物理学1/物理学A

第２回　座標とベクトル

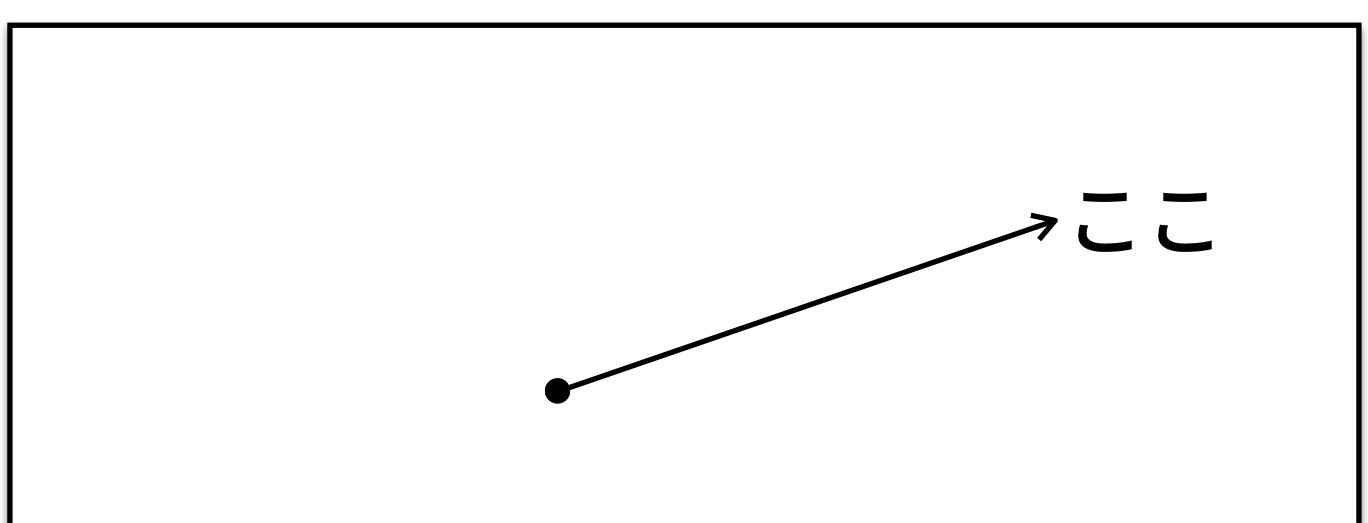
座標

位置の表し方

真っ直ぐな棒上の点の位置を表す場合

基準となる点(原点)を選んでおいて，そこより右ならプラス，左ならマイナスの符号つきの原点からの距離で表すことができる。

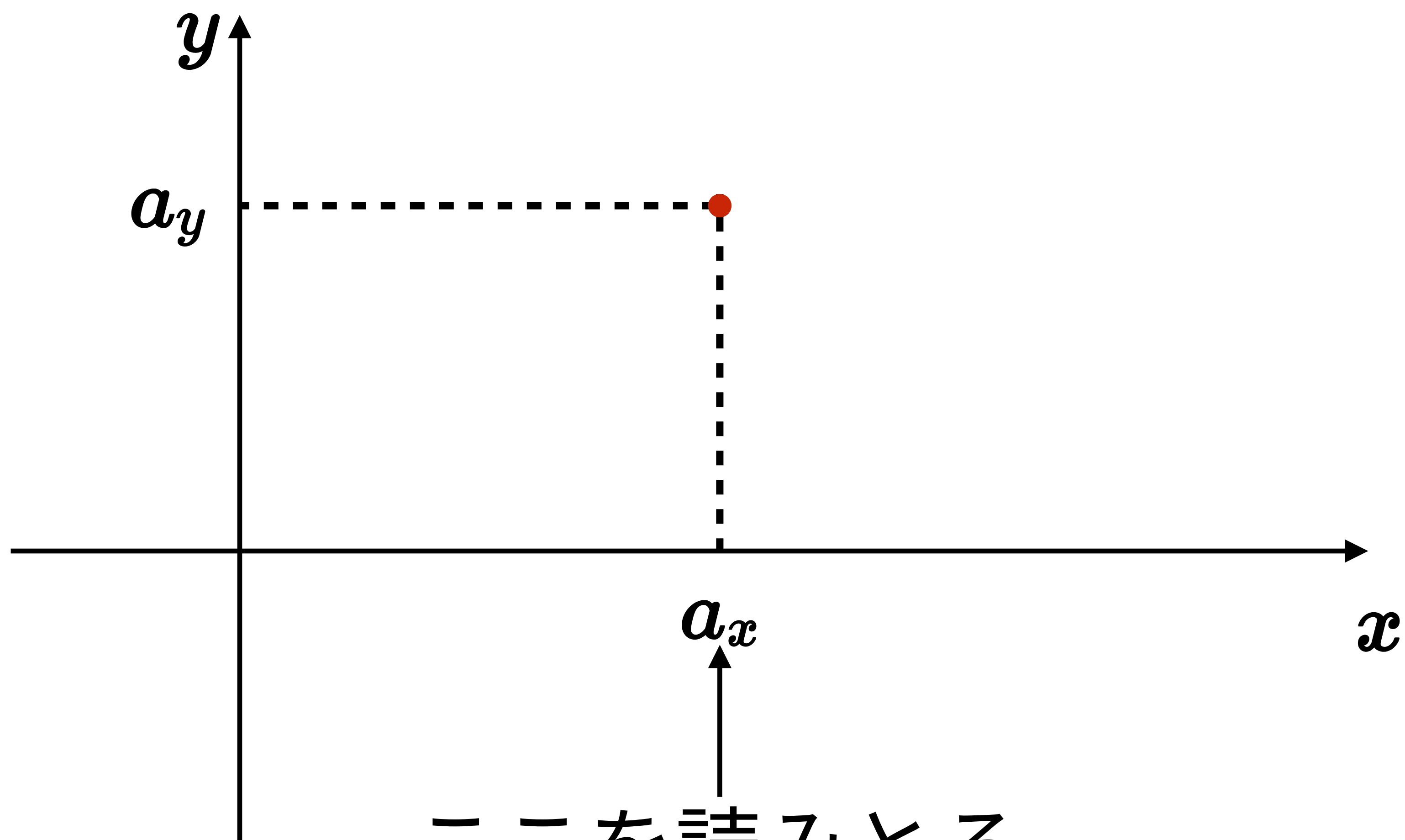
平面上の点の位置を表す場合



単なる距離とプラス・マイナスの符号だけでは足りない

平面の表し方

空間中の位置を表すのに，**座標系**を用いる

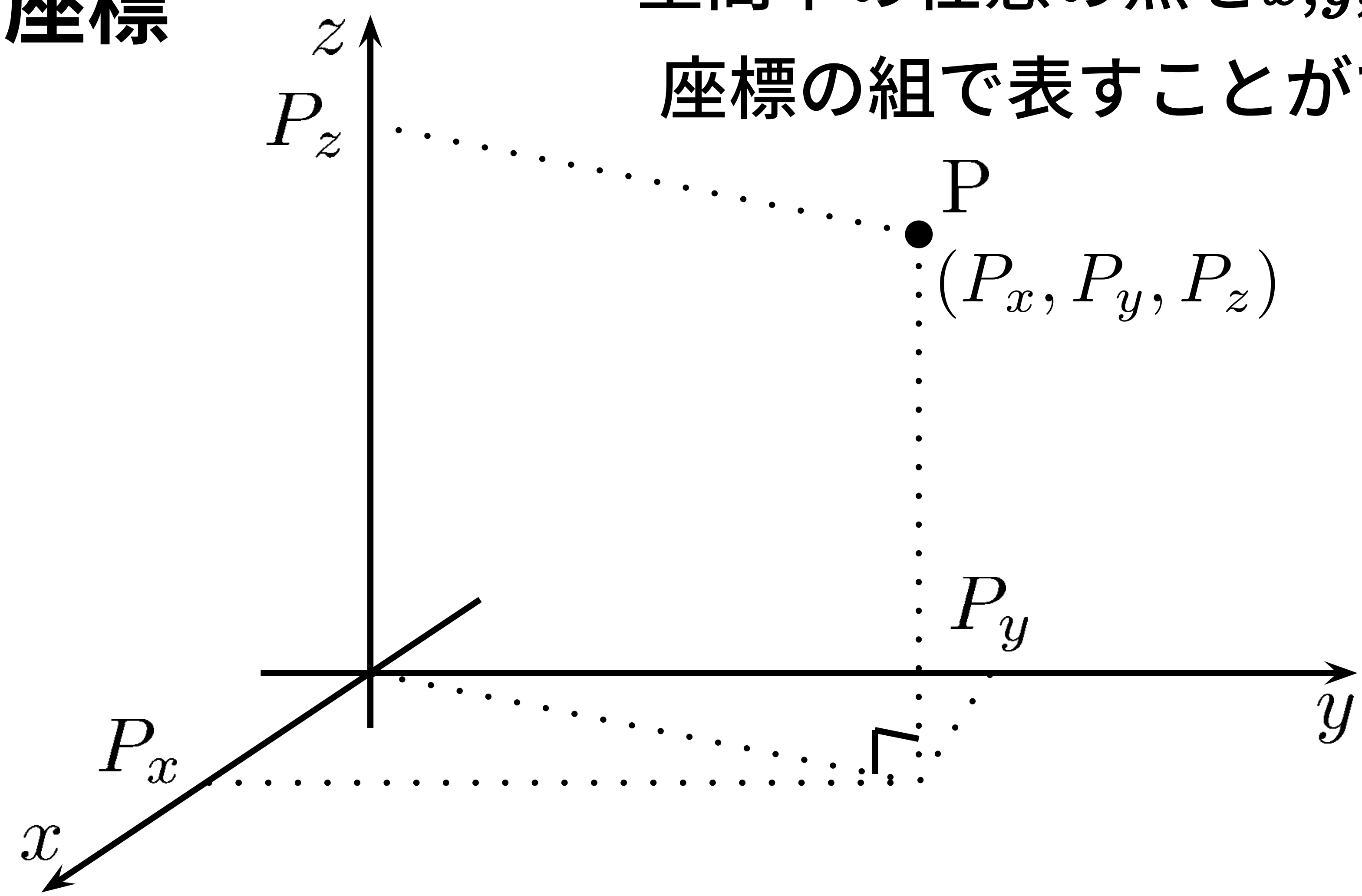


2つの座標軸を用意しておき，(a_x,a_y)のように表す

空間座標

デカルト座標

空間中の任意の点をx,y,zの3つの座標の組で表すことができる。



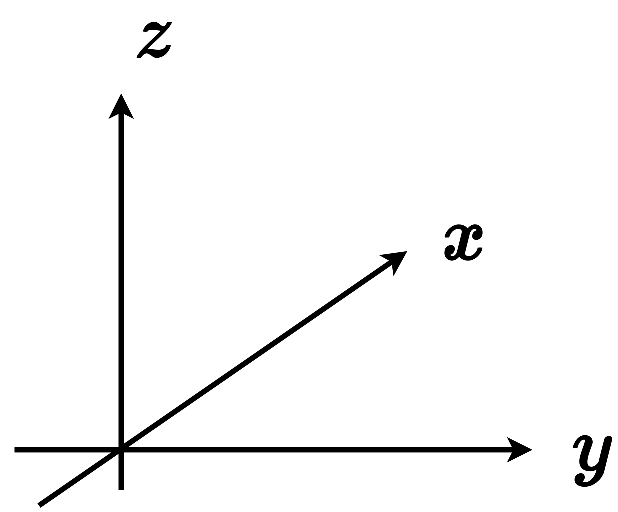
デカルト(1596-1650)
wikipediaより

3つの数字の組を決めると，空間中の1点が示される

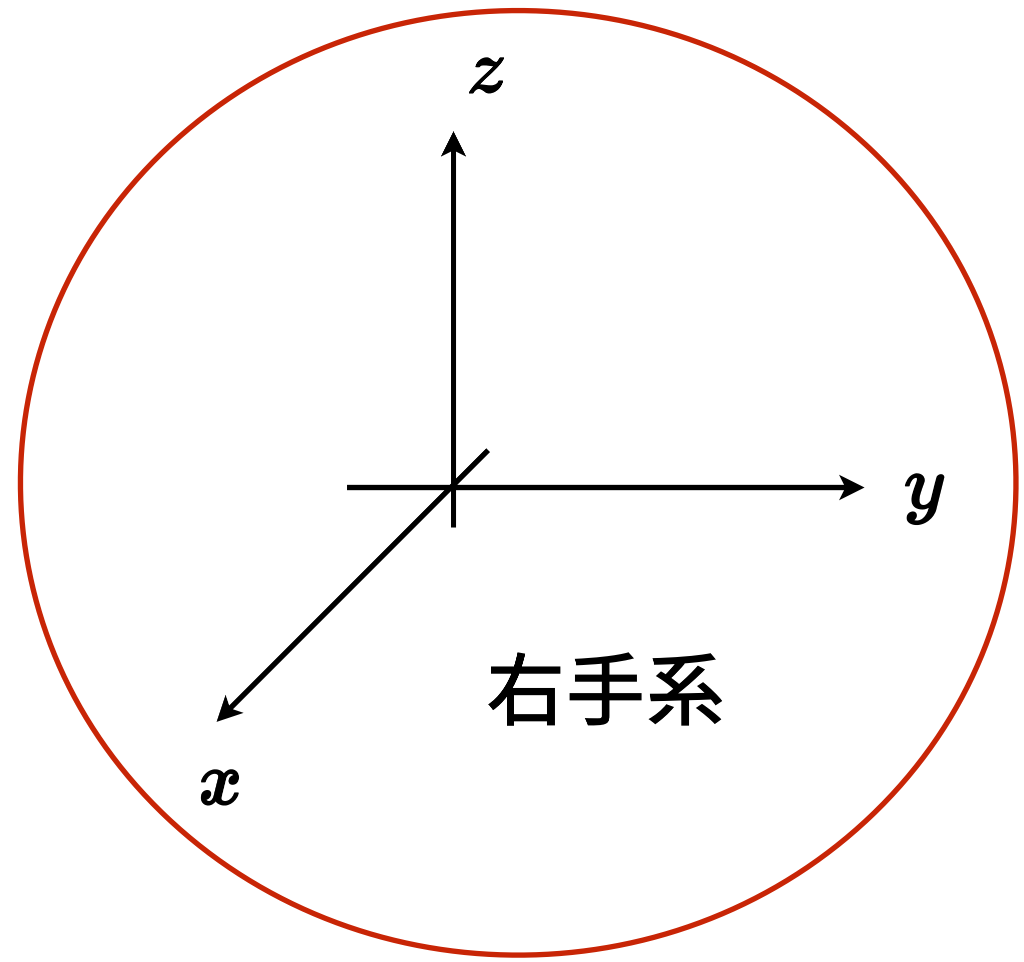
3つの軸が直交しているものを直交座標系という

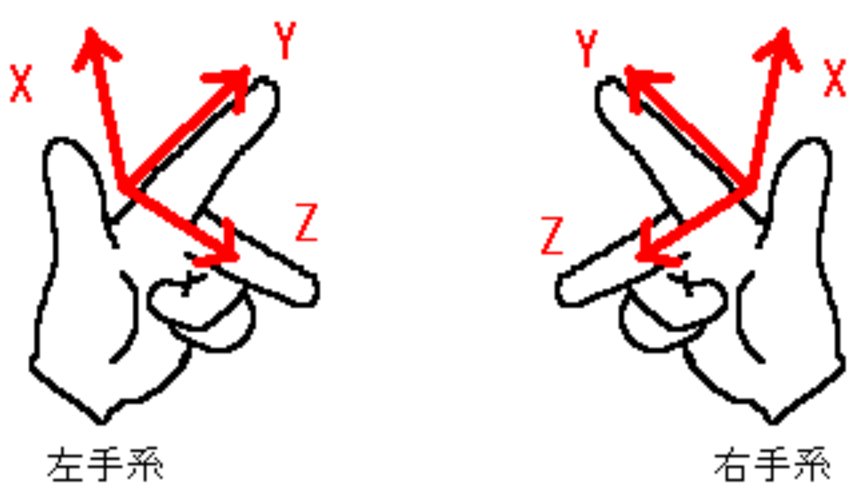
座標系について一言

一般にはいわゆる右手系の座標系をとることが多い。



左手系





HSP開発wikiより

たいていの場合，どっちを取っても問題ないが，「外積」が絡む場合には数式の表式に違いが生じる。

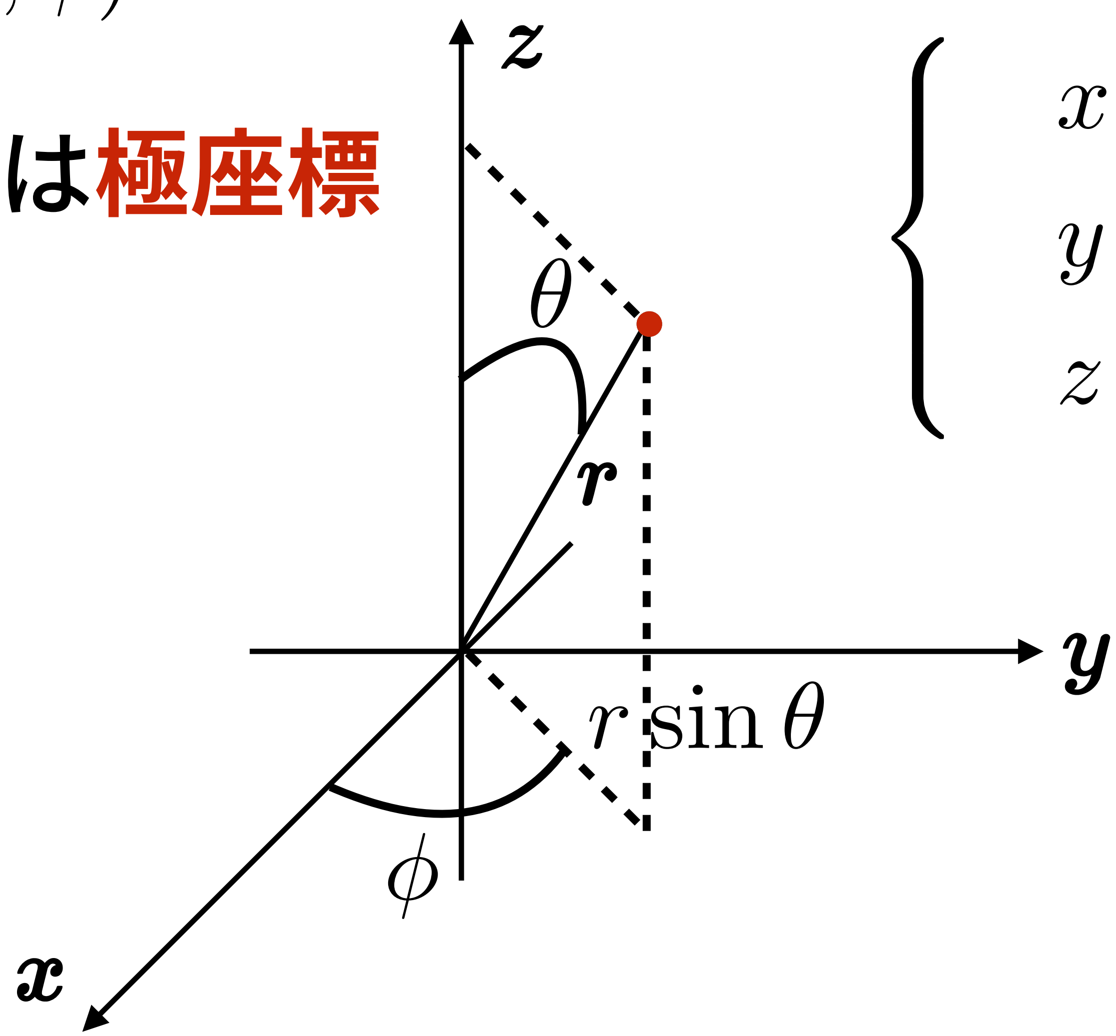
極座標

空間中の位置を表すには，3つの数字の組があればよい

デカルト座標以外にも，座標を表す方法がある

$$(x, y, z) \to (r, \theta, \phi)$$

よく使われるのは**極座標**



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

他にも**円柱座標**等がある

次元(数学的次元/空間次元)

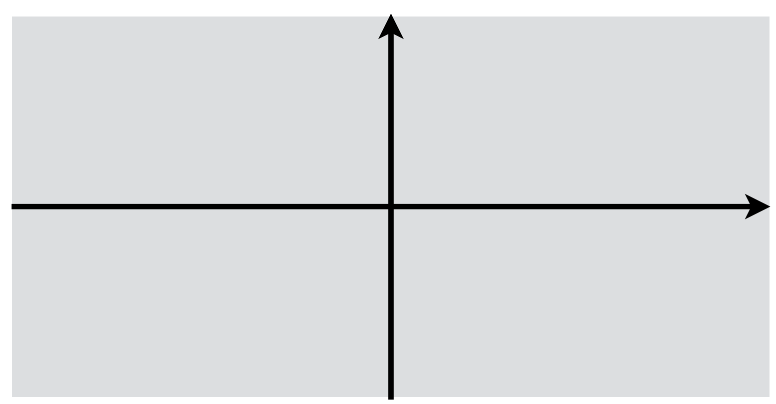
0次元

1つの点だけの世界

1次元

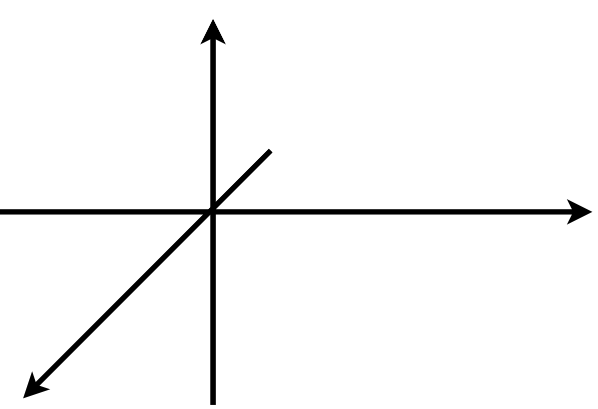
1つの直線上で閉じた世界

2次元



1つの平面上で閉じた世界

3次元



我々が普段認識している空間
前後左右と上下がある

⋮

その世界の全ての位置を表すために**最低限必要な軸の本数**が次元

相対論では，時間と空間を同等にあつかって，4次元時空を考える

ベクトル

何故ベクトルが必要か?

単なる数字では，大きさと方向を同時に表すことができない

- 単なる数字で表せるもの → スカラー量
- 大きさと方向をあわせもつもの → ベクトル量
- ベクトルをさらに一般化した行列のようなもの → テンソル量

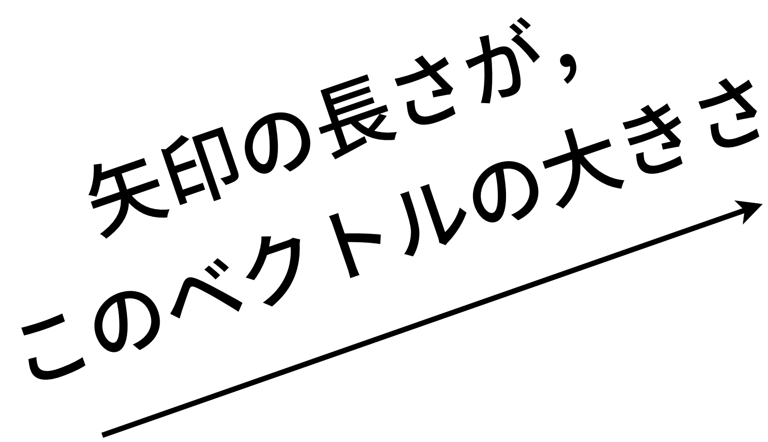
スカラーを0次のテンソル，ベクトルを1次のテンソルとよぶこともある。

ここでは，ベクトルについて学んでいく。

ベクトルとは?

大きさと**方向**をあわせもつ量

具体的には矢印をイメージするとよい。
(幾何学ベクトルともいわれる)



Q(終点)

矢印の指している方向が
このベクトルの方向

P (始点)

ベクトルの表記の仕方

スカラーとは性質が全く異なる量なので，きちんと区別して書く

$\overrightarrow{PQ}$　　$\vec{a}$　　$\boldsymbol{a}$　←ベクトル　　　　a ←スカラー

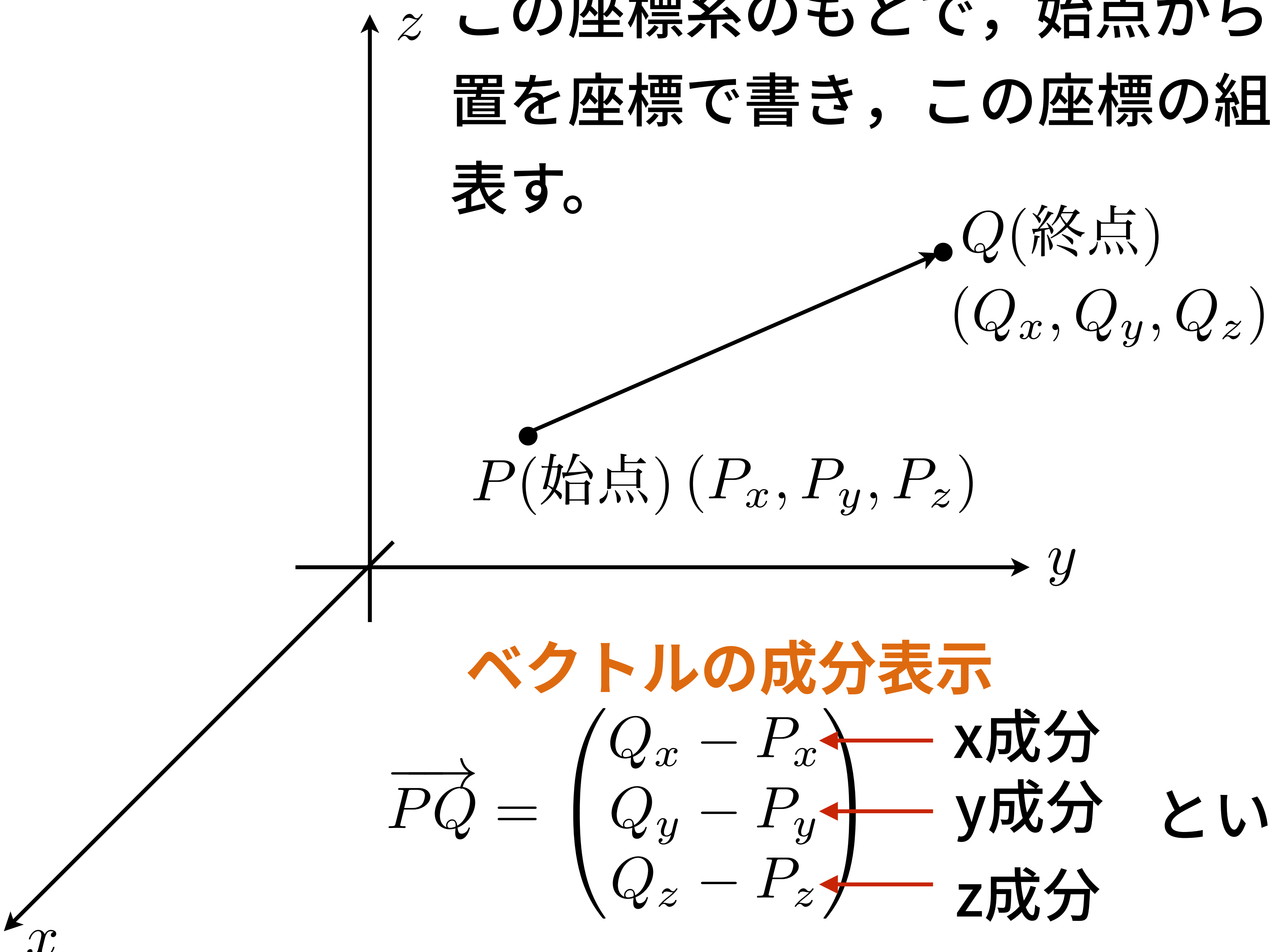
記号の上に矢印をつけて表したり，文字を太字にするやり方等がある

ベクトルの成分

ベクトルを矢印で表すのは分かりやすいが，**計算等をするには不便。**

そこで，あつかいやすい**数を利用して**ベクトルを表す方法を考える

この座標系のもとで，始点からみた終点の相対的な位置を座標で書き，この座標の組をもって，ベクトルを表す。



ベクトルの成分表示

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \\ Q_z - P_z \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{x成分} \\ \leftarrow \text{y成分} \\ \leftarrow \text{z成分} \end{matrix}$$

という

$\overrightarrow{PQ} = (Q_x - P_x, Q_y - P_y, Q_z - P_z)$ のように書いてもよい。

例

$$\vec{a} = (1, 2, 3)$$

始点から見て，x方向に1，y方向に2，z方向に3いくと終点にたどりつく。

始点の座標が(1,3,0)，終点の座標が(1,2,2)とする。
このベクトルの各成分を求めよ。

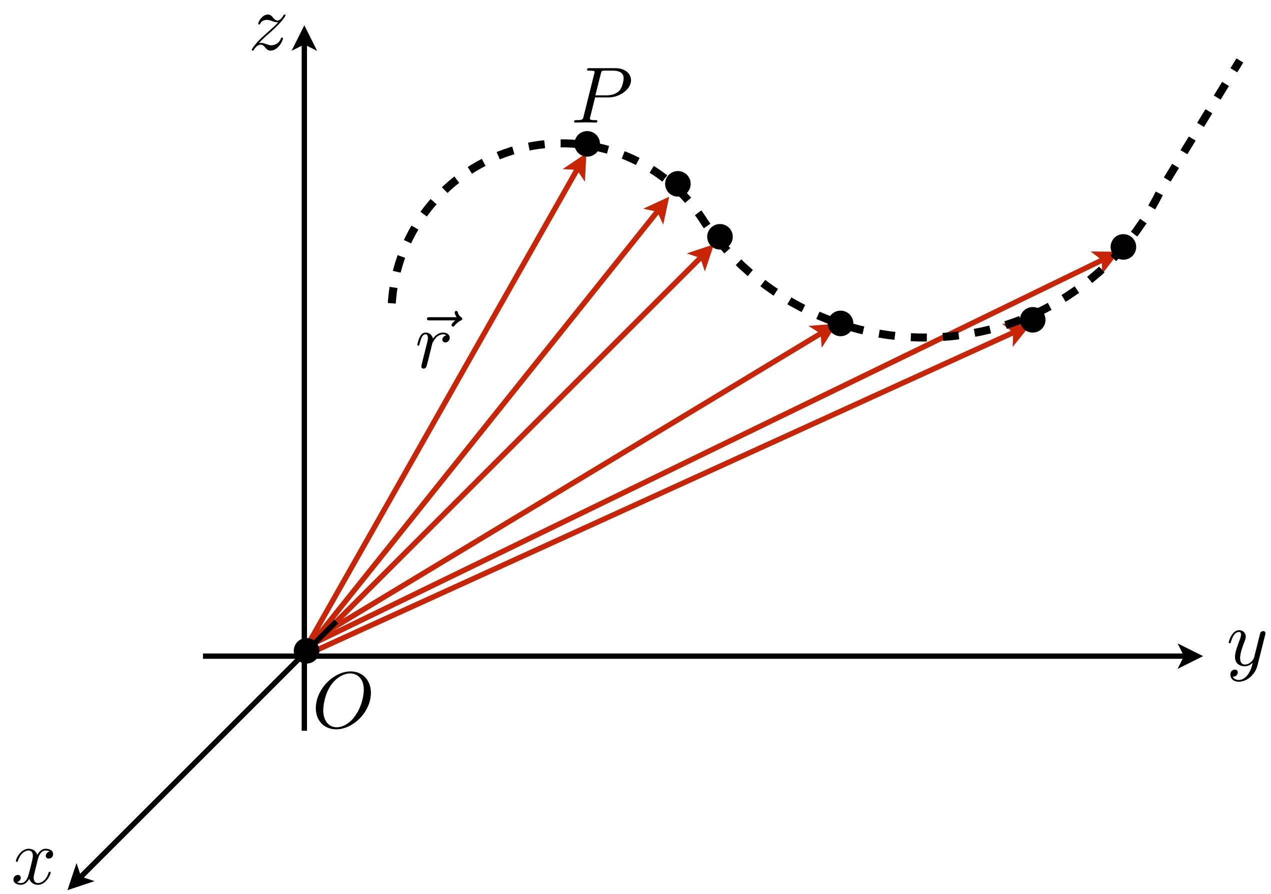
$$(1-1,2-3,2-0)=(0,-1,2)$$

始点が(1，2，0)であるベクトル$\vec{a}$があり，このベクトルを成分で表すと，
(–1,3,2)である。このベクトルの終点を求めよ。

$$(1,2,0)+(-1,3,2)=(0,5,2)$$

位置ベクトル

原点を始点とするベクトルを用いれば，位置を表すことができる。



位置ベクトルの名前には
$\vec{r}$ や$\vec{x}$がよく使われる。

位置ベクトルを利用すると，
実は，座標系を設定しなくて
も位置を表すことができる
(原点に立って矢印で位置を示
しているようなもの)

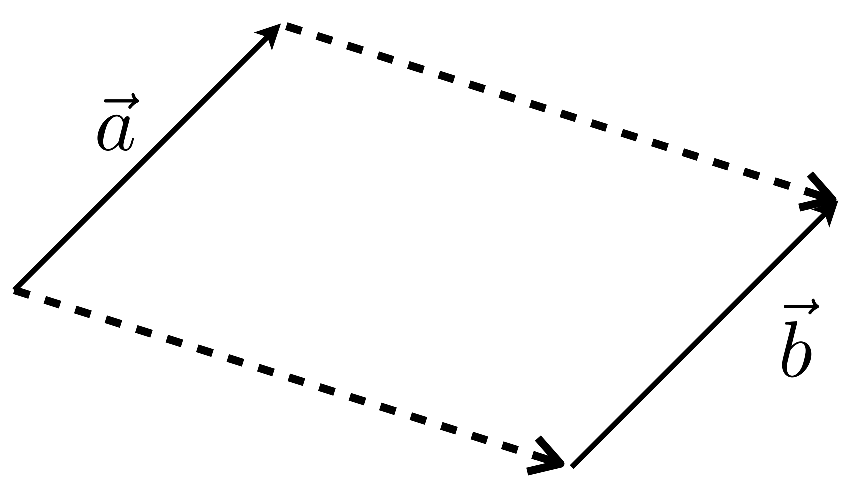
物体の位置を位置ベクトルで表しておく
と，物体が移動する様子を表すのも簡単
(ベクトルが伸び縮みしながら方向をか
えていく様子を想像しよう!)

ベクトルの性質

等号

2つのベクトルがあり，一方を平行移動させていったときに，もう1方にぴったり重なる場合，これらの2つのベクトルは互いに等しいとする。

数学的なベクトルの同等性を議論する際には，始点の位置は問題ではない



始点の位置を自由に動かせない
ようなベクトルを**束縛ベクトル**という。
例: 位置ベクトル，力のベクトル

$\vec{a} = \vec{b}$

成分を用いてこの性質を表すと，

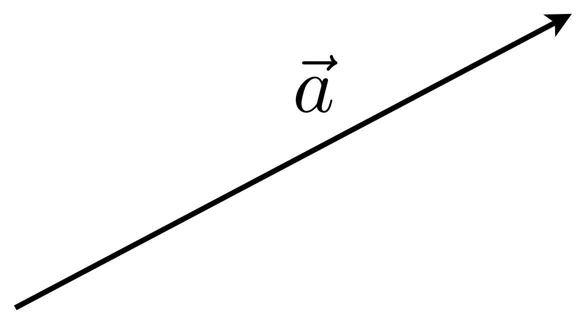
$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x \text{ かつ } a_y = b_y \text{ かつ } a_z = b_z$$

各成分同士が等しいかどうかが問題

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

大きさ

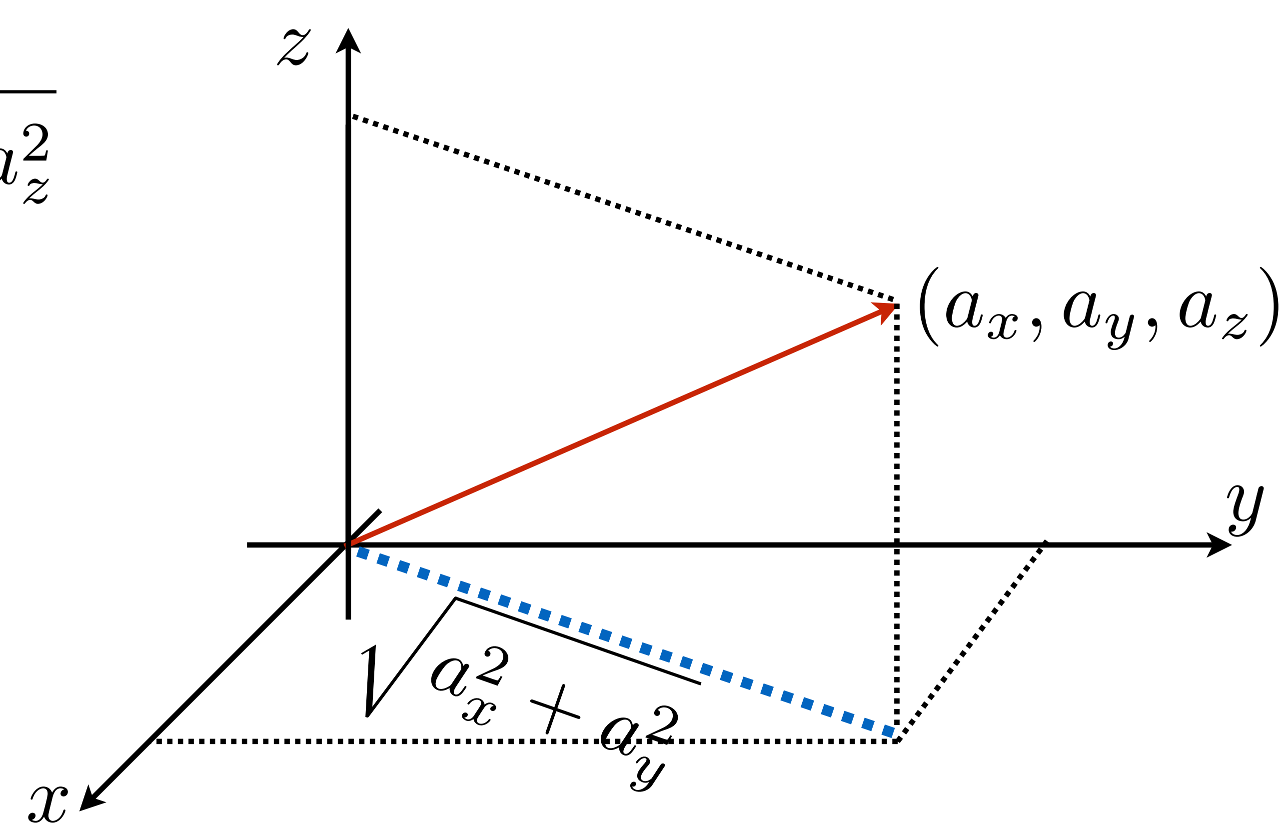
ベクトルを矢印で表した場合，大きさはその**矢印の長さ**を測って求める



成分を用いると

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

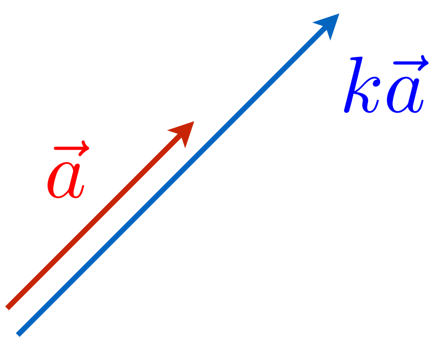
ベクトルの大きさを表す記号



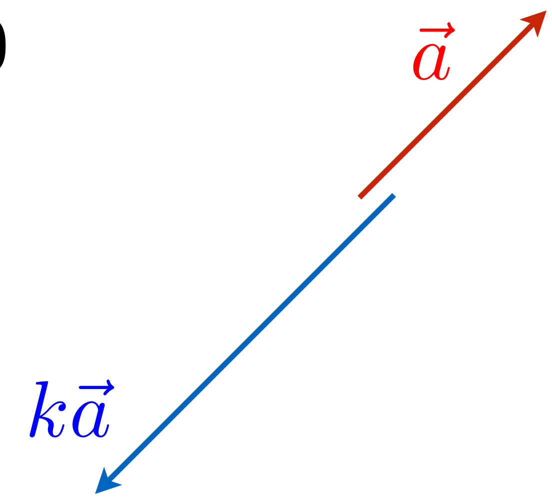
「ベクトルの大きさ」はスカラー量

ベクトルのスカラー倍

$k > 0$



$k < 0$



方向はそのまま，大きさをk倍する　　**方向を反転し**，大きさを$|k|$倍する

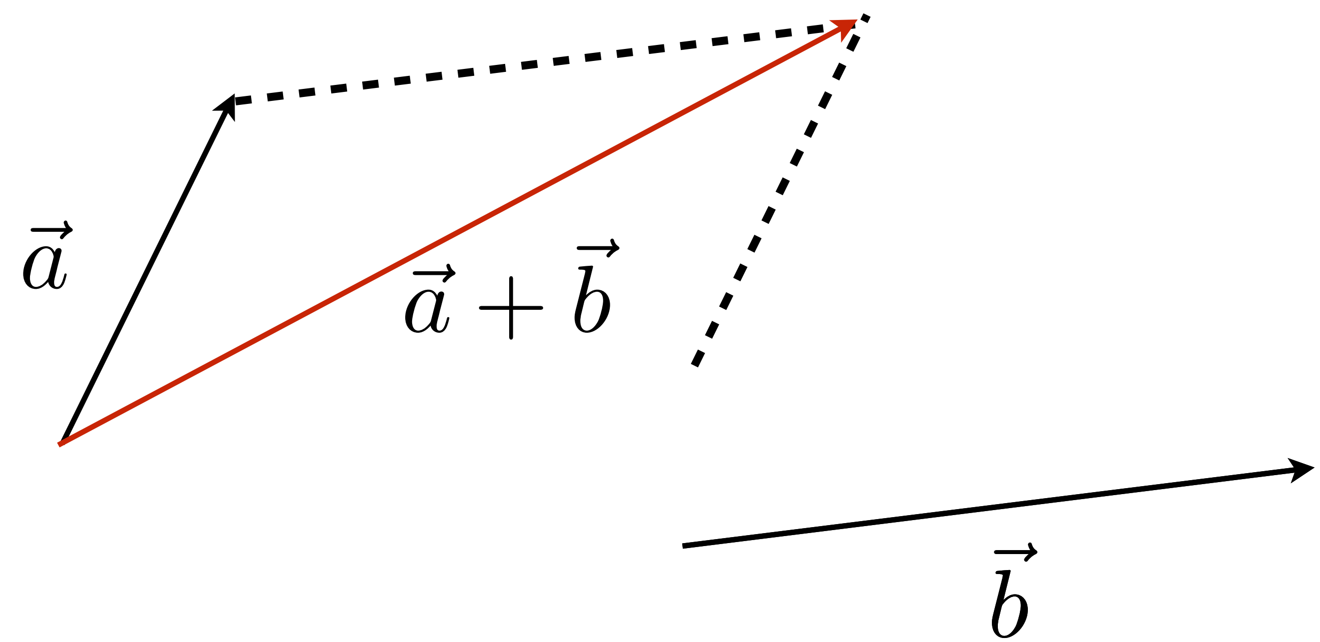
同じ内容

成分で計算するときは

$$k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_x \\ ka_y \\ ka_z \end{pmatrix}$$

のように，各成分をそれぞれk倍する

ベクトルの足し算



2本のベクトルの始点をあわせて，2本のベクトルをとなりあう2辺とする平行四辺形の対角線にそってベクトルを描く

もしくは，片方の終点にもう一方の始点をあわせ，浮いている始点から終点に向けてベクトルを描く

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_x+b_x \\ a_y+b_y \\ a_z+b_z \end{pmatrix}$$

成分を用いて計算するときは各成分同士を足しあわせる。

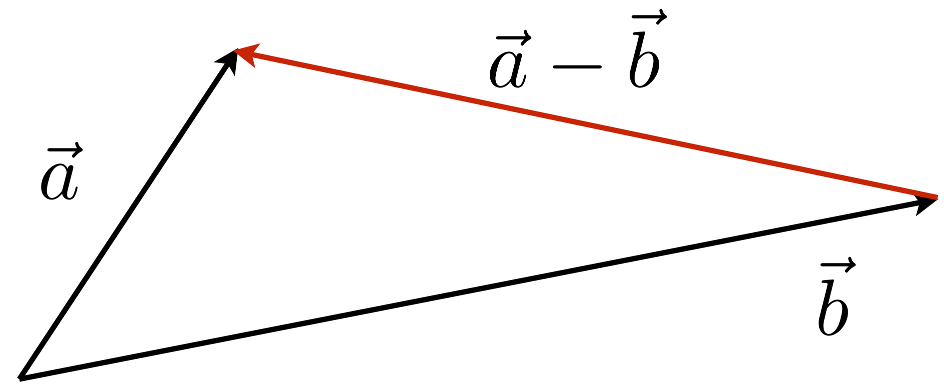
足し算とスカラー倍の組合せによって新しいベクトルが作れることをベクトルの**線形性**という。 $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$

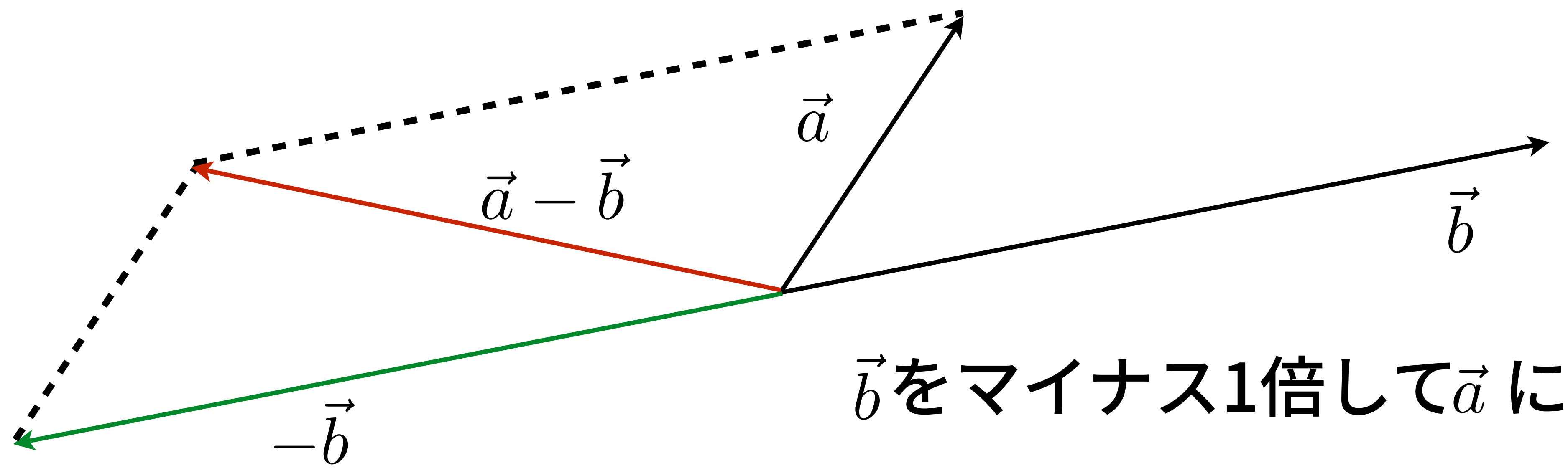
ベクトルの引き算

$\vec{a} - \vec{b}$

「$\vec{b}$ に何を足したら$\vec{a}$になるか?」

を考える





$\vec{b}$をマイナス1倍して$\vec{a}$ に足してもよい

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

成分で計算するときは，各成分同士を引き算する

単位ベクトル

大きさ1(無単位)のベクトルを**単位ベクトル**という

単位ベクトルは，ベクトルの方向だけを表したいときに用いられる

単位ベクトルの作り方

あるベクトルの方向を表す単位ベクトルは，そのベクトルを自分自身の長さで割ることによって得られる。

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \longleftarrow$$

分子分母で長さの単位が打ち消しあわれて，単位のない量(無次元量)になる

例題:次のベクトルと同じ方向を指す単位ベクトルを求めよ

$$\vec{a} = (1, 2, 2)$$

解答: $|\vec{a}| = \sqrt{1 + 2^2 + 2^2} = 3$ より $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3})$

様々な単位をもつベクトル

単位ベクトルに，適当な物理的次元を持つスカラーをかけることで，色々な物理的次元(単位)をもつベクトルを考えることができる。
ベクトルの大きさとして「実際の長さ」以外の量も考えられる。

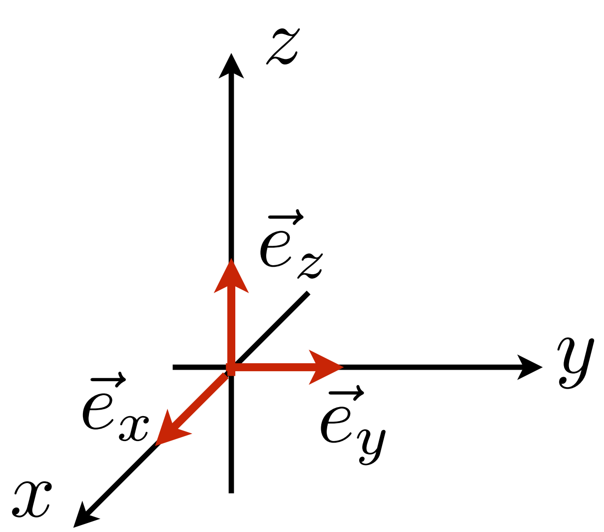
単位ベクトル

例：vは速さを表しているとして，$\vec{v} = v\vec{e}$ とすると，

速さvで $\vec{e}$ の方向にむかう速度を表すベクトルが作れる。

基底ベクトルと成分

適当な座標軸のもとで，x軸，y軸，z軸の正の方向を向く単位ベクトルを考える。



これらの1組のベクトルを基底ベクトルといい

任意のベクトルは，基底ベクトルを用いて

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z \longleftrightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

と書ける。

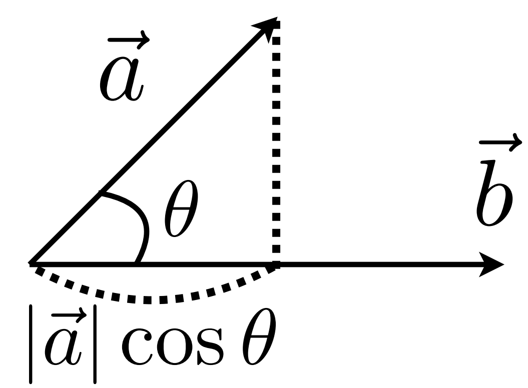
$$\begin{cases} \vec{e}_x & = (1, 0, 0) \\ \vec{e}_y & = (0, 1, 0) \\ \vec{e}_z & = (0, 0, 1) \end{cases}$$

位置ベクトル以外の場合には，ベクトルの各成分は上のように解釈すればよい。

ベクトルの内積

ベクトル同士のかけ算を考える。
ベクトル同士のかけ算は2種類ある。
まずは内積(スカラー積)とよばれるかけ算から。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$



内積を表す記号
(省略してはいけない)

ベクトル同士の内積はスカラーになる!

成分を用いて計算すると

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

ベクトルの内積

- ⭐ 交換則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
- ⭐ スカラー倍 $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(m\vec{b})=m\vec{a}\cdot\vec{b}$
- ⭐ 分配則 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
- ⭐ 内積が0だからといって，いずれかのベクトルの大きさが0とは限らない。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}=0\text{ もしくは }\vec{b}=0\text{ もしくは }\vec{a}\perp\vec{b}$$

ベクトルの外積

3次元のベクトルでは，外積(ベクトル積)とよばれる
ベクトル同士のかけ算を考えることができる

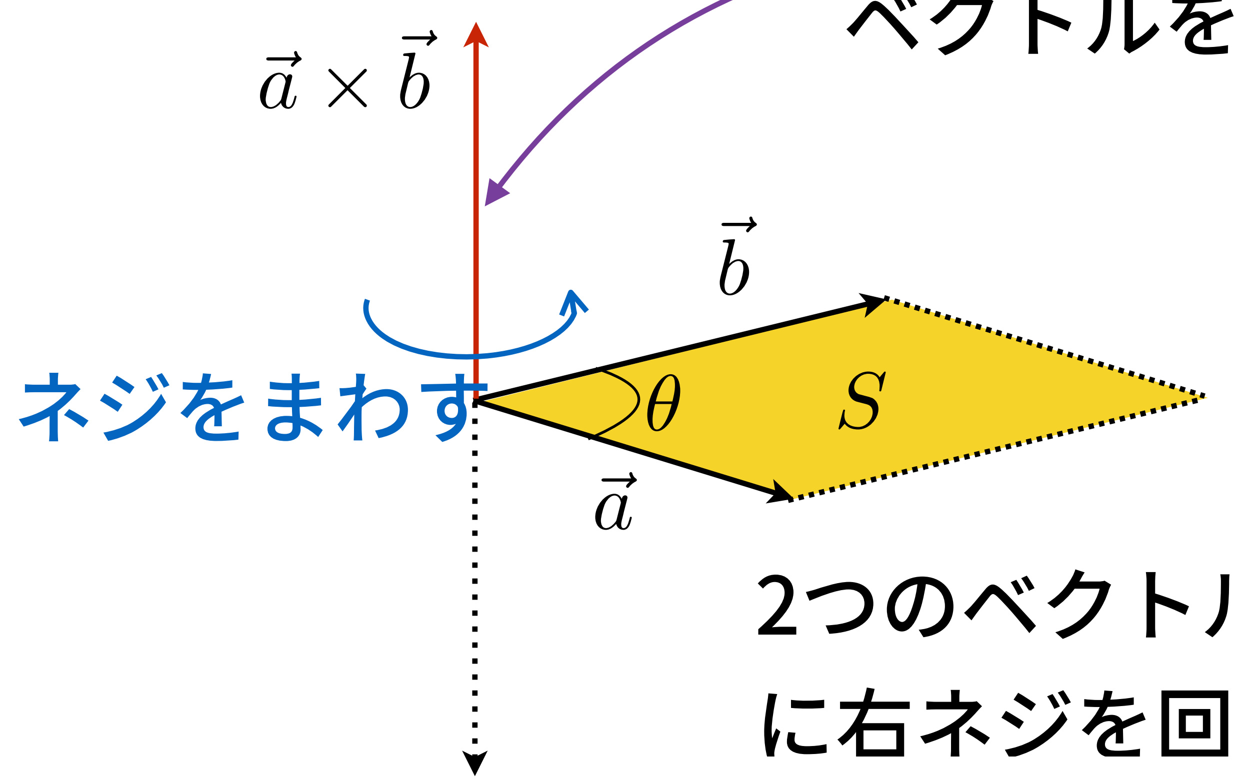
$\vec{a} \times \vec{b}$ 2つのベクトルの外積はベクトルになる

外積を表す記号

まず2つのベクトルを隣りあう2辺とする平行四辺形の面積Sを求める

2つのベクトルの両方に垂直で**大きさがS**の
ベクトルを描く

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin\theta|$$



2つのベクトル両方に垂直な方向は2つあるが，$\vec{a}$から$\vec{b}$に右ネジを回したときにネジが進む方向を選ぶ。

ベクトルの外積

成分で計算すると

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\a_zb_x-a_xb_z\\a_xb_y-a_yb_x\end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] & \\ y \arrow[rr] & & z \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

- 交換則が成り立たない

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

- スカラー倍

$$(m\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(m\vec{b})=m(\vec{a}\times\vec{b})$$

- 分配則

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

- 結合則が成り立たない

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$$

- 外積が0だからといって，いずれかのベクトルの大きさが0とは限らない。

$$\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}=0\ \text{もしくは}\ \vec{b}=0\ \text{もしくは}\ \vec{a}\parallel\vec{b}$$

ベクトル3重積

ベクトルの内積や外積について，次が成り立つ。

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$ **(ヤコビ恒等式)**