線形代数 I (担当 松下勝義)

III. 行列の演算

教科書 §3.1-3.2, pp.29–32

講義ノート

ここまで行列と連立一次方程式の対応関係についてみてきた．じつはこれまで話した行基本変形を係数行列へ行う手続きは行列の演算としてかける．例えば 2 行 2 列行列

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{161}$$

の二行目 k 倍を一行目に足すことを考えよう．このとき

$$\hat{A} \overset{①+k②}{\Rightarrow} \hat{A} + (k-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{162}$$

というような行列の足し算や,

$$\hat{A} \overset{①+k②}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{A} \tag{163}$$

のように行列のかけ算で書ける．この行列の足し算や掛け算は連立一次方程式と行列の関係を崩さず定義される．この行列の足し算や掛け算をどう定義すればよいか, それと行基本変形がこれらの演算でどう書けるかをこれから説明する．特にこの行基本変形の掛け算は後で学ぶ行列の逆行列を定義するのに重要な役割を果たす．これ以降も簡単のため 2 行 2 列の行列に絞って話す．

- 行列の和連立一次方程式

$$\hat{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{164}$$

は

$$\hat{B}\boldsymbol{x} + \hat{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{165}$$

とあらゆる $\boldsymbol{b}$ に対して同じになる,　という意味で

$$\hat{A} = \hat{B} + \hat{C} \tag{166}$$

という和が定義できる．この和は成分で書くと

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} && (167) \\
&= \begin{pmatrix} b_{11}x + b_{12}y \\ b_{21}x + b_{22}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11}x + c_{12}y \\ c_{21}x + c_{22}y \end{pmatrix} && (168) \\
&= \begin{pmatrix} b_{11}x + c_{11}y + b_{12}x + c_{12}y \\ b_{21}x + c_{21}y + b_{22}x + c_{22}y \end{pmatrix} && (169) \\
&= \begin{pmatrix} (b_{11} + c_{11})x + (b_{12} + c_{12})y \\ (b_{21} + c_{21})x + (b_{22} + c_{22})y \end{pmatrix} && (170) \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} && (171)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} \tag{172}
$$

とすれば成立する． つまり, 成分毎の和を計算すればよい．また, この計算から行列の和は行と列の数が一致している場合のみ可能であることが分かる．

行列の和

m 行 n 列行列 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ に対して, それぞれの i 行 j 列成分を a_{ij}, b_{ij} とすると $\hat{A} + \hat{B}$ の i 行 j 列成分は $a_{ij} + b_{ij}$ となる．つまり,

$$
\hat{A} + \hat{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \tag{173}
$$

例えばもし行列

$$
\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{174}
$$

を考えたときに

$$
\hat{A} = \hat{B} + \hat{C} \tag{175}
$$

$$
\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{176}
$$

のときは,

$$\hat{B}+\hat{C}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1 & 1+1\\ 1+1 & 1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\hat{A} \tag{177}$$

である.

- 行列の積

$$\hat{A}=\hat{D}\hat{E} \tag{178}$$

としたとき, 連立一次方程式では

$$\hat{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{179}$$

と

$$\hat{D}(\hat{E}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b} \tag{180}$$

があらゆる $\boldsymbol{b}$ に対して同じである. そのためには,

$$\begin{aligned}
\hat{D}\hat{E}\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}e_{11} & e_{12}\\ e_{21} & e_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) & (181)\\
&= \begin{pmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{11}x+e_{12}y\\ e_{21}x+e_{22}y\end{pmatrix} & (182)\\
&= \begin{pmatrix}d_{11}(e_{11}x+e_{12}y)+d_{12}(e_{21}x+e_{22}y)\\ d_{21}(e_{11}x+e_{12}y)+d_{22}(e_{21}x+e_{22}y)\end{pmatrix} & (183)\\
&= \begin{pmatrix}(d_{11}e_{11}+d_{12}e_{21})x+(d_{11}e_{12}+d_{12}e_{22})\\ (d_{21}e_{11}+d_{22}e_{21})x+(d_{21}e_{12}+d_{22}e_{22})\end{pmatrix} & (184)\\
&= \begin{pmatrix}d_{11}e_{11}+d_{12}e_{21} & d_{11}e_{12}+d_{12}e_{22}\\ d_{21}e_{11}+d_{22}e_{21} & d_{21}e_{12}+d_{22}e_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} & (185)
\end{aligned}$$

であるので, 次のように行列の積を定義する.

$$\hat{D}\hat{E} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \tag{186}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21} & d_{11}e_{12} + d_{12}e_{22} \\ d_{21}e_{11} + d_{22}e_{21} & d_{21}e_{12} + d_{22}e_{22} \end{pmatrix} \tag{187}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} d_{11}e_{11} + d_{12}e_{21} \\ d_{21}e_{11} + d_{22}e_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11}e_{12} + d_{12}e_{22} \\ d_{21}e_{12} + d_{22}e_{22} \end{pmatrix} \right) \tag{188}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} \right) \tag{189}$$

$$= \left(\hat{D} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} \quad \hat{D} \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} \right) \tag{190}$$

行列の積

m 行 n 列行列 $\hat{D}$ と n 行 l 列行列 $\hat{E}$ を考えたとき, その積 $\hat{D}\hat{E}$ の l 列成分は $\hat{E}$ の j 列ベクトルを $\boldsymbol{e}_j$ として $\hat{D}\boldsymbol{e}_j$ となる. すなわち,

$$\hat{A}\hat{B} = \left(\hat{D}\boldsymbol{e}_1 \quad \hat{D}\boldsymbol{e}_2 \ldots \quad \hat{D}\boldsymbol{e}_l \right). \tag{191}$$

次の例を考えよう

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{192}$$

とすると

$$\hat{D}\hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{193}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \tag{194}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 2 + 0 \times 0 \\ 2 \times 1 + 1 \times 0 & 2 \times 2 + 0 \times 0 \end{pmatrix} \tag{195}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{196}$$

注意！

$$\hat{E}\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 0 + 2 \times 1 \\ 0 \times 2 + 0 \times 2 & 0 \times 0 + 0 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A \tag{197}$$

従って

$$\hat{D}\hat{E} \neq \hat{E}\hat{D} \tag{198}$$

である. 一般に行列の積は可換

$$\hat{D}\hat{E} = \hat{E}\hat{D} \tag{199}$$

ではない.

また行列の積にも定数の積の 1 に対応するものが存在して単位行列と呼ぶ. 2 行 2 列の行列の場合は

$$\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{200}$$

実際

$$\hat{I}_2\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+0\times2 & 1\times2+0\times4 \\ 0\times2+1\times2 & 0\times2+1\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{201}$$

かつ

$$\hat{A}\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+2\times2 & 1\times0+2\times1 \\ 2\times0+4\times1 & 2\times0+4\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \hat{A} \tag{202}$$

となり左から掛けても右から掛けても元の行列 $\hat{A}$ になる.

- スカラー倍行列の定数 k 倍を

$$k\hat{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} \tag{203}$$

とする例えば $k = 2$ とすると

$$2\hat{A} = \begin{pmatrix} 2\times1 & 2\times2 \\ 2\times2 & 2\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \tag{204}$$

この定義は和と無矛盾である. 例えば,

$$2\hat{A} = \hat{A} + \hat{A} \tag{205}$$

が期待されるが, 実際成分で計算すると,

$$\hat{A} + \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{11} & a_{12}+a_{12} \\ a_{21}+a_{21} & a_{22}+a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} \\ 2a_{21} & 2a_{22} \end{pmatrix} = 2\hat{A} \tag{206}$$

と成立している.