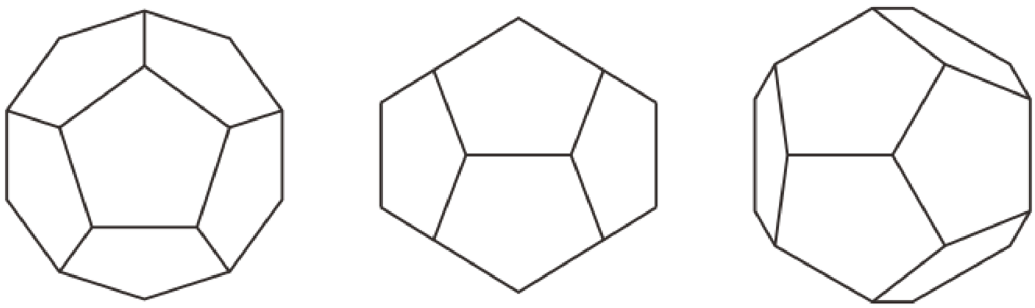
正十二面体の正多角形断面

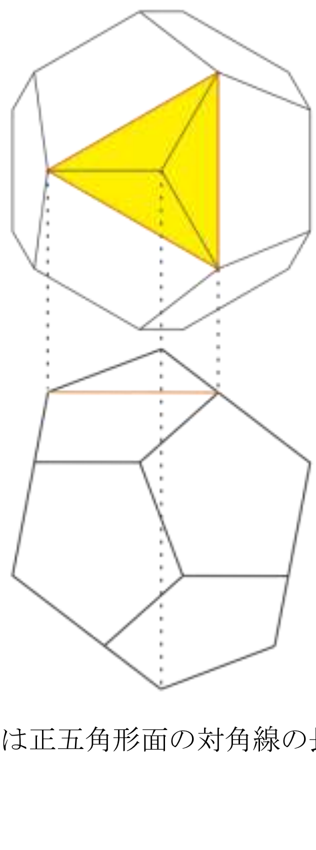
中川宏

正十二面体の投影図としては次の３つがよく知られている。左から、面心図、辺心図，点心図と呼ばれている。



これらの投影図を元に、正十二面体の断面が正多角形になる場合を考えてみたい。

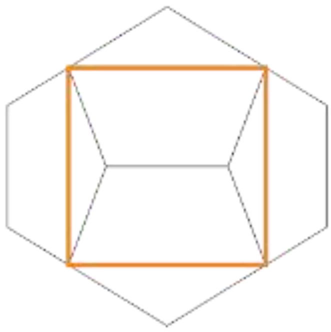
◆正三角形断面

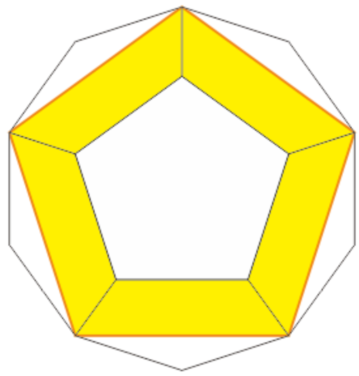


正十二面体の各頂点周りを最大の対角軸に直交する平面で切断することによって正三角形の断面ができる。正十二面体の一辺の長さを１とするとき、断面の正三角形の一辺の最大は正五角形面の対角線の長さ・黄金比 τ である。切断される正三角錐の最大体積は、$\frac{\tau}{12}$

◆正方形断面

一つの辺に最も近い４頂点を含む平面で正十二面体を切断すると正方形断面ができる。その一辺の長さは対角線の長さ τ である。切断される屋根形の断片の体積は、$\dfrac{2+3\tau}{12}$





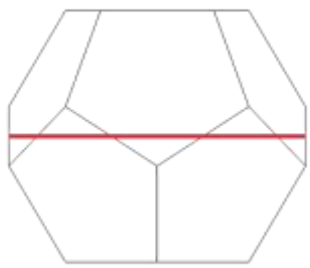
◆正五角形断面

正十二面体を正五角形面に平行な平面で切断すると、正五角形断面ができる。断面の正五角形の一辺の長さは１より大きく τ 以下である。切断される正五角錐台の最大体積は、正十二面体の体積の３分の１の、$\dfrac{4+7\tau}{6}$

◆正十角形断面

同じく正五角形面に平行な平面で正十二面体を２等分すると正十角形断面ができる。

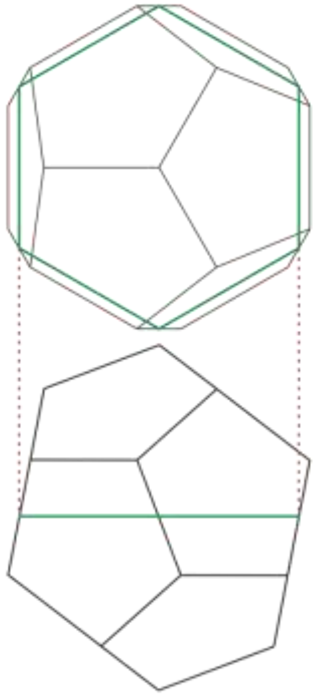
正十角形の一辺の長さは、$\dfrac{\tau}{2}$



◆正六角形断面（大）

正十二面体の最長の対角軸に垂直な平面で２等分すると、
正六角形断面ができる。

正六角形の一辺の長さは、$\dfrac{1+\tau}{2}$

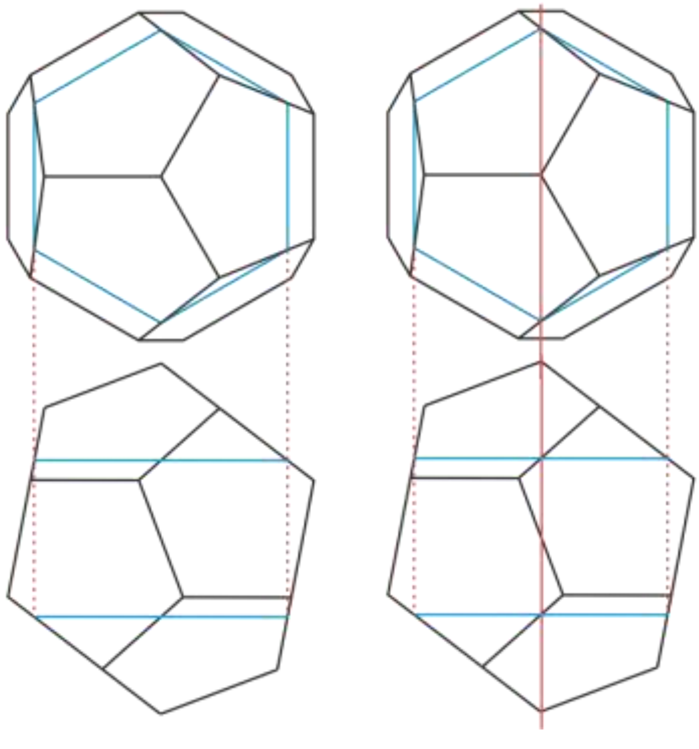


◆正六角形断面（小）

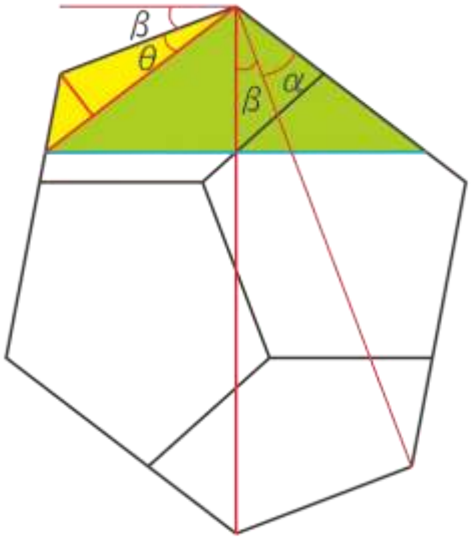
同じく正十二面体の最長の対角軸に垂直な平面で、
右図の位置で切断すると、少し小さな正六角形断面
ができる。

正六角形の一辺の長さは、$\dfrac{1+3\tau}{5}$

この小さな正六角形の作図は、
これまでのように、投影図上の頂
点や辺の中点だけを使って描くこ
とはできないが、右図のように赤
い実線を書き加えると、赤線と辺
が交わる点を元に描くことができ
る。



このときに正六角形断面（小）によって切り離される部分の体積を求める。
それは正六角錐の緑色の部分 V_6 と、三角錐の黄色の部分 V_3 3 つ分からなる。



正六角形の一辺の長さは、$\dfrac{1+3\tau}{5}$

正六角錐の高さは、$\dfrac{\sqrt{3}}{5}(-1+2\tau)$

から、$V_6 = \dfrac{3(4+7\tau)}{50}$

三角錐の高さは $\sin\theta$ だが、

$\theta = \dfrac{\pi}{2} - (\alpha + 2\beta)$、$\tan\alpha = \dfrac{1}{\tau}$　$\tan\beta = \dfrac{1}{\tau^2}$ であるから、

三角関数の公式を駆使して、$sin\,\theta = \dfrac{1}{3\sqrt{3-\tau}}$ とわかる。

これから、V_3 を計算して、

$V_6 + 3V_3 = \dfrac{29+52\tau}{100}$ と求まる。

正十二面体の体積 $V_{12} = \dfrac{4+7\tau}{2}$ との比は、

$\dfrac{9-\tau}{50}$ となった。