行列式と図形

教科書第 3 章 2.3, 2.4

FPC クラス

線形代数 B

♣ 平面上で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = {}^t(a_1, a_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = {}^t(b_1, b_2)$ とするとき，

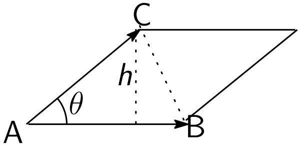
(1) AB, AC を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積 S は，

行列式の絶対値 $\left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right|$ に等しい。

(2) △A B C の面積は，$\dfrac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right|$ に等しい。

理由： (1) AB と AC のなす角を θ とすると，

$$
\begin{aligned}
S &= \mathrm{AB} \cdot h = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \cdot \sin\theta \\
&= \sqrt{\mathrm{AB}^2\mathrm{AC}^2 - (\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \cdot \cos\theta)^2} \\
&= \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2} \\
&= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} \\
&= \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} = |a_1 b_2 - a_2 b_1| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right|
\end{aligned}
$$



(2) は (1) の面積の半分であるから明らかである。

[問 1] (1) 点 A$(2,1)$，B$(4,6)$，C$(5,5)$ に対して，
AB，AC を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ。

(答え) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{5} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} \boxed{3} \\ \boxed{4} \end{pmatrix}$

よって，$S = \left| \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \right| = \left| \boxed{-7} \right| = \boxed{7}$

(2) 頂点 A$(1,0)$，B$(6,6)$，C$(3,4)$ の三角形の面積 T を求めよ。

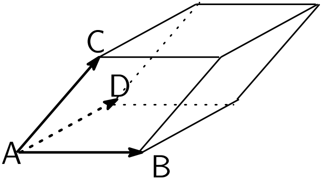
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

よって，$T = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}(20 - 12) = 4$

♣ $\overrightarrow{AB} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{AC} = {}^t(b_1, b_2, b_3)$, $\overrightarrow{AD} = {}^t(c_1, c_2, c_3)$ のとき，

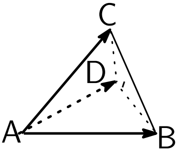
(1) AB，AC，AD が隣り合う 3 辺の平行六面体の体積 V は，

$$\left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|$$ に等しい。



(2) 四面体 ABCD の体積は，

$$\frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|$$ に等しい。



理由：(1) $V = \left| \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD} \right|$ ($\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ は外積) より，
右辺を成分で表示して得られる。（教科書 110〜113 ページ参照）

(2) この四面体は，平行六面体と同じ高さで底面が半分の角錐より，
体積は $\left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) V = \frac{1}{6} V$ となり，(1) から得られる。

[問 2] (1) A(1, 1, 0), B(2, 3, 1), C(1, 2, −3), D(4, 0, 1) のとき,
AB，AC，AD を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積 V を求めよ。

(答え) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = {}^t\left(\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{1}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = {}^t\left(\boxed{0}, \boxed{1}, \boxed{-3}\right)$,
$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = {}^t\left(\boxed{3}, \boxed{-1}, \boxed{1}\right)$

$$V = \left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -7 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}\right| = 23$$

(2) A(2, 1, 3)，B(5, 3, 6)，C(0, 1, 4)，D(−1, 2, 3) を頂点とする
四面体の体積 W を求めよ。

(答え) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = {}^t(3, 2, 3)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = {}^t(-2, 0, 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = {}^t(-3, 1, 0)$

$$W = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|-\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{5}{2}$$

空間ベクトル $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ は，始点を同じにしたとき，同一平面上にないならば 線形独立，同一平面上にあるならば線形従属であるという。（第 1 章 §2 参照）　それは，行列式で次のように判定できる。

命題. $\vec{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b} = {}^t(b_1, b_2, b_3)$，$\vec{c} = {}^t(c_1, c_2, c_3)$ が線形独立であるための条件は，行列 $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ が正則であることである。

すなわち，$|\vec{a}\quad \vec{b}\quad \vec{c}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$

説明： 線形独立である，すなわち同一平面上にはない条件は，

「$k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c} = \vec{0} \Longleftrightarrow k = l = m = 0$」（教科書第 1 章 2.7)

この式を成分表示すると，k, l, m を変数とする，右辺がすべて 0 の連立同次 1 次方程式が得られる。

線形独立である条件は，それが自明な解 $k = l = m = 0$ しかもたないことであり，クラメルの公式から，$|\overrightarrow{\mathbf{a}}\quad \overrightarrow{\mathbf{b}}\quad \overrightarrow{\mathbf{c}}| \neq 0$ が成り立つことである。

よって，命題が成り立つ。

[問 3] 次のベクトル $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ は線形独立であるか線形従属であるかを判定せよ。

(1) $\overrightarrow{\mathbf{a}} = {}^t(1,-1,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} = {}^t(3,-1,2)$, $\overrightarrow{\mathbf{c}} = {}^t(1,2,5)$

（答え） $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

よって，線形独立である。

(2) $\overrightarrow{\mathbf{a}} = (1,4,3)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} = (1,2,5)$, $\overrightarrow{\mathbf{c}} = (1,8,-1)$

（答え） $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

よって，線形従属である。