整流の場合の元の波形と整流された波形は，**図 13.29**(b) のようになる．このときのリップルによる電圧低下を求める論理は，先ほどと同じであり，$T \to T/2$ の置き換えをするだけである．従って，以下のようになる．

$$\Delta V = \frac{V_\mathrm{m}}{2fRC}. \tag{13.39}$$

課題 カップリングコンデンサの適切な容量

図 13.30(a) に示すように，直流と交流が重畳した電圧を抵抗 R に印加する際に，コンデンサ C がカップリングコンデンサとして機能するための実用的な指標として，「10:1」ルールというものがある [9]．これは，

$$X_\mathrm{C} < \frac{R}{10} \tag{13.40}$$

であればよい，というルールである．ここで，

$$X_\mathrm{C} = \frac{1}{\omega C} \tag{13.41}$$

はコンデンサのリアクタンスであり，ω は交流成分の角周波数である．このルールに従って C を選定すれば，それがカップリングコンデンサとしての機能を十分に果たすことを確認せよ．

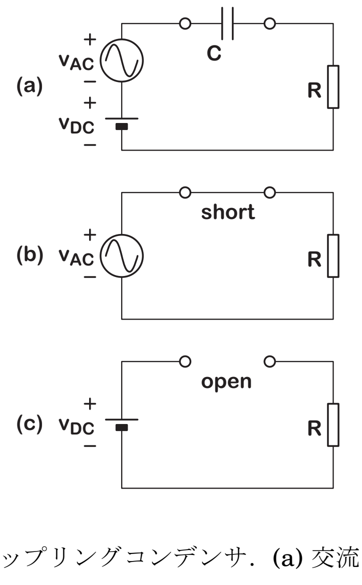


図 13.30 カップリングコンデンサ．(a) 交流と直流が重畳した電圧をコンデンサと抵抗の直列接続に印加する回路．(b) 十分に周波数の高い交流成分にとっての等価回路．(c) 直流成分にとっての等価回路．

略解

「10:1」ルールに従って選定したコンデンサ C を用いると，RC 直列回路全体に印加される交流電圧のほとんどが抵抗 R に印加される，ということを確認すればよい．RC 直列回路全体のインピーダンス Z の大きさは，

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_\mathrm{C}^2} \tag{13.42}$$

である．ここで，「10:1」ルールから，

$$X_\mathrm{C} = \frac{R}{10} = 0.1R \tag{13.43}$$

とすると，

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (0.1R)^2} = 1.005R \tag{13.44}$$

となる．従って，抵抗 R に印加される交流電圧の比率は，直列接続時の電圧分割の関係を使って，以下のように求められる．

$$\frac{R}{|Z|} = \frac{1}{1.005} = 0.995 = 99.5\%. \tag{13.45}$$

この結果から，交流成分については，Z に印加された電圧のほとんどが抵抗 R に印加されることがわかる．即ち，「10:1」ルールを満たすとき，交流にとっては，**図 13.30**(b) に示したように，コンデンサが無いのと同等となる．

例えば，周波数 $f = 20$ Hz（$\omega = 126$ rad/s）の交流を想定し，$R = 2$ kΩ とすると，カップリングコンデンサ C の容量としては，おおよそ，

$$C > 40\ \mu\mathrm{F} \tag{13.46}$$

であればよい，ということになる．

課題 バイパスコンデンサの適切な容量

図 13.31(a) に示すように，直流と交流が重畳した電圧を抵抗 R に印加する際に，コンデンサ C がバイパスコンデンサとして機能するための実用的な指標として，「10:1」ルールというものがある．[*16] これは，

$$X_\mathrm{C} < \frac{R}{10} \tag{13.47}$$

であればよい，というルールである．ここで，

$$X_\mathrm{C} = \frac{1}{\omega C} \tag{13.48}$$

[*16] カップリングコンデンサの場合と同じである．

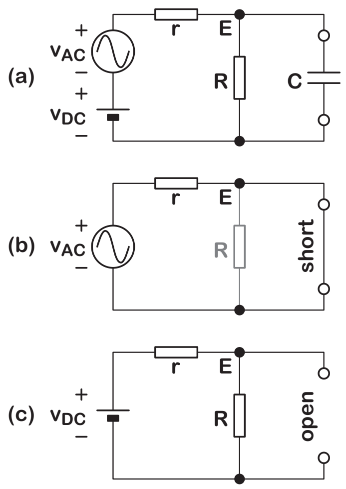


図 13.31 バイパスコンデンサ．(a) 交流と直流が重畳した電圧をコンデンサと抵抗の並列接続に印加する回路．(b) 十分に周波数の高い交流成分にとっての等価回路．(c) 直流成分にとっての等価回路．

はコンデンサのリアクタンスであり，ω は交流成分の角周波数である．このルールに従って C を選定すれば，それがバイパスコンデンサとしての機能を十分に果たすことを確認せよ．なお，r は電源側の内部抵抗である．**図 13.31** の節点 E をトランジスタのエミッタ端子と考えると，r はベース・エミッタ間（の抵抗）に相当する．

略解

「10:1」ルールに従って選定したコンデンサ C を用いると，RC 並列回路全体に流れる交流電流のほとんどがコンデンサ C に流れる，ということを確認すればよい．RC 並列回路全体のアドミタンス Y の大きさは，

$$|Y| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_\mathrm{C}^2}} \tag{13.49}$$

である．ここで，「10:1」ルールから，

$$X_\mathrm{C} = \frac{R}{10} \tag{13.50}$$

とすると，

$$|Y| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{10^2}{R^2}} = \frac{\sqrt{101}}{R} \approx \frac{10.05}{R} \tag{13.51}$$

となる．従って，コンデンサに流れる交流電流の比率は，並列接続時の電流分割の関係を使って，以下のように求められる．

$$\frac{1/X_\mathrm{C}}{|Y|} = \frac{10/R}{10.05/R} = 0.995 = 99.5\%. \tag{13.52}$$

この結果から，交流成分に関しては，Y に流れる電流のほとんどがコンデンサ C に流れることがわかる．即ち，「10:1」ルールを満たすとき，交流にとっては，**図 13.30**(b) に示したように，抵抗 R を抵抗ゼロの導線でバイパスしたのと同等となる．

例えば，周波数 $f = 20$ Hz（$\omega = 126$ rad/s）の交流を想定し，$R = 1$ kΩ とすると，バイパスコンデンサ C の容量としては，おおよそ，

$$C > 80\ \mu\mathrm{F} \tag{13.53}$$

であればよい，ということになる．

なお，バイパスコンデンサの有無による上記のような違いは，以下のように解釈することもできる．即ち，抵抗 R がバイパスされていないときは，抵抗 r に印加される電圧は，直流の場合と交流の場合のどちらの場合も，印加された電圧から R での電圧降下を差し引いたものとなる．トランジスタの場合，この R による電圧降下が発生することによって，ベース・エミッタ間（r に相当する）の直流バイアス電圧の安定化という恩恵が得られる．[*17] しかし，交流成分についても同じように差し引かれると，困ったことが起こる．ベース・エミッタ間には，交流電圧 v_AC を印加したかったのに，この R があることによって，v_AC よりも小さい電圧がベース・エミッタ間に印加されることになるからである．[*18] これは，実効的な増幅率を小さくするため，一般には，あまり望ましいことではない．このとき，バイパスコンデンサがあると，交流成分については R が関与しなくなるため，v_AC が差し引かれることなくベース・エミッタ間に印加される．これにより，増幅率の低下を避けることができる．

[*17] この「安定化」のメカニズムについては、電子回路学にて学習されたし．

[*18] 当然であるが，直流バイアス電圧も R での電圧降下を差し引いたものになるが，こちらは設計時にその電圧降下分を補うだけの電圧が印加されるようにすればよい．

事前基盤知識確認事項

[1] 微分方程式

次の微分方程式を解き，$i(t)$ を求めよ．

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+Ri(t)=E. \tag{13.54}$$

但し，$t=0$ で $i(t)=0$ とし，R，L，E は t に依存しない定数 $(\neq 0)$ とする．

略解

与式は以下のように書ける．

$$-\frac{1}{Ri-E}\,\mathrm{d}i=\frac{1}{L}\,\mathrm{d}t. \tag{13.55}$$

これを t で一回積分すると次式を得る．

$$-\frac{1}{R}\int\frac{R}{Ri-E}\,\mathrm{d}i=\frac{1}{L}\int\,\mathrm{d}t. \tag{13.56}$$

この積分を実行すれば次式を得る．

$$-\frac{1}{R}\ln(Ri-E)=\frac{1}{L}t+\ln K. \tag{13.57}$$

ここで K は積分定数である．従って，

$$Ri-E=K\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \tag{13.58}$$

となる．次に，初期条件から積分定数を求める．$t=0$ で $i(t)=0$ であるから，

$$-E=K \tag{13.59}$$

となる．

以上より，求めるべき $i(t)$ は次式のようになる．

$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right). \tag{13.60}$$

[2] 積分方程式

$i(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t)$ なる関係があるとき，次の積分方程式を解き，$i(t)$ を求めよ．

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t=E. \tag{13.61}$$

但し，$t=0$ で $q(t)=0$ とし，R，C，E は t に依存しない定数 $(\neq 0)$ とする．

略解

与式を $q(t)$ で表すと次式を得る．

$$R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t)+\frac{1}{C}q(t)=E. \tag{13.62}$$

これは以下のように書ける．

$$-\frac{1}{\frac{1}{C}q-E}\,\mathrm{d}q=\frac{1}{R}\,\mathrm{d}t. \tag{13.63}$$

これを t で一回積分すると次式を得る．

$$-C\int\frac{\frac{1}{C}}{\frac{1}{C}q-E}\,\mathrm{d}q=\frac{1}{R}\int\,\mathrm{d}t. \tag{13.64}$$

この積分を実行すれば次式を得る．

$$-C\ln\left(\frac{1}{C}q-E\right)=\frac{1}{R}t+\ln K. \tag{13.65}$$

ここで，K は積分定数である．従って，

$$\frac{1}{C}q-E=K\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{13.66}$$

となる．次に，初期条件から積分定数を求める．$t=0$ で $q(t)=0$ であるから，

$$-E=K \tag{13.67}$$

となる．

以上より，$q(t)$ は次式のようになる．

$$q(t)=CE\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right). \tag{13.68}$$

$i(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t)$ であったから，求めるべき $i(t)$ は次式のようになる．

$$i(t)=\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}. \tag{13.69}$$

参考文献

[1] http://www.schaffner.com/products/emcemi/

[2] http://www.cpu-world.com/ より主要な CPU のデータを集計.

[3] S. Thompson *et al.*: "130 nm logic technology featuring 60 nm transistors, low-k dielectrics, and Cu interconnects", Intel Technol. J. **6** (May 2002) pp. 5-13.

[4] http://www-03.ibm.com/ibm/history/ibm100/us/en/icons/copperchip/
http://kasap3.usask.ca/

[5] D. Edelstein *et al.*: "Full copper wiring in a sub-0.25 μm CMOS ULSI technology", IEDM Tech. Digest (1997) pp. 773-776.

[6] K. Ohashi *et al.*: "On-chip optical interconnect", Proc. IEEE **97**, 1186-1198 (2009).

[7] 吉川公磨: "ULSI の微細化と多層配線技術への課題", 応用物理 **68**, 1215-1225 (1999).

[8] J. Millman and C. C. Halkias: Integrated Electronics: Analog and Digital Circuits and Systems (McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1972) pp. 109-114.

[9] Albert Malvino and David Bates: Electronic Principles 8th Ed. (McGraw-Hill Edutation, New York, NY, 2016) pp. 282-286.

付録 A

複素数に関する補足

本章の目的は，本講義を受講する人に以下の事項を理解して頂くことである．

- 電気回路学では虚数単位を i の代わりに j で表す．
- 「j との積」は「偏角を $\pi/2$ (90°) 増やすこと」．
- オイラーの公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$$

A.1　はじめに

電気回路では虚数単位を多用する．その際，電気回路で電流を表すために用いられる i との混同を避けるために，虚数単位を j で表すので慣れて欲しい．

数直線上の数しか扱わない高校数学で学ぶ虚数単位 j は，単なる $\sqrt{-1}$ の代用品として導入される．これに対し，電気回路，電磁気学，量子力学などにおいて「波 (波動)」が関与する現象を扱うときには，j が持つ別の性質が多用される．即ち，**j をかけ算するということが，数直線を数平面 (複素平面) にまで拡張した領域で定義された数 (複素数) の偏角を $\pi/2$ だけ増やすこと**，という性質である．この性質を理解するためには，j を登場させる前に，まず数平面上の数の四則演算を定めておく必要がある．

また，電気回路では，交流信号を $A\sin(\omega t+\theta)$ と表す代わりに，振幅 A の情報 (実効値) をその絶対値として有し，位相 θ の情報をその偏角として有する複素数で表す (フェーザ形式という)．その概念の導入の際に，**オイラーの公式**と呼ばれる以下の関係式を用いる．

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta \tag{A.1}$$

本章では，j の基本的性質，上式における e の虚数乗という概念の導入，及び**オイラーの公式**の導出を行う．なお，虚数単位が関係する上記について既に知識を有し，かつ理解している人にとっては，本章は無用である．

A.2　演算法則の復習

ここでは，数の種類によらず適用できるような四則演算の概念的な本質を実数の演算から抽出し，それを数平面上の数の演算に適用する．$\mathrm{j}^2 = -1$ 等の虚数単位の性質は，その結果として現れることを示す．なお，四則演算のうち，引き算と割り算は，それぞれ足し算とかけ算の逆演算であるから，多少手抜きであるが，踏み込んだ議論はしないことにする．

A.2.1　足し算とは？

以下のような足し算は，一般的にはどのように解釈されているだろうか？

$$2+3=5 \tag{A.2}$$

正の整数しか扱わなかった頃の解釈の仕方は，以下のようなイメージかと思う．

$$□□+□□□=□□□□□ \tag{A.3}$$

しかし，このような飛び飛びの値しかとらない数の概念にとらわれた解釈では，数というものを数直線上に連続して存在する実数へ，更には平面上に存在する数 (複素数) にまで拡張できないのは明かである．足し算の本質的な点を考えると，「**足し算とは原点のずらしである**」と解釈すべきである．即ち，$2+3=5$ という足し算の解釈の仕方としては，図 **A.1** に示すように，以下のような解釈をするのがより本質的であろう．

- **足し算の本質は原点のずらし**
  数直線上で「0」を原点として「2」がある．このとき，この「2」を新たな原点としたら，「3」はもとの数直線上ではどこになるのか？

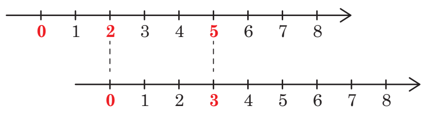


図 A.1 足し算の本質は目盛のずらし．

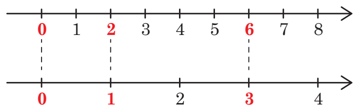


図 A.2 かけ算の本質は目盛のスケールの付け替え．

A.2.2　かけ算とは？

以下のようなかけ算は，一般的にはどのように解釈されているだろうか？

$$2 \times 3 = 6 \tag{A.4}$$

正の整数しか扱わなかった頃の解釈の仕方は，以下のようなイメージかと思う．

$$□□\ □□\ □□ = □□□□□□□ \tag{A.5}$$

では，以下のかけ算はどのように解釈するのだろうか？

$$(-2) \times (-3) = 6 \tag{A.6}$$

負の数どうしのかけ算が正になることについては，「なぜか」については触れずに，強制的に覚え込まされたはずである．そこで，今一度，かけ算の概念の本質を考えてみると，「**かけ算とは数直線上の目盛のスケールと方向の付け替え**」であるといえる．従って，$2 \times 3 = 6$ の解釈の仕方としては，**図 A.2** に示すように，以下のような解釈が，より本質的な解釈の仕方であろう．

- **かけ算の本質は目盛のスケールと方向の付け替え**
  数直線上で「0」から「1」までの距離と方向を基準 (ひと目盛) として「2」がある．このとき，「0」から「2」までの距離と方向を新たな基準 (新たなひと目盛) とする目盛でみたら，「3」はもとの目盛ではどこになるのか？

このような解釈に基づいて $(-2) \times (-3) = 6$ を解釈すると，**図 A.3** に示すように，以下のような解釈となる．

数直線上で「0」から「1」までの距離と方向を基準 (ひと目盛) として「−2」がある．このとき，「0」から「−2」までの距離と方向を新たな基準 (新たなひと目盛) とする目盛でみたら，「−3」はもとの目盛ではどこになるのか？

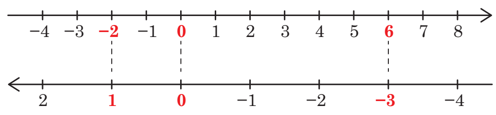


図 A.3 かけ算の本質に基づく $(-2) \times (-3) = 6$ の解釈．

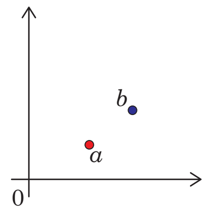


図 A.4 平面上の数 (複素数)．

この解釈に従えば，強制的に記憶させられた以下のかけ算のルールが自動的に満たされる．

- (正) × (正) = (正)
- (正) × (負) = (負)
- (負) × (負) = (正)

また，後述のように，この概念は数の概念を数直線から平面にまで拡張したときのかけ算にも拡張が可能なのである．

A.3　数平面上の足し算とかけ算

ここでは，前節で抽出した足し算とかけ算の本質的な概念を，**図 A.4** に示すような数平面上の数 a と b の足し算とかけ算に適用し，その結果が数平面上のどこになるのかを明かにする．

A.3.1　数平面上の足し算

数平面上の数 a と b の和 $a + b$ を概念通りに解釈すると以下のようになる．

- **平面上の $a + b$ の解釈**
  数平面上で「0」を原点として「a」がある．このとき，この「a」を新たな原点としたら，「b」はもとの数平面上ではどこになるのか？

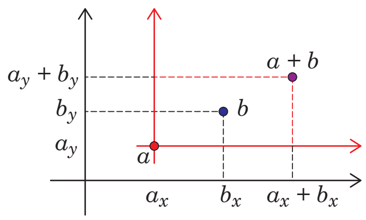


図 A.5 数平面上の数の足し算の概念.

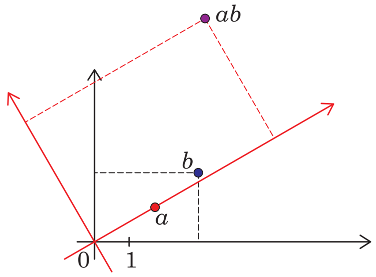


図 A.6 数平面上の数のかけ算の概念.

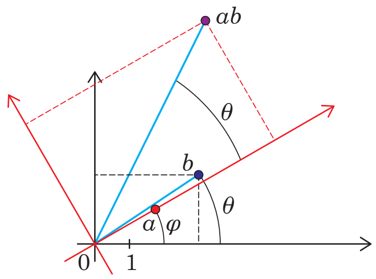


図 A.7 数平面上の数のかけ算の詳細.

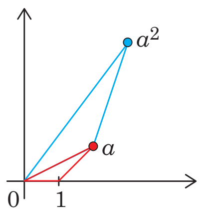


図 A.8 数平面上の数のべき乗.

これを図示すると，**図 A.5** のようになる．a，b の位置を (数直線と平行な成分, 数直線と垂直な成分) という形式を用いて (a_x,a_y)，(b_x,b_y) と表すと，$a+b$ の位置は，(a_x+b_x,a_y+b_y) となっている．従って，以下のように言うことができる．

- **数平面上の数の和の計算結果は，数直線と平行な成分と垂直な成分をそれぞれ個別に和をとった結果を成分とする数となる．**

A.3.2　数平面上の数のかけ算

数平面上の数 a と b の積 ab を概念通りに解釈すると以下のようになる．

- **数平面上の ab の解釈**
  数平面上で「0」から「1」までの距離と方向を基準 (ひと目盛) として「a」と「b」がある．このとき，「0」から「a」までの距離と方向を新たな基準 (新たなひと目盛) とする目盛でみたときの「b」は，もとの目盛ではどこになるのか？

これを図示すると，**図 A.6** のようになる． ここで，a，b の位置を**図 A.7** に示すように，原点からの距離の大きさ (以降，単に大きさという) $|a|,|b|$，原点とその数を結ぶ線分が数直線となす角度 (以降，単に角度という) θ,ϕ を用いて表すと (このような表現方法を極座標形式という)，ab の位置は，大きさが $|a||b|$，角度が $\theta+\phi$ の数となる．従って，以下のように言うことができる．

- **数平面上の数の積の計算結果は，大きさについては積となり，角度については和となる．**

A.3.3　数平面上の数のべき乗

かけ算の概念に従って $aa=a^2$ を考えると，以下のようになる．

- **数平面上の a^2 の解釈**
  数平面上で「0」から「1」までの距離と方向を基準 (ひと目盛) として「a」がある．このとき，「0」から「a」までの距離と方向を新たな基準 (新たなひと目盛) とする目盛でみたときの「a」は，もとの目盛ではどこになるのか？

これを作図すると，**図 A.8** に示すように，$0,1,a$ を頂点とする三角形と相似形の三角形 $0,a,a^2$ が $0,a$ を結ぶ辺の上に積み重なる．一方，a^2 を極座標形式で見れば，以下のように言うことができる．

- **数平面上の数の二乗は，大きさについては二乗となり，角度については二倍となる．**

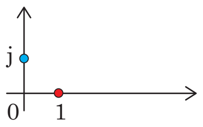


図 A.9 数平面上の垂直方向の基準 j.

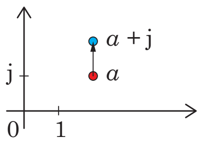


図 A.10 数平面上の数への j の足し算：$a + \mathrm{j}$.

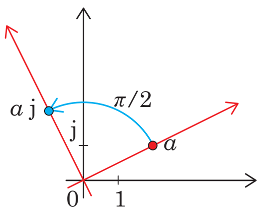


図 A.11 数平面上の数への j のかけ算：$a\mathrm{j}$.

これを一般的な n 乗に拡張すれば，以下のようになる．

- **数平面上の数の n 乗は，大きさについては n 乗となり，角度については n 倍となる．**

A.4　数平面における垂直方向の基準 j

数平面上の数直線方向 (水平方向) の長さと方向の基準は 1 である．これに対し，**図 A.9** に示すような数直線と垂直方向の長さと方向の基準を j とする．これを極座標形式で表せば，大きさが 1，角度が $\pi/2$ (90°) の数である．以下では，この j の性質の一部を紹介する．

A.4.1　j の性質 (1)：足し算

数平面上の数 a と j の和 $a + \mathrm{j}$ は，**図 A.10** からわかるように，a を垂直方向に j だけずらす．

A.4.2　j の性質 (2)：かけ算

数平面上の数 a と j の積 $a\mathrm{j}$ は，極座標形式で表せば，

- 大きさが $|a\mathrm{j}| = |a||\mathrm{j}| = |a|$,
- 角度が $\theta + \pi/2$

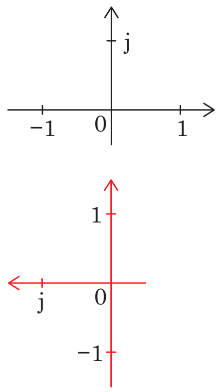


図 A.12 $\mathrm{j} \times \mathrm{j} = -1$.

の数となる．従って，**図 A.11** に示すように，

- **数平面上の数に j をかけ算すると，その数の偏角が $\pi/2$ (90°) 増える (原点まわりに $\pi/2$ (90°) 回転する)**

ということがわかる．この性質が電気回路などの波動を扱う分野において多用される j の性質なのである．

j の性質 (3)：二乗

j^2 は，前の $a\mathrm{j}$ において $a = \mathrm{j}$ とした場合に相当する．従って，j^2 の大きさは 1 となり，その角度は π (180°) となる．これを図示すれば，**図 A.12** に示すようになる．即ち，

$$\mathrm{j}^2 = -1 \tag{A.7}$$

となるのである．なお，この図を従前通りに重ねて描くと，わかりにくくなるので，分離して描いている．

即ち，数直線という井の中の蛙から，数平面に飛び出たことで，これまで数直線上ではあり得なかった**二乗したらマイナスになる**，という数がある，ということがわかったのである．高校では，「二次方程式の解の $\sqrt{\square}$ の中が負になったら，$\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ を使って $\square + \square\mathrm{j}$ のように書く」と突然言われて，それを使いこなす練習を一生懸命したかもしれない．それも一つの学習ではあるが，数直線という井戸の中にいた蛙が平面に飛び出たら，どんな数が考えられるであろう？というところから，こんな面白い数があったんだ，と発見的に考えた方が楽しくはないだろうか．

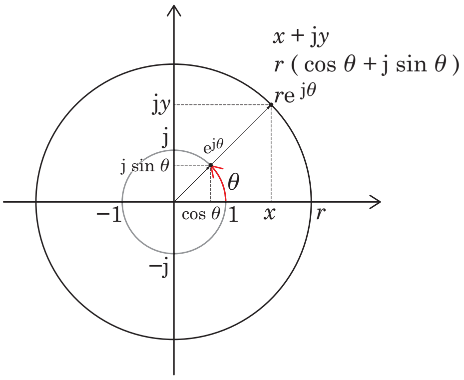


図 A.13 数平面上の $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$．

A.5　数平面上の数の表現方法

数平面上の数の演算が決まったところで，その数の適切な表現方法を検討する必要がある．この表現方法が数直線上の数の計算とごちゃ混ぜにして計算してもつじつまが合う表現方法でないと困る，というのはわかると思う．一つの表現方法は，

$$x+\mathrm{j}y \tag{A.8}$$

である．これによって数平面上の数を一つ特定することができる．また，$\mathrm{j}\times\mathrm{j}=-1$ という性質があるので，j を含んだ計算は，その性質を使えばよい，ということになる．この表現方法による数平面上の数の演算結果が概念通りの位置と対応することは，幾何学やベクトルの概念を使えば証明できるが，ここでは省略する．なお，x の部分を「実数部 (又は実部)」，$\mathrm{j}y$ の部分 (もしくは y だけ) を「虚数部 (又は虚部)」と呼ぶことになっている．ついでに他の数学用語を紹介する．平面上の数のことを「複素数」と呼ぶ．また，数平面のことを「複素平面」と呼ぶ．複素平面の数直線の軸を「実数軸 (又は実軸)」，それと垂直方向の軸を「虚数軸 (または虚軸)」という．

三角関数を知っていれば，極座標形式のパラメータである大きさ r と角度 θ を用いて，次のような表現方法も可能である，と発想するであろう．

$$r(\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta) \tag{A.9}$$

なお，正式な数学用語では，大きさを「絶対値」，角度を「偏角」と呼んでいる．

上記の方法以外にもう一つ大変重要な表現方法がある．それが次式である．

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \quad \text{あるいは} \quad \exp(\mathrm{j}\theta) \tag{A.10}$$

この表現方法は，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta \tag{A.11}$$

という関係式を満たし，**オイラーの公式**と呼ばれている．

多くの教科書では，このようになるということを以下のようにテーラー展開を用いて説明している．即ち，sin と cos が

$$\sin\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}, \tag{A.12}$$

$$\cos\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} \tag{A.13}$$

とテーラー展開されるのに対し，e^x は，

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n \tag{A.14}$$

とテーラー展開される．この e^x のテーラー展開の x に $\mathrm{j}\theta$ を入れれば，オイラーの公式が成立することが示される，というものである．

確かにそうなのだが，大学入学までの間に指数関数と三角関数を全く別々のものとして習ってきた後に，式 (A.11) を見せられたときの人間の姿としては，「何んじゃこりゃ」というのが自然な姿ではないだろうか．

更に，ノーベル賞受賞物理学者の朝永振一郎先生が述べているように [3]，そもそも指数関数のべき数が虚数であるとはどういうことか，という点についてもきちっと理解しておく必要がある．

次節では，多少無理をして式 (A.11) のような関係がもしかしたらあるのではないか，ということが高校生でも発想できるような道筋で作り話をしてみたいと思う．

A.6　オイラーの公式は高校生でも発想可能？

A.6.1　e^x，$\sin x$，$\cos x$ は似たものどうし

オイラーの公式へのきちっとした道のりは，後半で説明することにして，ここでは，高校数学の範囲内でオイラーの公式のような関係があるのではないか，という発想につながるかもしれない説明をしてみる．

指数関数 $u=\mathrm{e}^x$ と三角関数 $v=\cos x$，$w=\sin x$ は，高校において全く別物として習うが，ここでは，それが兄弟のようなものである，ということをまず示す．微積分

を習った段階で，以下の関係があることは既にわかっているはずである．

微分 0 回	u	v	w
微分 1 回	u	$-w$	v
微分 2 回	u	$-v$	$-w$
微分 3 回	u	w	$-v$
微分 4 回	u	v	w

多項式で表されている関数の多くは，何回も微分すると，0 になるのは知っていると思うが，この三つの関数は，何回微分しても 0 にならず，しかも自分自身に戻るのである．こうした共通性は，微分を習ったときに，気づいていると思う[*1]．

微分したときの性質が似ているというのは，どういう意味を持つか考えよう．$y=f(x)$ という関数 f があったときに，その関数の微分係数

$$f'(x),\quad y',\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

というのは，その関数のある点における変化率である．即ち，微分係数は，関数の形を表しているといえる．実際に多くの関数が微分方程式によって定義されている．その挙動が似ているということは，関数自身がお互いに似ている，ということに他ならない．そうすると，なにがしかの演算処理でお互いを「=」で結べる可能性があるのでは？という発想にならないであろうか．

ここで，かなり無理矢理だが，cos の微分が仮想的に $+\sin$ になるとして (本当は $-\sin$ になる)，$v+w$ の挙動をみてみたら[*2]，

微分 0 回	u	v	w	$v+w$
微分 1 回	u	w	v	$v+w$
微分 2 回	u	v	w	$v+w$
微分 3 回	u	w	v	$v+w$
微分 4 回	u	v	w	$v+w$

となる．即ち，指数関数と三角関数の和は，微分に対して全く同じ挙動をすることになる．

しかしながら，cos の微分が $+\sin$ になるなどということは許されないので，上記の話はむちゃくちゃな論法である．正しくは，以下のようになるのである．

微分 0 回	u	v	w	$v+w$
微分 1 回	u	$-w$	v	$v-w$
微分 2 回	u	$-v$	$-w$	$-v-w$
微分 3 回	u	w	$-v$	$-v+w$
微分 4 回	u	v	w	$v+w$

しかし，うまく小細工をすれば，もしかすると，cos の微分が $+\sin$ になる，などというアホなことをしなくても，微分に対する挙動が全く同じになるような sin と cos の組み合わせがあるんやないか？，という発想がこうしたことから生まれてこないだろうか．

ここで，脚注で述べた j のべき乗が 4 回でもとに戻るということを思い出して，j に登場して頂くことにより，凄いことが起こるのである．即ち，$y=v+\mathrm{j}w$ とすると，

微分 0 回	u	v	w	$v+\mathrm{j}w$	y
微分 1 回	u	$-w$	v	$-w+\mathrm{j}v$	$\mathrm{j}y$
微分 2 回	u	$-v$	$-w$	$-v-\mathrm{j}w$	j^2y
微分 3 回	u	w	$-v$	$w-\mathrm{j}v$	j^3y
微分 4 回	u	v	w	$v+\mathrm{j}w$	j^4y

となるのである．この挙動はどこかで見たことがないだろうか．そう，$z=\mathrm{e}^{kx}$ なる関数の微分である．z と y の微分に対する挙動を見比べてみると，以下のようになる．

微分 0 回	z	y
微分 1 回	kz	$\mathrm{j}y$
微分 2 回	k^2z	j^2y
微分 3 回	k^3z	j^3y
微分 4 回	k^4z	j^4y

これを見たら，$k=\mathrm{j}$ としてしまいたくならないであろうか．即ち，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}=\cos x+\mathrm{j}\sin x$$

という等式が成り立ってたりしないかなぁ，という発想にならないだろうか．

ただ，この説明の論理の中には問題点もある．即ち，天から降ってきたかのように $v+\mathrm{j}w$ という組み合わせが与えられてしまっているからである．この組み合わせを何らかの論理的思考に基づいた道筋で見出すためには，やはり，上っ面だけではなく，本質的なところから考察

[*1] 4 回微分したら cos も sin も自分自身に戻るが，実はこの「4 回で戻る」という性質が j と深い関係があるのである．$\mathrm{j}^2=-1$，$\mathrm{j}^3=-\mathrm{j}$，$\mathrm{j}^4=\mathrm{j}$．

[*2] もしも cos と sin が微分に対してお互いに入れ替わるだけであれば，それらの和は微分に対して不変になるはず，という発想です．

する必要があると思われる．次節以降では，多少長くなるが，そのような観点で式 (A.11) に至る道筋を追うことにする．

A.7 e$^{j\theta}$ の定義

オイラーの公式では，e$^{j\theta}$ のように，指数関数の指数 (べき乗のべき数) が実数ではなく虚数になっている．「べき乗って，同じ数を何回も掛けることだったよな」という理解をしていれば，「虚数回掛けるって，何やねん？」と思うのは自然なことである．従って，一足飛びに式 (A.11) に向かうに前に，指数関数の指数を虚数も扱えるように拡張するところから始めなければならないことは理解できるはずである．このような拡張をするためには，平面数の演算法則を決めたときのように，指数関数の本質は何か，更にその前のべき乗の本質は何か，という点を見出さねばならない．

A.7.1 そもそも「べき乗」とは何なのか？

かつて，べき数として正の整数しか扱わなかった幼稚な頃のべき乗のことを思い出すと，$f(x) = a^x$ とは以下のような解釈だった．

- x が正の整数だけのとき
  a^x とは，a を x 回かけ算したものであり，これを a の x 乗と称する．

この概念では，x に虚数を入れると，虚数回かけ算するという意味不明の状態になる．また，実数まで範囲を狭めても，0.5 回かけ算するなどという意味不明の状態になる．そこで，まず，実数全体をべき数として受け入れるための拡張作業を行う．一般には，以下のような論理でべき数として許可できる範囲を実数全体まで広げている．

- x として 0 も許可したいならば ⋯
  指数法則に従うと，$a^x \times a^0 = a^x$ だから，$a^0 = 1$ としよう．
- x として負の整数も許可したいならば ⋯
  指数法則に従うと，$a^{-x} \times a^x = a^0 = 1$ だから，$a^{-x} = 1/a^x$ としよう．
- x として m/n (有理数) も許可したいならば ⋯
  $a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ としよう．
- x として無理数も許可したいならば ⋯
  無理数を無限小数で表したときの収束値としよう．即ち，無理数 x の近似値を有理数 m/n で表し，それをどんどん x に近づけていったときの $a^{m/n}$ の収束点が a^x である，という決め方である．

以上のようなべき乗の拡張解釈によって，数直線上の実数が全てべき数になり得ることになった．しかし，

- x として虚数 (或いは複素数) も許可したいなら ⋯

については，どうしたらよいのであろうか.

数直線上の数の足し算，かけ算を複素数に拡張したときに，足し算とかけ算の根本は何か，ということに目を向けた．べき乗についても，べき乗という操作の本質は何だろうか？というところに目を向けることになる．

A.7.2 べき乗の拡張定義

多少天下り的であるが，べき乗を拡張してきたときに，頻繁に用いていたのが，指数法則である．べき乗の根本的性質は「**指数法則**」と呼ばれている演算法則にあるのではないか，という発想になる．即ち，べき乗というものを関数 $f(x)$ で表したときに，次の関係を満たすということが，対象とする数 x の種類に依存しないべき乗の本質である，とは考えられないだろうか.

$$f(x+y) = f(x)f(y). \tag{A.15}$$

この法則が，実数 x と実数 a (但し，$a \neq 0$) に対して定義された

$$f(x) = a^x \tag{A.16}$$

を包含しているということは，次節で確認する．また，$f(x)$ の特徴であり，もう一つの定義にもなっている

その微分係数が常に自分自身 ($f(x)$) に比例する

という $f(x)$ の根本的性質も式 (A.15) から導かれる．

なお，式 (A.15) に正の整数だけを入れるとわかるのだが，「同じ数を何回もかけ算する」における「何回も」が「$(x+y)$」に対応し，「かけ算する」が $f(x)f(y)$ に対応している．この式を見ても，すぐに見えてこないのが $f(x) = a^x$ としたときの a である．何回もかけ算する「同じ数」(即ち，べき乗の底) が式の中には現れてこない．これは，a がこの式の性質の一つとして隠れてしまっているからである．これについては，他の性質とともに次節で述べる．

A.7.3 $f(x+y)=f(x)f(y)$ のべき乗としての性質

式 (A.15) は，極めて奥の深い関係式であるが，そこに隠れている性質は，ぱっと見ただけではすぐには判らないので，少し探る必要がある．まず，式 (A.15) で定められた $f(x)$ が，従来のべき乗，並びにその実数全体への拡張版と整合していることを確認しておこう．

底

$f(x)=a^x$ というのがもともとのべき乗の定義であった．すると，a が指定されていないのにべき乗になるのか？ということになる．これについては，式 (A.15) において，x 回かけ算した結果である $f(x)$ に対して，もう 1 回だけ同じ数をかけ算するという状況を考えればすぐにわかる．この状況は，$y=1$ に相当するから，

$$f(x+1)=f(x)f(1) \tag{A.17}$$

となり，$f(1)$ が底なのである．即ち，$f(x)=a^x$ と表すならば，

$$f(1)=a \tag{A.18}$$

となる．

正の整数乗

a^x において，x が正の整数の場合には，x は 1 を x 個足したもの，であるから，

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1+1+\cdots) \\ &= f(1)f(1)\cdots \\ &= f(1)^x = a^x \end{aligned} \tag{A.19}$$

となる．

0 乗

もともとのべき乗では，0 を除く如何なる a に対しても，$a^0=1$ であった．式 (A.15) においても $f(0)=1$ となることを示そう．これは，$y=0$ の状況に相当する，即ち，

$$f(x)=f(x+0)=f(x)f(0) \tag{A.20}$$

となり，このような関係を如何なる $f(x)$ に対しても満たすためには，

$$f(0)=1 \tag{A.21}$$

となるのである．

有理数乗

多少トリッキーであるが，1 を $1/n$ を n 個だけ加えたものと見れば，

$$f(1)=f\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)^n \tag{A.22}$$

となる．$f(1)=a$ であるから，

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}} \tag{A.23}$$

となり，n 乗根を表していることになる．次に，$x=m/n$ とすれば，x は $1/n$ を m 個だけ加えたものであるから，

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)^m=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m \tag{A.24}$$

となる．即ち，x を正の整数から有理数にまで拡張した状態を再現できる．

無理数乗

無理数乗については，結局のところ，もともとのべき乗を無理数に拡張したときと同じ論理を使うことになる．即ち，無理数 x の近似値を有理数 m/n で表し，それをどんどん x に近づけていったときの $f(m/n)$ の収束点が $f(x)$ である，という定義の仕方になるのであろう．

以上の準備をすれば，x が実数の場合には，式 (A.15) を満たす関数 $f(x)$ が，式 (A.16) で表される従来の指数関数を表している，ということを受け入れてもらえるのではないかと思う．$f(x)$ が連続的に変化できる x の関数となったので，次は，この関数の特徴を見出すために，その微分係数が如何なるものになるかを考察する．

A.7.4 $f(x+y)=f(x)f(y)$ の特徴抽出

$y=f(x)$ の x が $x+\Delta x$ に変化したときの x の変化分 Δx に対する y の変化分 Δy の比 $\Delta y/\Delta x$ は，x が Δx だけ変化したときの変化率である．$\Delta x \to 0$ の極限における変化率がその関数の微分係数となり，その関数の変化の特徴を表す (即ち，その関数の定義になり得る)．

ここでは，式 (A.15) で定められた $f(x)$ の微分係数の性質から $f(x)$ の特徴を抽出する．適切な微分方程式が得られれば，それがもう一つの $f(x)$ の定義式となる．

まず，x が正の整数だけの場合，即ち，べき乗の場合について考察する．このとき，Δx として取り得る最小値は 1 である．即ち，かけ算の回数を 1 回だけ増やすと

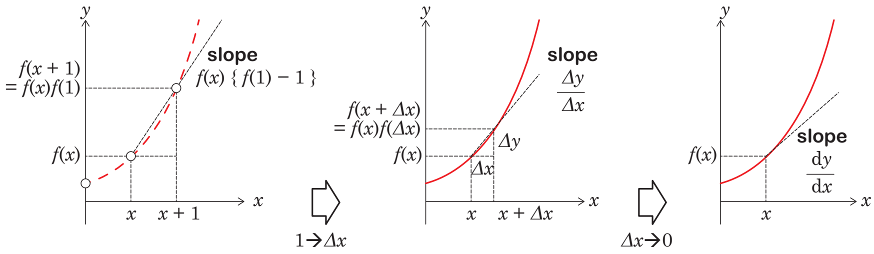


図 **A.14** $f(x)$ の変化率と微分係数.

いう行為に対する y の値の増加分が変化率となる．これを計算すると以下のようになる.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+1)-f(x)}{1}=f(x)\ \{f(1)-1\} \tag{A.25}$$

となる．$f(1)$ は定数であるから，この式は，かけ算の回数を 1 回だけ増やしたときの関数値の変化率が $f(x)$ の値に比例しており，その比例係数が $f(1)-1$ である，ということを意味する．これは，1 以外の数をべき乗の底とする場合，即ち，$a=f(1)=1+r$ と表される場合，何回かかけ算した後にもう一回かけ算したときの増加率が r である，ということを意味する．この性質は利率が r の複利計算と同じであり，指数関数の定義の起源にもなっている.

次に，x として連続的に変化できる実数全体を許容した場合について考察する．この場合，$\Delta x\to 0$ の極限状態，即ち，微分係数が得られる．x における $f(x)$ の微分係数を $f'(x)\ (=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)$ とすると,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{A.26}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{A.27}$$

$$=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x} \tag{A.28}$$

ここで,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x} \tag{A.29}$$

であるが，これは定数なので，それを k とすると,

$$f'(x)=kf(x) \tag{A.30}$$

となる．この式は,

$f(x)$ の変化率が常に $f(x)$ に比例している,

ということを意味しており，$f(x)$ というものがどういう関数なのか，という重要な特徴を表す微分方程式となっている．また，その根源にあるのが，式 (A.26) から式 (A.28) への式変形の過程で使用しているべき乗の本質を表す関係式 (A.15) であることが理解されよう.

なお，多くの物理現象がこのような振る舞いをすることが知られており，そのような現象を記述する微分方程式として式 (A.30) が利用されている．また，$f(0)=1$ であることを示す式 (A.21) と合わせることによって，後で出てくる指数関数 e^{kx} の定義式にもなっているのである．従って，式 (A.30) において，$k=\mathrm{j}$ としたらどうなるかということを見れば，$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ が如何なる関数なのかがわかるはずである．その前の準備として，$k=1$ の場合(即ち，e^x となる場合)について考察しておこう．なぜなら，e がまだ定義されていないからである.

A.8 実数の指数関数 e^x

式 (A.30) において $k=f'(0)=1$ としたものは，微分した関数が微分する前の関数と全く同じになる，という特殊な関数である．$f(x)$ が a^x と表されることから，こうした制限条件が課せられるのは a ぐらいである．従って，この条件を満たす特殊な a が存在すると予測される．それを求めてみよう[*3].

$f'(0)=1$ とは,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1 \tag{A.31}$$

ということであるから，a を求めるために以下のような小細工的な計算をする．即ち,

$$\frac{a(\Delta x)^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1 \tag{A.32}$$

を満たす $a(\Delta x)$ があるとし，この $a(\Delta x)$ が $\Delta x\to 0$ のときに収束する先が a であると考えて，a の姿が如何なる

[*3] それが e なのだが，ここではまだ e を定義していないので，まだ知らんフリをして下さい.

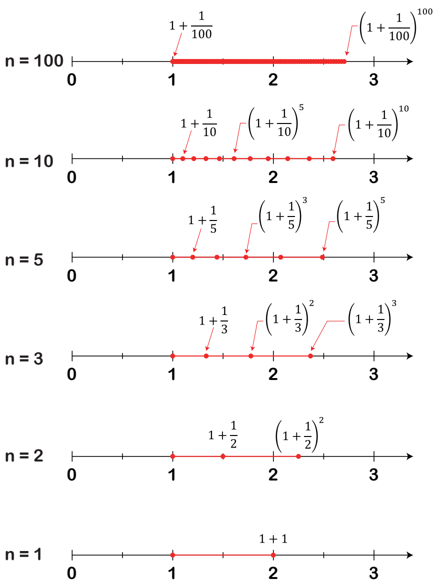


図 **A.15** $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^m$ $(m=0,1,\cdots n)$ を $n=2,3,4,5,10,100$ について計算した結果．n が増加するに従い，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^m$ は実数軸上を e に向かって進み，$n\to\infty$ では，実数軸上の e に収束する．

ものかを調べる．上式を変形すれば，

$$a(\Delta x)=(1+\Delta x)^{1/\Delta x} \tag{A.33}$$

となるから，

$$a=\lim_{\Delta x\to 0}a(\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x)^{1/\Delta x} \tag{A.34}$$

である．ここで，Δx の代わりに $1/n$ と置き換えれば，$\Delta x\to 0$ は，$n\to\infty$ に置き換えることができる．従って，

$$a=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{A.35}$$

となる．上式の右辺は $n\to\infty$ のときに収束することがわかっており，収束先の a を e という特別の記号で表す．即ち，

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718281828\cdots \tag{A.36}$$

これを**ネイピア数**と言う．試しに，n を徐々に大きくしていったときの状況を実数軸上でプロットすると，**図 A.15** のようになる．$n\to\infty$ のときに，e に相当する点に収束している様子がわかる．

以上のことから，指数法則 $f(x+y)=f(x)f(y)$ を満たし，かつ $f'(0)=1$ となる関数を上記のような e を使って，

$$f(x)=\mathrm{e}^x \tag{A.37}$$

と表す，ということになる．これが一般に**指数関数**と呼ばれている関数である．

なお，式 (A.36) において，$1/n$ を x/n に置き換えた

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{A.38}$$

という式において，$n=kx$ となる k を用意すると，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n&=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{kx}\\&=\lim_{k\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right\}^x\\&=\left\{\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right\}^x\\&=\mathrm{e}^x\end{aligned} \tag{A.39}$$

となることから，式 (A.38) も指数関数を表す式であると見ることができる．即ち，e^x の定義式として，

$$\mathrm{e}^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{A.40}$$

も OK，ということになる．

この定義式の導出過程に重要なことが潜んでいることに注意して欲しい．即ち，

- **e の x 乗は，$1+x/n$ を n 回かけ算した数の $n\to\infty$ における極限値である，**

という点である．後述のように，この等価変換によって，e を虚数乗するという意味不明の行為を複素平面上で具体的に検討することができるようになる．

A.9 虚数の指数関数 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$

ここから，オイラーの公式にある e の虚数乗とも言うべきものを考える．同じ数を何回もかけ算するというべき乗の概念では，べき数に虚数を許容することは意味不明な行為であるが，べき乗の概念を拡張した式 (A.15)，式 (A.30)，式 (A.40) は，x として虚数を許可してはいけない，という制約は無い．そこで，まず，純虚数を導入し易い式 (A.30) で示した微分方程式による定義を用いることにする．即ち，

$$f'(x)=kf(x),\quad f(0)=1 \tag{A.41}$$

である．この微分方程式の解は，

$$f(x)=\mathrm{e}^{kx} \tag{A.42}$$

となる．従って，x として虚数を許可する代わりに，式 (A.41) において，単純に k を j という虚数単位に入れ替えて，

$$g'(\theta) = \mathrm{j}g(\theta), \quad g(0) = 1 \tag{A.43}$$

という微分方程式を解いたときに得られる $g(\theta)$ が $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ と表されるべき関数となる．

A.9.1　オイラーの公式の確認

ここでは，まず，オイラーの公式の右辺が微分方程式 (A.43) を満たしているかどうかを確認しよう．即ち，

$$g(\theta) = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta \tag{A.44}$$

なる関数がどこからともなく与えられたとする．上式を式 (A.43) に代入すれば，

$$g'(\theta) = -\sin\theta + \mathrm{j}\cos\theta = \mathrm{j}g(\theta) \tag{A.45}$$

となる．確かに式 (A.43) の微分方程式において $k = \mathrm{j}$ としたものになっている．また，$g(0)$ を求めると，

$$g(0) = \cos 0 + \mathrm{j}\sin 0 = 1 \tag{A.46}$$

となっており，式 (A.43) の条件も満たしている．従って，この $g(\theta)$ という関数は，$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ と表されるべき性質を持っていることになる．即ち，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta \tag{A.47}$$

という等式が成り立つ．

なぜ，そんな右辺を考えついたのか，という発想の根源はともかくとして，このオイラーの公式は，**図 A.16** に示すように，$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ なる数が，複素平面上で，原点から距離 1 だけ離れており，実数軸から角度 θ ラジアンだけ回転したところに位置する，という標記になっている．$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ が複素平面上のこのような数である，ということは，

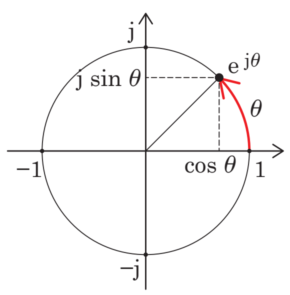


図 **A.16** 複素平面上の $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$．

これまでに見てきたどの定義式を見ても，ぱっとは判らないのに対し，極めて明快な式であることは誰もが認めるであろう．

しかし，指数関数の指数が虚数になることによって，なぜ「回転」や「円運動」に関係する cos や sin が出現するのか，という疑問に対する答えはこの確認作業からは見いだせない．その答えは，指数関数を「同じ数を何回もかけ算する」と解釈している限り恐らく判らない．既に述べた指数関数の本質的特徴に目を向ける必要がある．

A.9.2　なぜ cos，sin が出てくるのか (1)

ここでは，

- **指数関数の変化率は自分自身に比例する．**

という特徴に目を向けて，式 (A.41) と式 (A.43) が意味するところを再考する．両者ともに共通なのは，初期値が 1 であることと，その変化率が自分自身に比例していることである．異なる点は，その比例係数 k が 1 なのか，j なのか，という点だけである．微分方程式というのは，x や θ という独立変数の変化に対して $f(x)$ や $g(\theta)$ の値が如何なる変化をするのか，ということを表す方程式である．従って，この違いが関数値の動きに現れることになるはずである，その「動き」を見てみよう．

動きを表すときには，独立変数として時間 t をとると物理的な描像を描き易い．そこで，方程式を以下のように書こう．

$$f'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = 1f(t), \quad f(0) = 1 \tag{A.48}$$

$$g'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t) = \mathrm{j}g(t), \quad g(0) = 1 \tag{A.49}$$

このようにすると，$f'(t)$ や $g'(t)$ は $f(t)$ や $g(t)$ が表す点が数直線上や複素平面上を動くときの速度という物理的な意味を持つことになる．すると，以下のような描像を描くことができる．

- $k = 1$ の場合:
  速度として与えられる方向が常に実数軸方向である．従って，$f(t)$ で表される点は，**図 A.17** に示すように，$f(0) = 1$ を出発点として，実数軸上を速度 $f'(t) = f(t)$ で移動する．
- $k = \mathrm{j}$ の場合:
  速度として与えられる方向が実数軸方向ではなく，

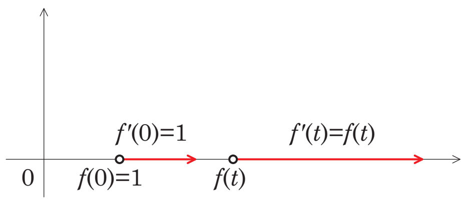


図 **A.17** $f'(t) = 1f(t)$ で表される点の挙動.

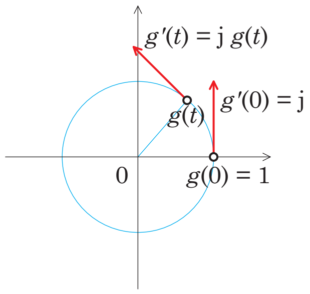


図 **A.18** $g'(t) = \mathrm{j}g(t)$ で表される点の挙動.

j と $g(t)$ のかけ算によって決まる方向，即ち，常に 0 から $g(t)$ に向かう線分と直角の方向になる．その大きさ $|g'(t)|$ は j をかけ算しても変わらず 1 である．物理を多少学んだ者であれば，これが，**図 A.18** に示すように，0 を中心とする半径 1 の円周上を接線方向に速度 1 で等速運動する円運動に他ならない，ということがわかるであろう．接線方向の速度が 1 であるから，時刻 t までの間に動いた軌跡 (円弧) の長さは，t ラジアンとなる．従って，$g(t)$ の実部は $\cos t$ と表され，虚部は $\sin t$ と表されることになるのである．

A.9.3 なぜ cos，sin が出てくるのか (2)

前節では，k という係数が 1 か j かによって，微分方程式で規定される関数が実数軸上を動くのか，複素平面上を回転するのか，が決まっていることを述べた．ここでは，k そのものについて考察する．というのは，$k=1$ から $f(t) = \mathrm{e}^t = \left(\mathrm{e}^1\right)^t$ の底に相当する e^1 が定義されたのに対して，$k=\mathrm{j}$ から $g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}t} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}}\right)^t$ の底に相当する e^{j} が定義されることになるからである．

$k = f'(0)$ は，指数法則を満たす $f(t)$ の微分係数を計算する過程において現れており，$k=1$ とは，

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\Delta t) - 1}{\Delta t} = 1 \tag{A.50}$$

ということであった．$f(t) = a^t$ と表されるとしたときに，上式を満たす a が

$$a = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{A.51}$$

となり，この a を $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$ と定めたのである．また，$\mathrm{e}^t = \left(\mathrm{e}^1\right)^t$ は，上式の $1/n$ を t/n にすることで定義されることを確認した．即ち，

$$\mathrm{e}^t = \lim_{n\to 0} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \tag{A.52}$$

によって e^t を定義した．これにより，

- **e の t 乗は，$1 + t/n$ を n 回かけ算した数の $n \to \infty$ における極限値である，**

ということを導いた．

以下では，この拡張可能な指数関数の概念に基づいて，指数が虚数の場合について考察する．$k=\mathrm{j}$ にした場合には，

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(\Delta t) - 1}{\Delta t} = \mathrm{j} \tag{A.53}$$

ということを意味する．ここで $g(t) = b^t$ と表されるとすると，上式を満たす b は，

$$b = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\mathrm{j}}{n}\right)^n \tag{A.54}$$

となる．この b は，e^{j} と表されるべきものであり，$\mathrm{e}^{\mathrm{j}t} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}}\right)^t$ の底になる数である．これが如何なる数であるかを原理に基づいて求めてみよう．

図 A.19 は，

$$\left(1 + \frac{\mathrm{j}}{n}\right)^m, \quad m = 0, 1, \cdots n \tag{A.55}$$

を，$n = 2, 3, 5, 10, 100$ について計算した結果である．

- $n=1$ の場合は，$1+\mathrm{j}$ となる．即ち，実数軸の 1 から虚数軸方向に (= 垂直に) 1 だけ立ち上がった位置となる．
- $n=2$ の場合は，$1+\mathrm{j}$ の虚数部が 1/2 に縮小したものがべき乗の底となる．その 1 乗は，そのものである．その 2 乗は，複素数のかけ算の原理から，$0, 1, 1+\mathrm{j}/2$ を結んだ直角三角形の斜辺の上に相似形の直角三角形を積んだときの頂点の位置になる．
- $n=3$ の場合は，$1+\mathrm{j}$ の虚数部が更に 1/3 に縮小したものがべき乗の底となって，3 乗まで計算することになる．即ち，相似形の直角三角形を 3 回積み上げるたときの頂点の位置になる．

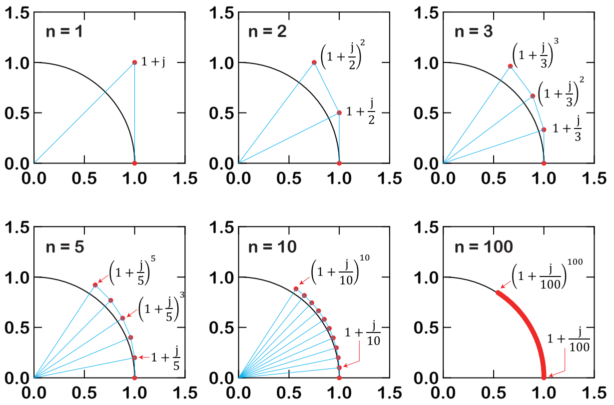


図 A.19 $\left(1+\dfrac{j}{n}\right)^m$ $(m=0,1,\cdots n)$ を $n=2,3,5,10,100$ について計算した結果．n が増加するに従い，$\left(1+\dfrac{j}{n}\right)^m$ は半径 1 の円周上に位置するようになる．$n\to\infty$ では，原点から距離 1 だけ離れ，実数軸から偏角 1 ラジアン回転した位置に収束する．

- $n=4$ の場合は，$\cdots$
- $n=5$ の場合は，$\cdots$

と計算を実施してゆくと，$n\to\infty$ のときに，以下の状況に収束して行くことがわかる．

- 大きさ
  1 に足される数がどんどん小さくなるため，大きさは 1 に近づく
- 偏角
  直角三角形を積み上げるときに，必ず一つ下の斜辺の上に次の直角三角形の底辺が乗ることになる．従って，べき乗を繰り返すごとに，複素平面上の点は，前の斜辺に対して直角方向に移動する．その移動距離は $1/n$ であり，その方向は，半径 1 の円の接線方向に近づく．接線方向への $1/n$ のずれを n 回繰り返すという動きは，n が大きくなれば，実数軸上の 1 から開始して，半径 1 の円周を 1 ラジアンだけ移動した位置に移動する，という動きに近づくことになる．

この結果から，指数が虚数になることによって円運動が関係してくることがわかる．また，その根本的な起源は，先述の微分方程式の場合と同様に，かけ算すると常に原点からその点を結ぶ線分に対して直角方向に動く，ということなのである．

以上の考察を基にすれば，e^{jt} が複素平面上の如何なる数であるかもわかる．即ち，

$$e^{jt}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{jt}{n}\right)^n \tag{A.56}$$

であるから，回転する角度が 1 ラジアンではなく t ラジアンとなる．従って，その実部は $\cos t$ となり，その虚部は $\sin t$ と表されることになるのである．

A.9.4 e^x の更なる拡張

式 (A.40) を二項展開すると，最終的には，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \tag{A.57}$$

という式が得られる．

e^x がこのように表されてしまうということが何を意味するのか，については私もまだ知らないが，この式は，四則演算のみで計算可能であるため，計算機で e^x を計算するときに都合がよく，実際に利用されている．また，オイラーの公式を有無を言わせず証明するための道具としても良く使われている．

また，e^x という関数が式 (A.57) のようにべき級数展開で表されることによって，以下のように e^x を更に新たな領域に拡張することが可能である．

- x に行列を入れる
- x に演算子を入れる

以上のように，物事の上っ面だけではなく，根本的な点を明かにすれば，様々な展開が拓けるということがわかると思う．これは，あらゆることに共通することであると思う．

追記

こうして $e^{j\theta}$ なるものを再考すると，円運動や振動を記述するための cos や sin という概念は，$e^{j\theta}$ の概念に付随するもの，と見えてしまう．そもそも，cos と sin という関数は，どちらか片方でもう片方を表すことができるのであるから，「どちらか片方でよいではないか」，あるいは「これら二つの関数の挙動を支配しているもっと上位の関数があるはずだ」と考えてもおかしくは無いであろう．それが $e^{j\theta}$ である，と見ることができないだろうか．もしも，cos や sin という概念が見出されるよりも先に平面数の概念が確立されて $e^{j\theta}$ の概念が見出されて

いたら，cos や sin などという関数はこの世に現れることなく，$e^{j\theta}$ の実部や虚部を表す，reexp θ や，imexp θ などという関数が使われることになっていたかもしれないと想像されるが，いかがだろうか.

謝辞

上記の考え方や，後述のべき乗の拡張概念，複利の概念を用いたオイラーの公式の説明などは私のオリジナルではなく，中学生の頃に「甲斐さんとこ」で教わったものである．こうした斬新な教育をされた甲斐 喬先生に敬意を表すとともに，深く感謝したい.

参考文献

[1] 遠山啓：数学入門 (上) (1959, 岩波書店).

[2] 遠山啓：数学入門 (下) (1960, 岩波書店).

[3] 朝永振一郎：科学者の自由な楽園 (2000, 岩波書店).

[4] 示野信一：複素数とはなにか (2012, 講談社).