MiniSat入門

http://www.kl.i.is.nagoya-u.ac.jp/person/yasuhiro/minisat/

充足可能性問題(SAT)

- 命題論理式が充足可能かどうかを判定
  - NP完全問題

- 変数n個⇒2^n回の試行で充分
  - 変数1個 ⇒ 2回
  - 変数10個 ⇒ 2^{10}=1024回
  - 変数100個 ⇒ 2^{100}回

=1267650600228229401496703205376回

10G/sでも約 4×10^{12}年

（宇宙の年齢約 1.37×10^{10}年）

SAT Solver

- 充足可能問題を解くプログラム
  - MiniSat
    - Open Source で開発
    - 入力: DIMACS 標準フォーマット
    - 出力: 与式を真にする変数割当

DIMACS 標準フォーマット

- CNFを数字で表現

$$(P1 \vee P2) \wedge (\neg P1 \vee P2) \wedge (\neg P1 \vee \neg P2)$$

```
p cnf 2 3
1 2 0
-1 2 0
-1 -2 0
```

sample.dimacs として保存

MiniSat の使用法

- 使用方法

```
> minisat sample.dimacs output
```

- 出力結果

```
> cat output
SAT
-1 2 0
```

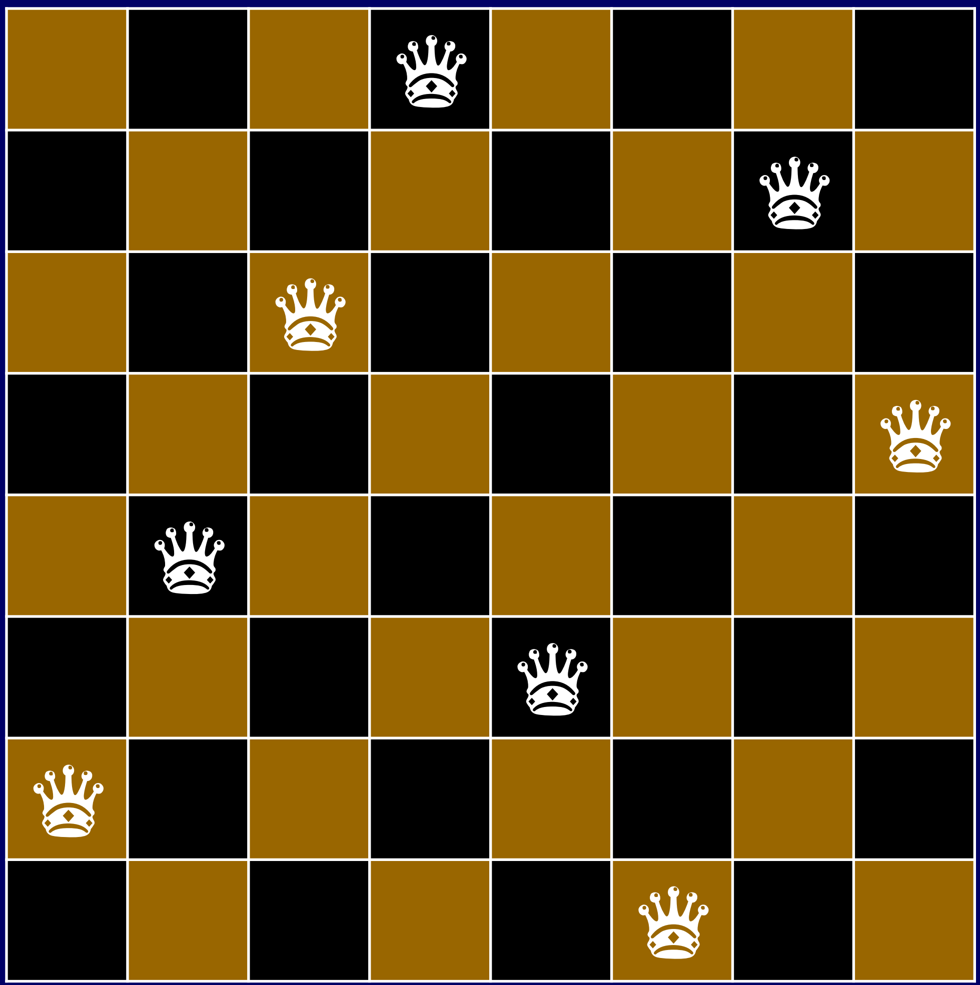
(P1∨P2)∧(¬P1∨P2)∧(¬P1∨¬P2)は
充足可能であり、真にする変数割当(のひとつ)は
P1 が偽、P2が真

SAT Solverで解ける問題

- ８クイーン問題
- 数独
- グラフ彩色問題
- 魔方陣
- お絵かきロジック

⋮

８クイーン問題



- ８個のクイーンを配置
- 盤面は８×８
- どの駒も他の駒に
  取られない
- クイーンは上下左右斜め８方向に遮る物がない限り移動可能
- 将棋における
  飛車＋角行
- 基本解は12個

数独（Sudoku）

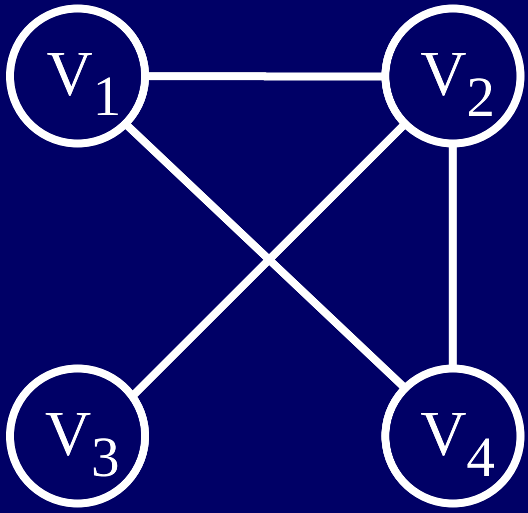
1								3
	9			5			4	
		8			7	9		
			3		1	2		
	6						1	
		9	4		8			
		1	6			8		
	4			9			6	
2								1

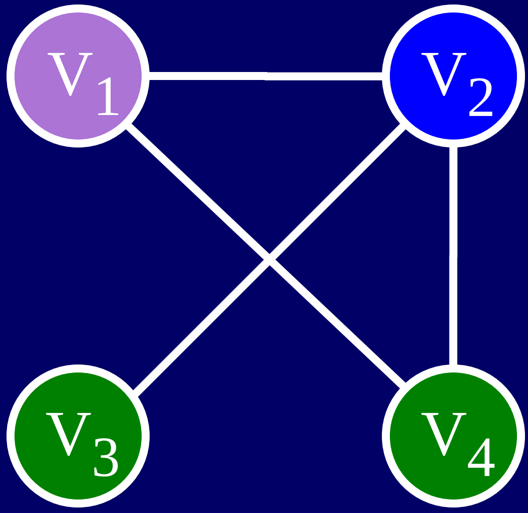
- 各マスに1～９の数字
- 縦・横の各列および太線で囲まれた3×3のブロックに、同じ数字が複数入ることはない

グラフ彩色問題

- 与えられた無向グラフのすべての頂点を、指定されたK色を使って、どの隣合う頂点も互いに異なる色に色付けする問題

３色で彩色



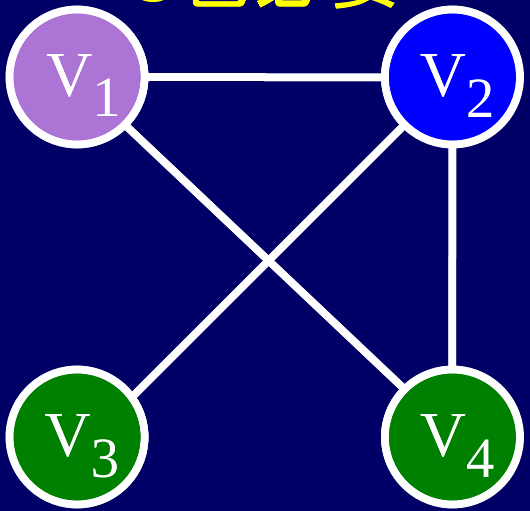


２色では彩色不可能

必要な色数

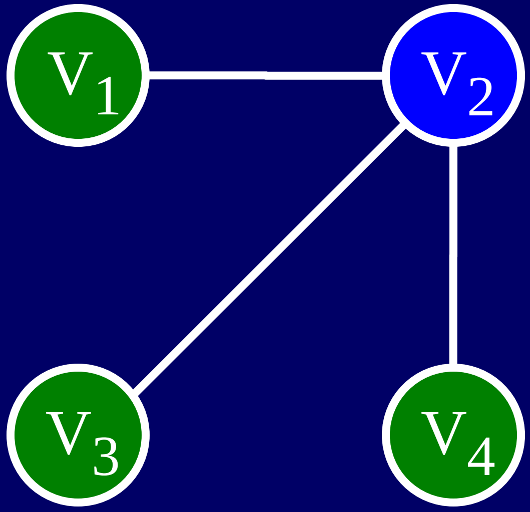
- グラフの形状に依存

3色必要

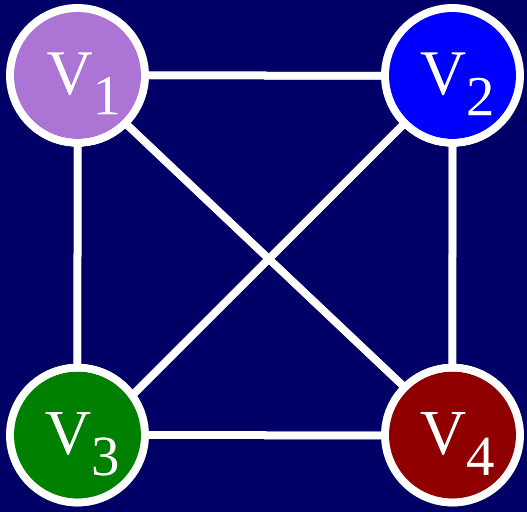


完全グラフは頂点と同数必要

2色で十分



4色必要



グラフの定義

定義

無向グラフ $G=(V,E)$ を以下のように定義する。

- V: 有限集合
- $E \subseteq \{\{v, v'\} \mid v \in V, v' \in V, v \neq v'\}$

ここで、V と E をそれぞれ頂点、辺と呼ぶ。

グラフ彩色問題の定義

定義

無向グラフ $G=(V,E)$ と色を表す有限集合Cが与えられたとき、任意の $v \in V, v' \in V$ に対して以下を満たす写像 $\phi : V \rightarrow C$ を探す問題をグラフ彩色問題と呼ぶ。

$$\phi(v) \neq \phi(v') \text{ if } \{v, v'\} \in E$$

グラフ彩色問題の定式化

- $V = \{v_1, \ldots, v_N\}$
- $E = \{\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \ldots \{v_{i_M}, v_{j_M}\}\}$

  $1 \leq i_m, j_m \leq N$ for all $1 \leq m \leq M$
- $C = \{c_1, \ldots, c_K\}$

$P_{n,k}$：頂点 v_n が c_k 色である。

$1 \leq n \leq N$ and $1 \leq k \leq K$

グラフ彩色問題のルール（制約）

- 各頂点は1色だけで塗られている
- 隣接する2個の頂点の色は異なる

制約→論理式

- 「頂点V_nは1色だけで塗られている」

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{P_{n,1}} \land \neg P_{n,2} \land \neg P_{n,3} \land \cdots\cdots \land \neg P_{n,K\text{-}1} \land \neg P_{n,K} \\
\lor\ & \neg P_{n,1} \land \mathbf{P_{n,2}} \land \neg P_{n,3} \land \cdots\cdots \land \neg P_{n,K\text{-}1} \land \neg P_{n,K} \\
& \vdots \\
\lor\ & \neg P_{n,1} \land \neg P_{n,2} \land \neg P_{n,3} \land \cdots\cdots \land \neg P_{n,K\text{-}1} \land \mathbf{P_{n,K}}
\end{aligned}
$$

CNFへ変換

MiniSat 向きのルール

- 各頂点は1色だけで塗られている

↓

- 各頂点に少なくとも1色は塗られている
（複数可）
- 各頂点に塗られている色は高々1色
（1色か無色）

MiniSat 向きのルール　（続き）

- 頂点V_nに塗られている色は高々1色

$$(P_{n,1} \supset \neg P_{n,2} \land \neg P_{n,3} \land \cdots\cdots \land \neg P_{n,K})$$

$$\land (P_{\mathrm{n},2} \supset \neg P_{n,1} \land \neg P_{n,3} \land \cdots\cdots \land \neg P_{n,K})$$

$$\vdots$$

$$\land (P_{\mathrm{n},K} \supset \neg P_{n,1} \land \neg P_{n,2} \land \cdots\cdots \land \neg P_{n,K\text{-}1})$$

ルールの変換

$$P_{n,1} \supset (\neg P_{n,2} \wedge \neg P_{n,3} \wedge \cdots\cdots \wedge \neg P_{n,K})$$

$$\Downarrow$$

$$\neg P_{n,1} \vee (\neg P_{n,2} \wedge \neg P_{n,3} \wedge \cdots\cdots \wedge \neg P_{n,K})$$

$$\Downarrow$$

$$(\neg P_{n,1} \vee \neg P_{n,2}) \wedge (\neg P_{n,1} \vee \neg P_{n,3}) \wedge \cdots\cdots \wedge (\neg P_{n,1} \vee \neg P_{n,K})$$

これは、以下と同値

$$(P_{n,1} \supset \neg P_{n,2}) \wedge (P_{n,1} \supset \neg P_{n,3}) \wedge \cdots\cdots \wedge (P_{n,1} \supset \neg P_{n,K})$$

ルールの変換 （続き）

$$(\neg P_{n,1} \vee \neg P_{n,2})$$

$$(P_{n,1} \supset \neg P_{n,2}) \quad \Longleftrightarrow \quad (P_{n,2} \supset \neg P_{n,1})$$

- 各頂点に塗られている色は高々1色

$$A_2 = \bigwedge_{1 \le n \le N} \left(\bigwedge_{1 \le k < k' \le K} P_{n,k} \supset \neg P_{n,k'} \right)$$

グラフ彩色問題のルール（制約）

- 各頂点に少なくとも1色は塗られている

$$A_1 = \bigwedge_{1 \le n \le N} \left(\bigvee_{1 \le k \le K} P_{n,k} \right)$$

- 各頂点に塗られている色は高々1色

$$A_2 = \bigwedge_{1 \le n \le N} \left(\bigwedge_{1 \le k < k' \le K} P_{n,k} \supset \neg P_{n,k'} \right)$$

- 隣接する2個の頂点の色は異なる

$$A_3 = \bigwedge_{1 \le m \le M} \left(\bigwedge_{1 \le k \le K} \neg (P_{i_m,k} \wedge P_{j_m,k}) \right)$$

命題

$$A = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$$

Aが充足可能ならば $G=(V,E)$ はCで彩色可能。
その逆も成り立つ。

別解探索

充足可能な場合

- MiniSat の出力は充足する変数割当の一つ

- その変数割当の否定を新たな制約に

- 異なる変数割当

空集合・空節

節集合が

- 空集合⇒充足可能

```
p cnf 0 0
```

- 空節を含む⇒充足不能

```
p cnf 0 1
0
```

問題1

(1) A_1 を CNF に変換したとき，節の数を N,M,K で表せ．

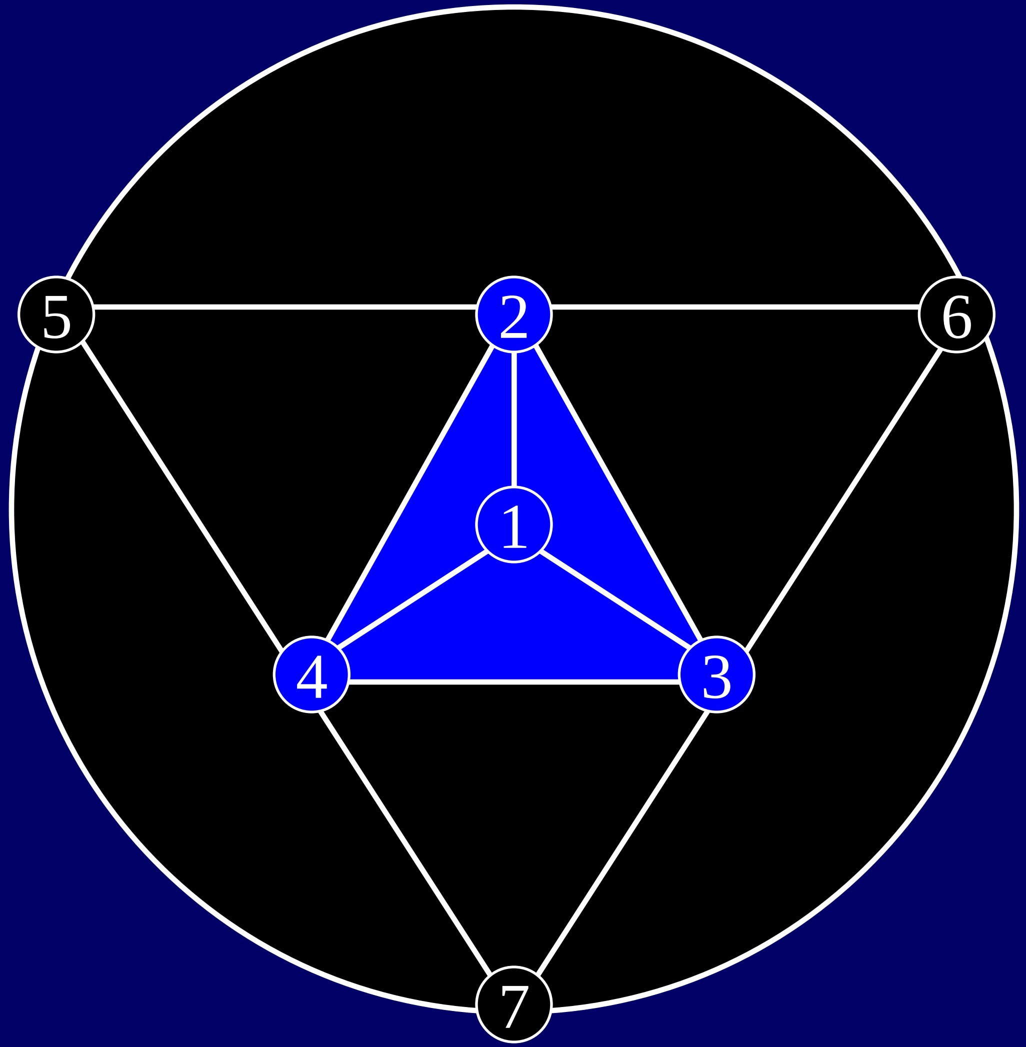
(2) A_2 を CNF に変換したとき，節の数を N,M,K で表せ．

(3) A_3 を CNF に変換したとき，節の数を N,M,K で表せ．

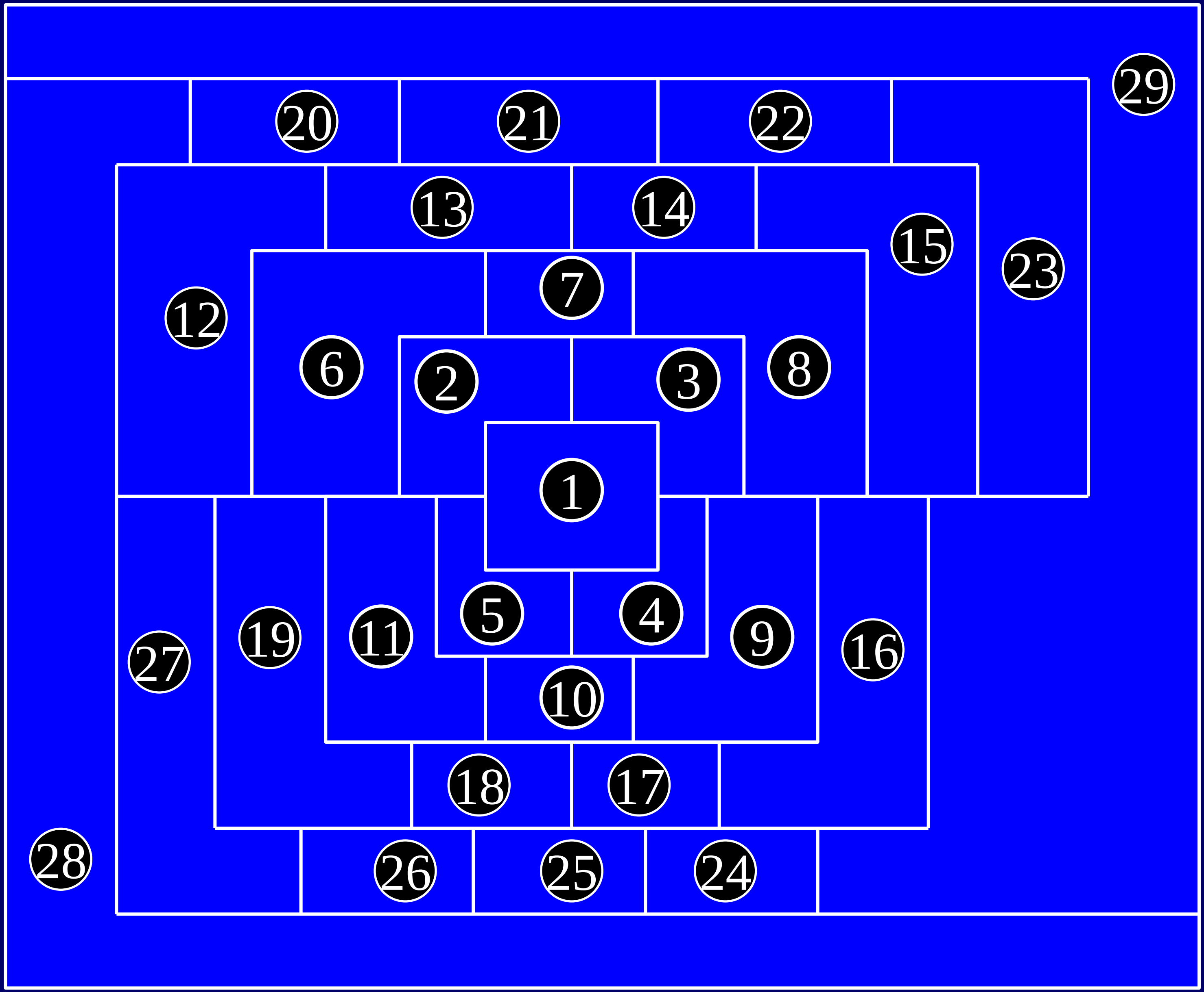
(4) A を CNF に変換したとき，節の数を N,M,K で表せ．

問題2

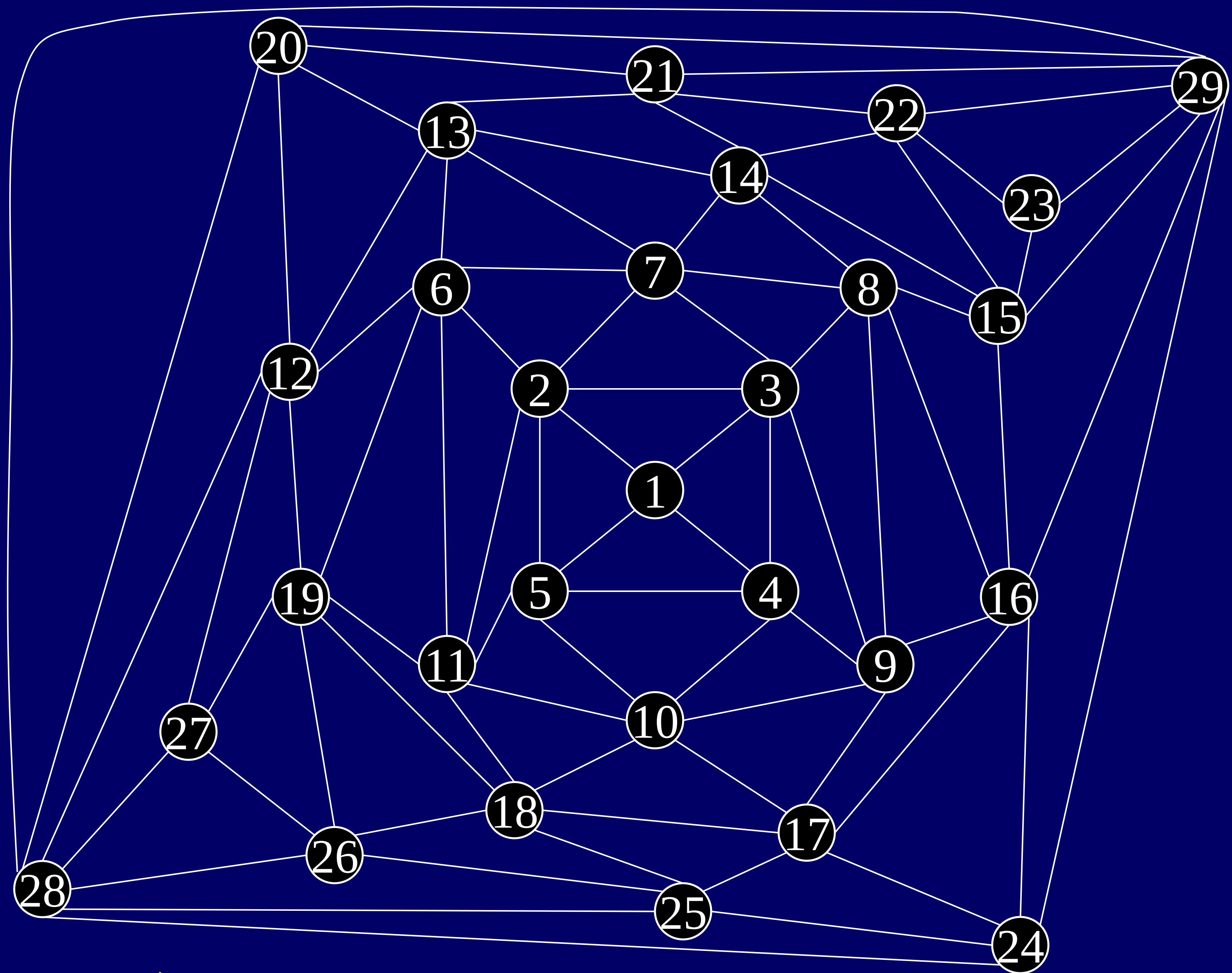
（1） 右のグラフに対する彩色問題をMiniSatを使用して最小の色数で解け。



オマケ
四色問題



http://comp.cs.ehime-u.ac.jp/~ogata/fourcolor2.html(現在は消失)



平面グラフは4色で彩色可能