量子情報科学
ウィンタースクール2010

2010.2.25-27

1日目: 量子力学の基礎

2日目: 量子情報理論の基礎I

3日目: 量子情報理論の基礎Iと応用

木村元（産業技術総合研究所 情報セキュリティ研究センター）

Outline

- **密度行列，POVM復習**
- **はじめに**
- **量子情報科学の基礎II**

  ★ 一般の時間発展

  — ユニタリーからCPTP

  — CPTP写像の物理的実現とKraus表現

  ★ 一般の測定過程

  — Instrumentと測定演算子

  — 不確定性原理

昨日の復習

状態 s

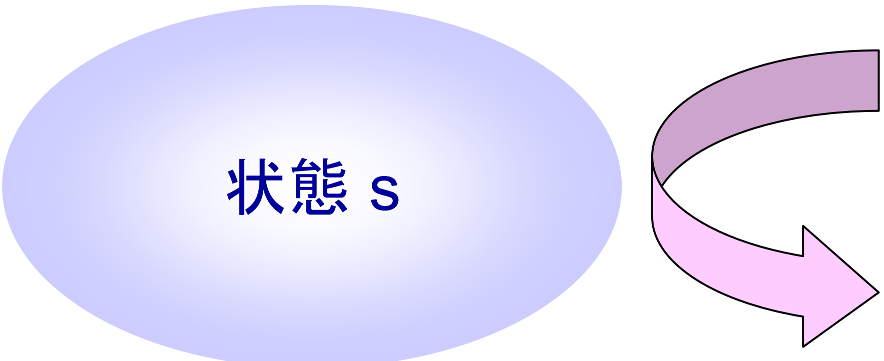
測定 M

ある測定値mを確率

$\Pr\{m \mid M, s\}$ で得る.

	状態	測定	確率
伝統的量子力学	$\|\psi\rangle$	$A = \sum_i a_i P_i$	$\langle\psi\|P_i\|\psi\rangle$

昨日の復習



測定 M

ある測定値mを確率

$\Pr\{m \mid M, s\}$ **で得る.**

	状態	測定	確率
伝 統量 的子 子力 学	$\rho = \|\psi\rangle\langle\psi\|$	$A = \sum_i a_i P_i$	$\langle\psi\|P_i\|\psi\rangle$

昨日の復習

状態 s

測定 M

測定値mを確率 $m \mid M, s\}$ で得る.

密度行列: 行列 st

$$\mathrm{tr}\,\rho = 1, \rho \geq 0$$

POVM: 行列の組 st

$$M_i \geq 0, \sum_i M_i = \mathbb{I}$$

	状態	測定	確率
伝統的量子力学	$\rho = \|\psi\rangle\langle\psi\|$ 純粋状態	$A = \sum_i a_i P_i$ PVM測定	$\mathrm{tr}(\rho P_i)$
現代版量子力学	$\rho = \sum_i p_i \|\psi_i\rangle\langle\psi_i\|$ 混合状態	$M = (M_i)$ POVM測定	$\mathrm{tr}(\rho M_i)$

はじめに

	状態	測定	確率	時間発展	測定過程
伝統的量子力学	$\rho = \|\psi\rangle\langle\psi\|$ 純粋	$A = \sum_i a_i P_i$ PVM	$\mathrm{tr}(\rho P_i)$	$U\rho U^\dagger$	射影測定？
現代版量子力学	$\rho = \sum_i p_i \|\psi_i\rangle\langle\psi_i\|$ 混合	$M = (M_i)$ POVM	$\mathrm{tr}(\rho M_i)$	CPTP	Instrument

実現可能な時間発展

ユニタリー発展

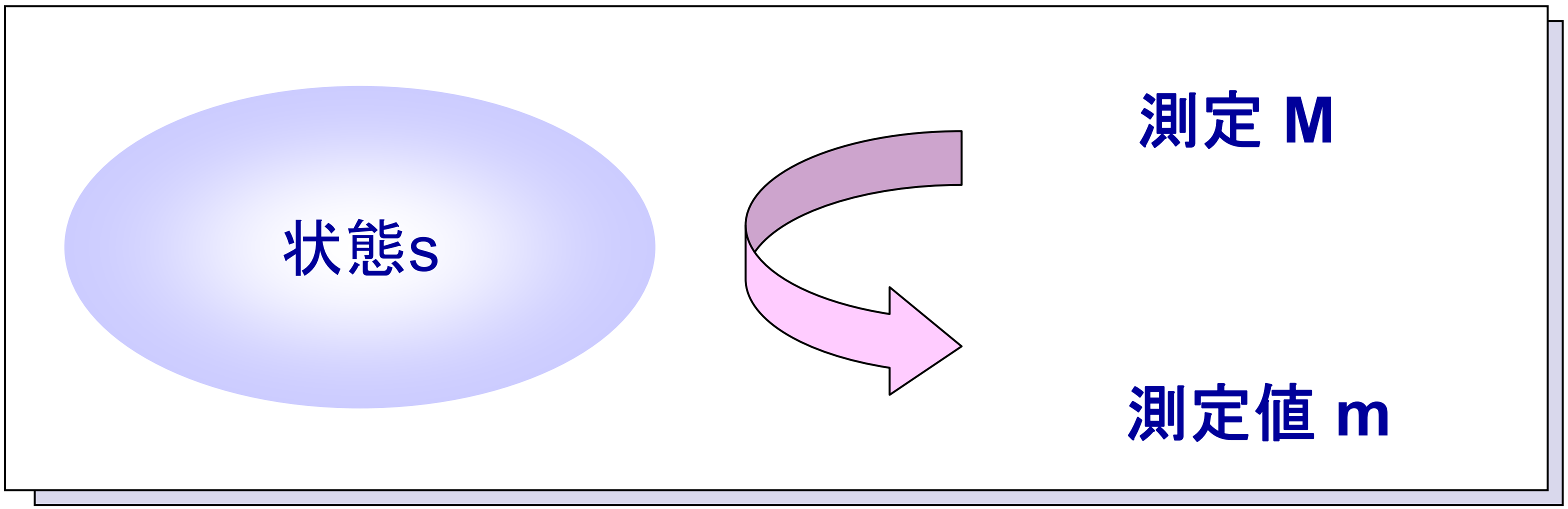
$$\rho \to U\rho U^\dagger$$

実現可能な測定過程

射影測定？

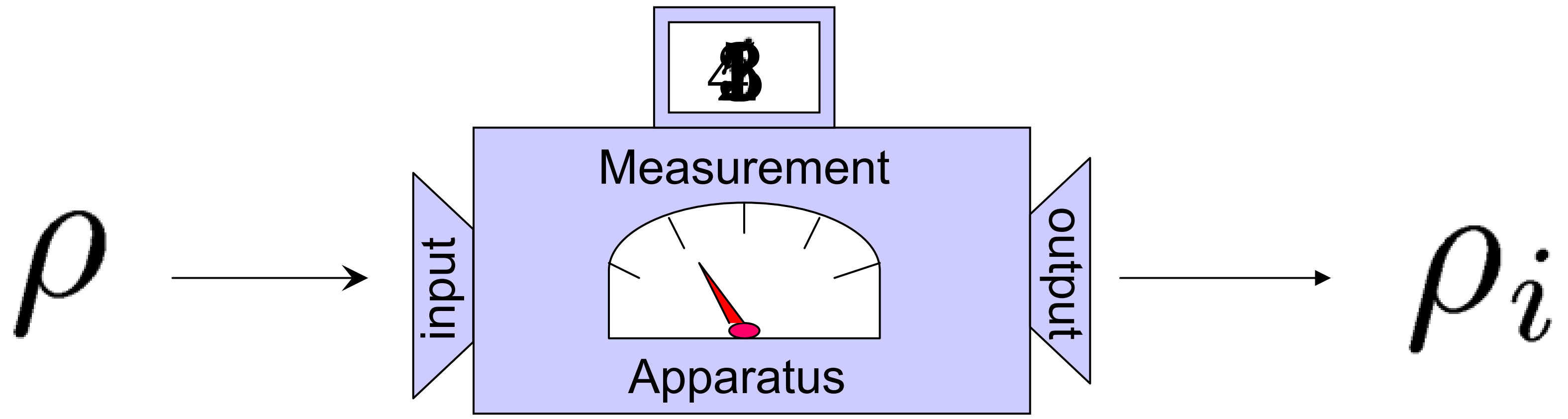
$$\rho \to P\rho P/pr$$

はじめに



一般に，量子状態は測定によって変化する！

はじめに



今日の目的の一つ:

量子力学の観測過程はどのようなものがあるか？

量子力学の観測過程はどのように記述するのか？

一般の時間発展（量子開放系のダイナミクス）

一般の時間発展

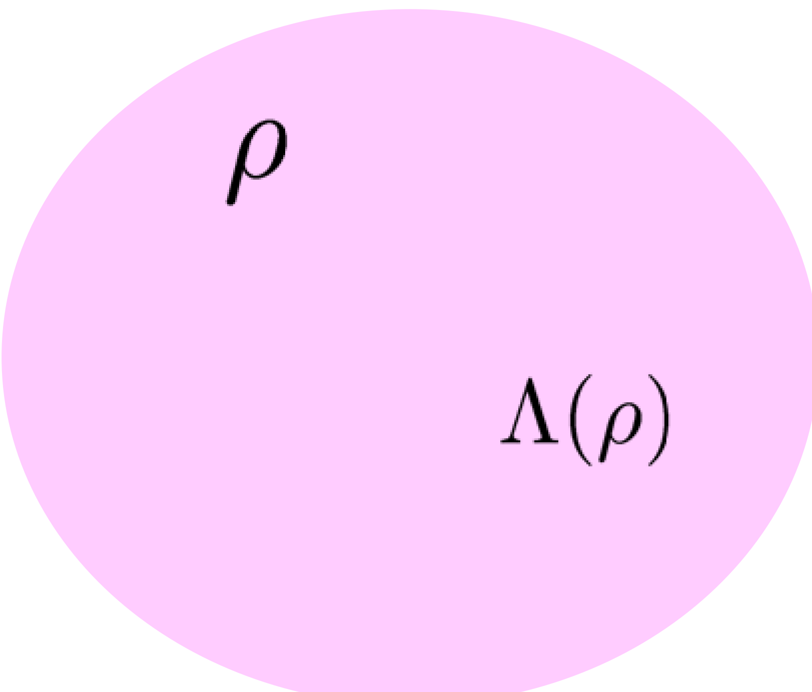
$$\boxed{\rho \mapsto \Lambda(\rho)}$$

Λ: 時間発展写像

(例) $\Lambda(\rho) = U\rho U^\dagger$: 孤立系

密度作用素の状態空間

$$\mathcal{S} = \{\rho |\, \mathrm{tr}\,\rho = 1, \rho \geq 0\}$$



● 時間発展写像が満たすべき条件 I

$$\Lambda : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$

● 時間発展写像が満たすべき条件 II

$$\Lambda(p\rho_1 + (1-p)\rho_2) = p\Lambda(\rho_1) + (1-p)\Lambda(\rho_2)$$

Affine性

一般の時間発展

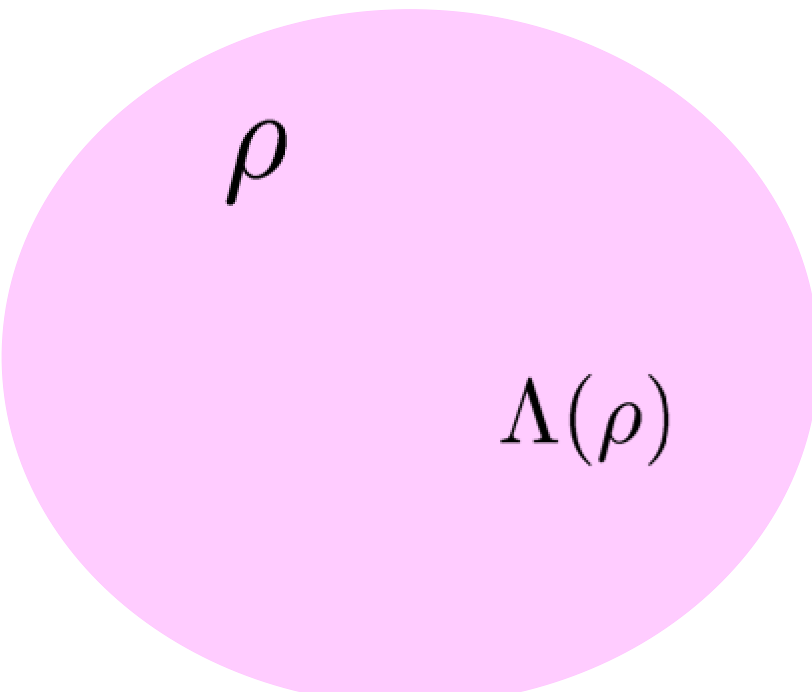
$$\boxed{\rho \mapsto \Lambda(\rho)}$$

Λ: 時間発展写像

(例) $\Lambda(\rho) = U\rho U^\dagger$: 孤立系

密度作用素の状態空間

$$\mathcal{S} = \{\rho |\, \mathrm{tr}\,\rho = 1, \rho \geq 0\}$$



● 時間発展写像が満たすべき条件 ①

$$\Lambda : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$

● 時間発展写像が満たすべき条件 ②

$$\Lambda(p\rho_1 + (1-p)\rho_2) = p\Lambda(\rho_1) + (1-p)\Lambda(\rho_2)$$

Affine性

一般の時間発展 (なぜAffine？)

$$p\rho_1 + (1-p)\rho_2 \simeq \{p, 1-p; \rho_1, \rho_2\}$$

時間発展 Λ

$$\Lambda(p\rho_1 + (1-p)\rho_2) \simeq \{p, 1-p; \Lambda(\rho_1), \Lambda(\rho_2)\}$$

$$\|$$

$$p\Lambda(\rho_1) + (1-p)\Lambda(\rho_2) \simeq \{p, 1-p; \Lambda(\rho_1), \Lambda(\rho_2)\}$$

Affine 性

一般の時間発展

$\mathcal{S} \subset M_d(\mathbb{C})$: 複素行列全体の集合

[定理] 条件①及び②を満たす写像Λは行列空間上へ
トレース保存かつ正写像へ拡張可能.

(1) $\Lambda' : M_d \to M_d$ が $\Lambda : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ の拡張：

$$\forall \rho \in \mathcal{S},\ \Lambda'(\rho) = \Lambda(\rho).$$

密度作用素を
密度作用素に
移動する！

(2) $\Lambda' : M_d \to M_d$ がトレース保存 (TP) 写像：

$$\forall A \in M_d,\ \mathrm{tr}\,\Lambda'(A) = \mathrm{tr}\,A$$

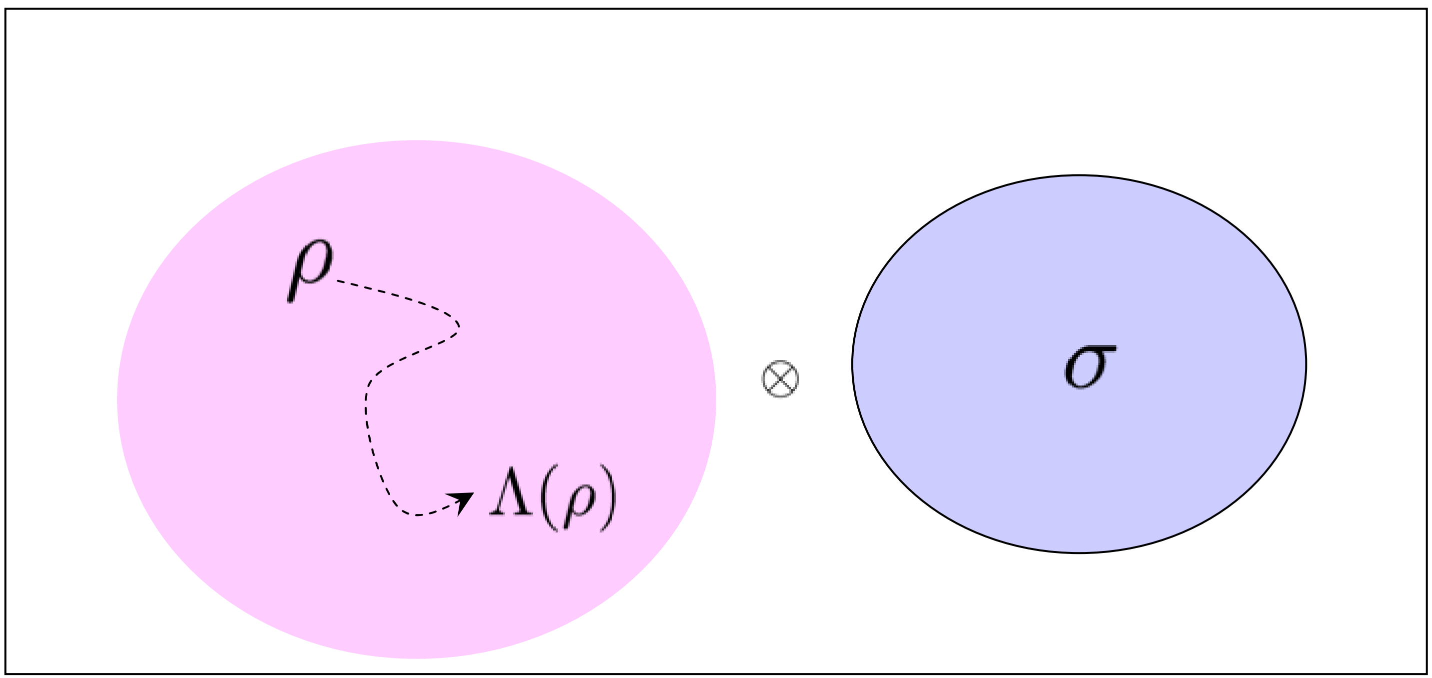
(3) $\Lambda' : M_d \to M_d$ が正写像：

$$\forall A \geq 0,\ \Lambda'(A) \geq 0$$

一般の時間発展 (完全正値性)

- 時間発展写像はトレース保存正写像である！
- さらに，合成系の整合性条件③を課すのが自然！

$\forall$ アンシラ系， $\Lambda \otimes Id$: 正写像! $\Rightarrow \Lambda$: 完全正 (CP) 写像



完全正写像

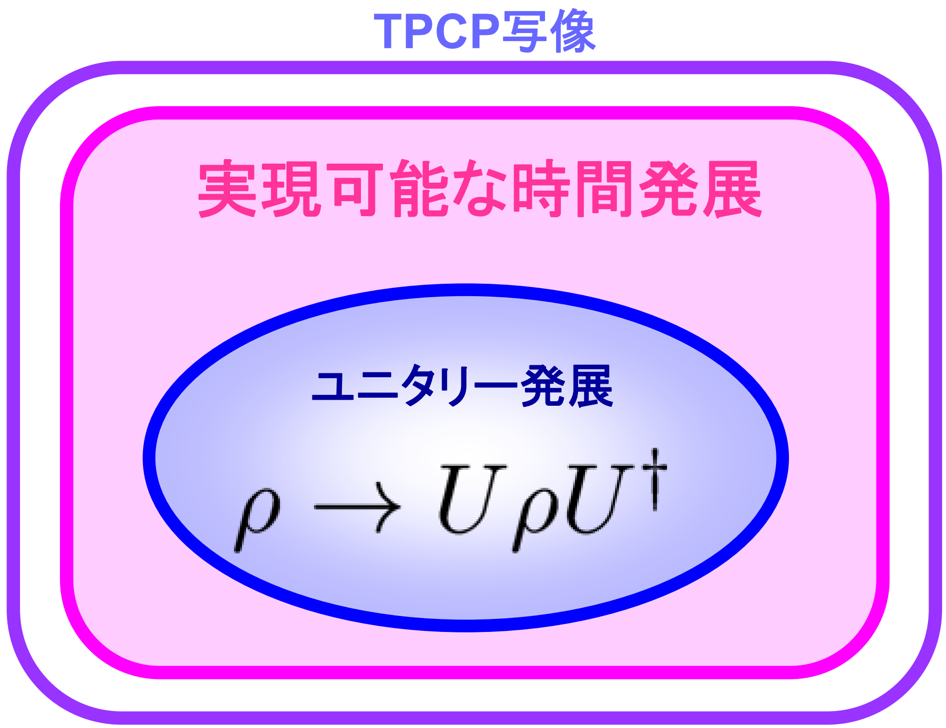
[定義] $M_d(\mathbb{C})$ 上の線形写像 Λ が次の条件を満たすとき，完全正写像とよばれる：

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Lambda \otimes id_n : M_d \otimes M_n \to M_d \otimes M_n \text{ は正写像}$$

[定理] 線形写像 $\Lambda : M_d \to M_d$ に対して，以下は同値：
(i) Λ は完全正写像
(ii) Λ は d 正写像
(iii) $\Lambda(|\psi\rangle\langle\psi|) \geq 0$, ただし，$\psi$ は最大エンタングルド状態
(iv) $\exists V_i \in M_d$ s.t.

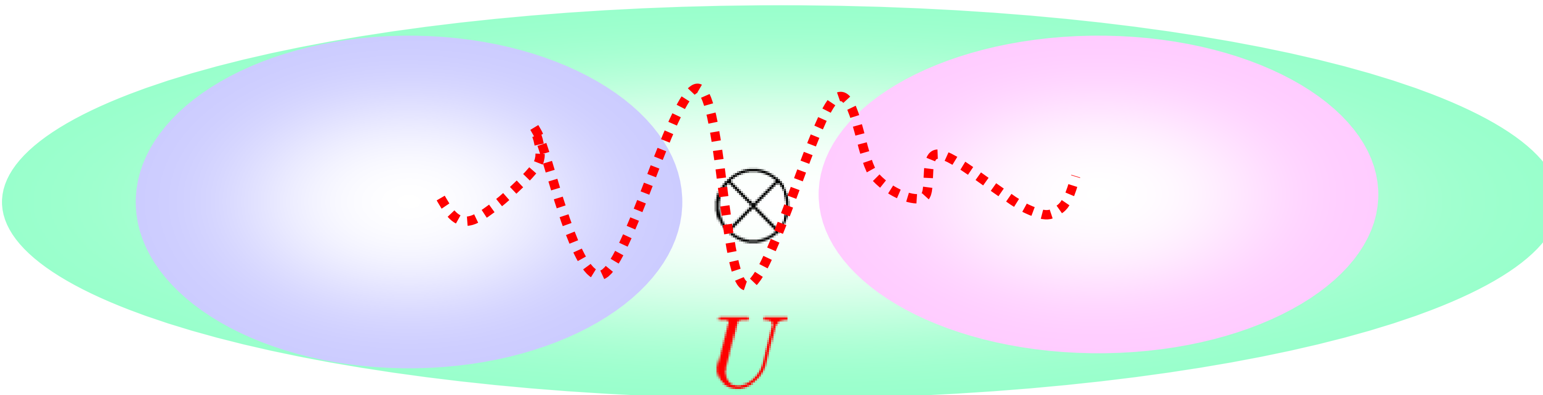
$$\Lambda(A) = \sum_i V_i A V_i^\dagger$$

一般の時間発展 (TPCP写像)



[定理] 任意のTPCP写像は実現可能な時間発展である:
任意のTPCP写像を実現する量子開放系モデルが存在！

量子開放系のダイナミクス

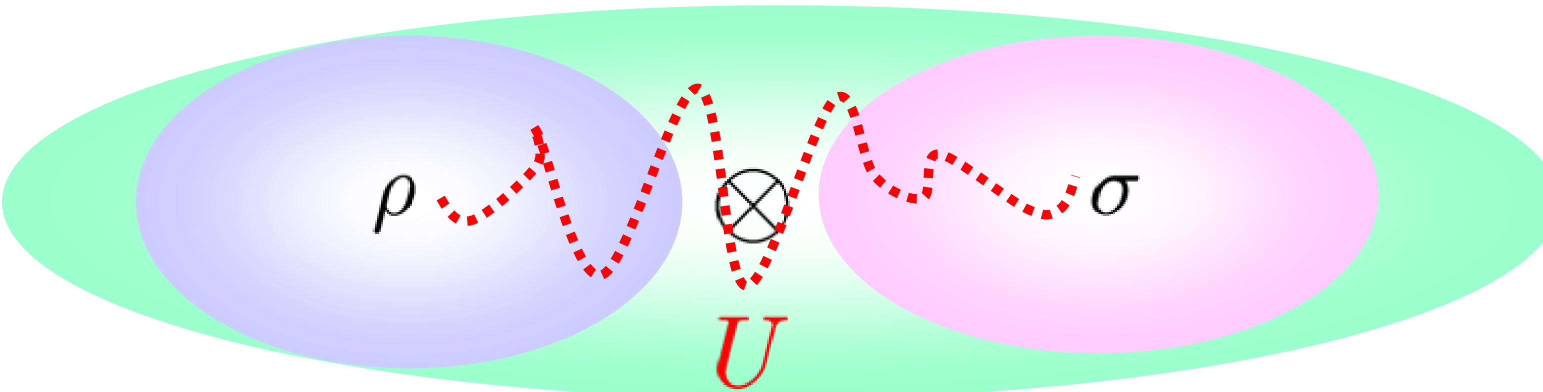


①一般に物理系は孤立系ではなく，
環境（熱欲）と相互作用する開放系である

Schrödinger方程式は全体系に適用することができる！

＝＞熱平衡化，非干渉化などの混合化プロセスは，
環境との相互作用によって説明できる！

量子開放系モデル（初期相関無し） $\rho \otimes \sigma$



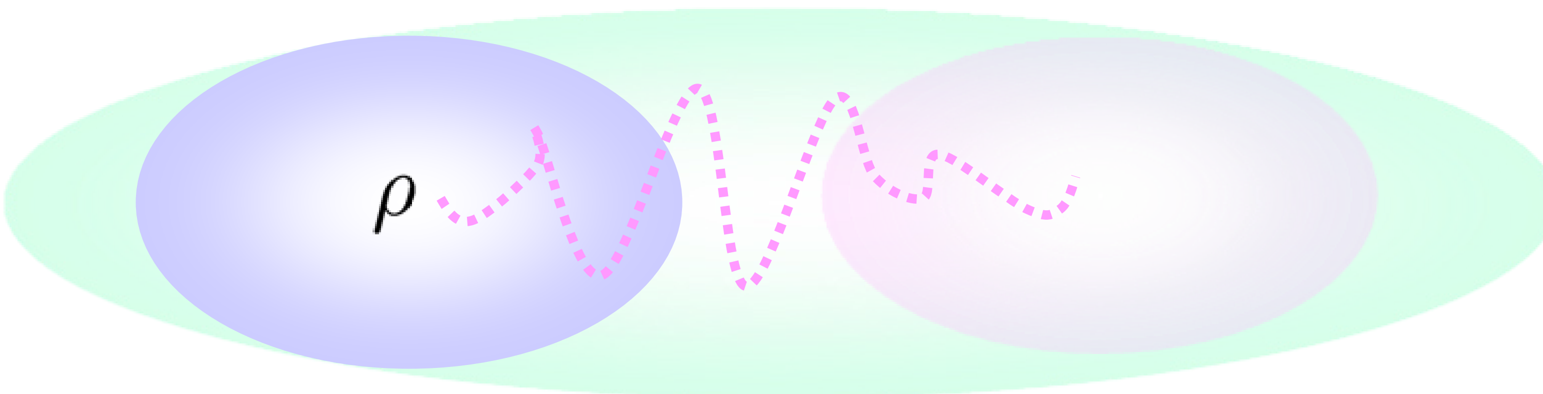
全体系

$$\rho \otimes \sigma$$

時間発展

$$U \rho \otimes \sigma U^\dagger$$

量子開放系モデル（初期相関無し） $\rho \otimes \sigma$



部分系

ρ

全体系

$\rho \otimes \sigma$

$\xleftarrow{\mathrm{tr}_B}$

時間発展

$\boxed{\Lambda(\rho) = \mathrm{tr}_B(U\rho \otimes \sigma U^\dagger)}$

$U\rho \otimes \sigma U^\dagger$

一般の測定過程

Davies and Lewis, Ozawa etc

測定過程

- 測定過程は(1)測定値を得る確率 p_i (2)測定後の状態 ρ_i の両者を記述

（注）POVM測定は（1）のみ，測定後の状態は考えない！

- 測定後の状態は，その後の測定に関する予言を与えるもの！

（注）その後の測定を考えてはじめて測定後の状態の操作論的意味がでる！

測定過程の条件(継続測定のAffine性)

$$p(i,j,\rho) = \Pr\{i, j\ |A_1, A_2, \rho\}\text{: 継続測定の同時確率}$$

$$\Rightarrow p(i,j,\rho)\text{: affine of } \rho.$$

$$p(i,j,\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2) = \lambda p(i,j,\rho_1) + (1-\lambda)p(i,j\rho_2).$$

(注) 理由は時間発展写像のaffine性とまったく同じ

測定過程の条件(継続測定のAffine性)

$$\Pr\{i, j \mid A_1, A_2, \rho\} = \boxed{\Pr\{i \mid A_1, \rho\}}\Pr\{j | A_2, \boxed{\rho_i}\}$$

●A2の測定後の状態は考える必要がないので，A2はPOVM測定を考えればよい

$$= \mathrm{tr}(M_j p_i \rho_i) \quad (p_i = \Pr\{i | A_1, \rho\})$$

⇨ 写像 $\rho \to \mathcal{I}_i(\rho) := p_i \rho_i$ を考える！

$$\boxed{\Pr\{i,j\,|A_1,A_2,\rho\} = \mathrm{tr}(M_j\mathcal{I}_i(\rho)):\ \text{affine}}$$

$\forall(M_j)$ ⇒ $\mathcal{I}_i$ は正写像

（注）時間発展写像のときの線形拡張定理と同じ理由

さらに合成系との
整合性条件より ⇒ $\boxed{\mathcal{I}_i \text{ は CP 写像}}$

規格化条件 $\mathrm{tr}(\sum_i \mathcal{I}_i(\rho)) = \mathrm{tr}(\sum_i p_i\rho_i) = 1$

⇒ $\boxed{\sum_i \mathcal{I}_i \text{ は TPCP 写像}}$

Instrument

[定義] M_d 上の線形写像の組 $(\mathcal{I}_i)$ が Instrument であるとは,
(1) $\mathcal{I}_i$ は CP 写像, (2) $\sum_i \mathcal{I}$ は TPCP

[定理] 測定過程は Instrument によって記述される：

$$(1)\ \Pr\{i|\rho\} = \mathrm{tr}\,\mathcal{I}_i(\rho)$$

$$(2)\ \rho_i = \mathcal{I}_i(\rho)/\,\mathrm{tr}(\mathcal{I}_i(\rho))$$

Instrument

[定義] (射影測定) (P_i) を PVM 測定とする．
測定過程が次を満たすとき射影測定と呼ぶ．

$$(1)\ \Pr\{i|\rho\} = \mathrm{tr}(P_i\rho)$$

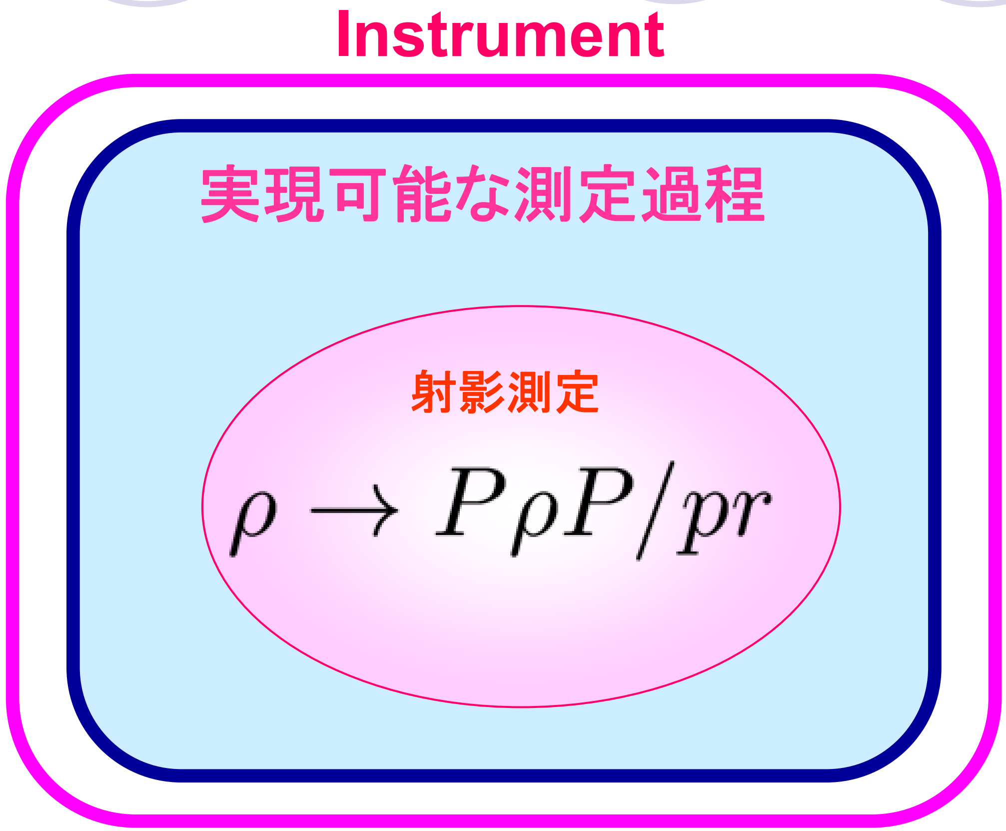
$$(2)\ \rho_i = P_i\rho P_i / \mathrm{tr}(P_i\rho)$$

[定理] 射影測定は Instrument である:

$$\mathcal{I}_i(\rho) = P_i\rho P_i$$

逆は成立しない！

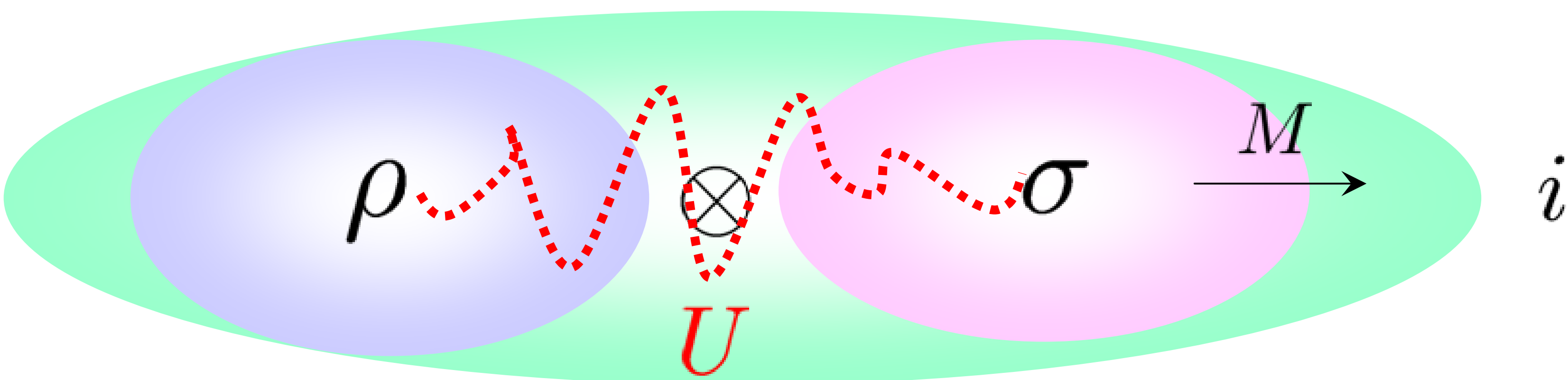
任意のInstrumentは実現可能



[定理] 任意のInstrumentは実現可能な測定過程である:
任意のInstrumentを実現する間接測定モデルが存在！

間接測定モデル

測定の役割:
系の情報を引き出す！



①状態をρに準備　　②他の系（測定装置）をσに準備

③ 全体系でユニタリー発展させる（相互作用）

④ 測定装置の物理量を測定する！

間接測定モデル⇒測定過程

間接測定後の系Sの状態は？

$$\boxed{\mathrm{tr}[\eta E_i \otimes P_i] = \mathrm{Pr}\{i|M,\eta\}\,\mathrm{tr}(\rho_i E_j)\ \forall POVM\ (E_i)}$$

$\eta := U\rho\otimes\sigma U^\dagger$: 相互作用後の状態

ρ_i : 測定後の系 S の状態

$$\boxed{\mathrm{Pr}\{i|M,\eta\} = \mathrm{tr}[\eta\,\mathbb{I}\otimes P_i]}$$

$$\boxed{\rho_i = \frac{\mathrm{tr}_B[U\rho\otimes\sigma U^\dagger\,\mathbb{I}\otimes P_i]}{\mathrm{tr}[U\rho\otimes\sigma U^\dagger\,\mathbb{I}\otimes P_i]}}$$

測定演算子との関係

[定義] (M_i): 測定演算子 if $\sum_i M_i^\dagger M_i = \mathbb{I}$

[定義] 測定演算子 (M_i) による測定：

$$(1)\ \Pr\{i|\rho\} = \mathrm{tr}(\rho M_i^\dagger M_i)$$
$$(2)\ \rho_i = M_i \rho M_i^\dagger / \mathrm{tr}(M_i^\dagger M_i \rho)$$

[命題] 測定演算子 (M_i) による測定は Instrument である：

測定演算子との関係

任意のInstrument

$$\forall(\mathcal{I}_i):\ \text{Instrument},\ \mathcal{I}_i(A) = \sum_j K_j^{(i)} A {K_j^{(i)}}^\dagger$$

$$\sum_{i,j} {K_j^{(i)}}^\dagger K_j^{(i)} = \mathbb{I}$$

Corse-grained Measurement Operator

Instrument ⇔ Corse Grained 測定演算子

表現定理：まとめ

[定理 1] 任意の POVM を実現する間接測定モデル $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ が存在する

[定理 2] 任意の CPTP を実現する量子開放系モデル $(\mathcal{K}, \sigma, U)$ が存在する

$M = \mathbb{I}$

[定理 3] 任意の Intstument を実現する間接測定モデル $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ が存在する

まとめ

状態	$\|\psi\rangle$:単位ベクトル	ρ : 密度行列
測定	$A=\sum_i a_i P_i$:エルミート行列	$(M_i)_i$: POVM
確率	$\langle\psi\|P_i\|\psi\rangle$	$\mathrm{tr}(\rho M_i)$
時間発展	$\rho \to U\rho U^\dagger$	$\rho \to \Lambda(\rho) : CPTP$
測定過程	$\rho \to P\rho P/p$: 射影	$\rho \to \mathcal{I}_i(\rho)/p$: Instrument

不確定性原理

- **Heisenbergの不確定性原理**

$$\epsilon(x)\eta(p) \geq \frac{\hbar}{2}$$

- **任意の測定に対する不確定性原理（小澤の不等式）**

$$\epsilon(A)\eta(B) + \epsilon(A)\Delta(B) + \Delta(A)\eta(B) \geq \frac{1}{2}|\,\mathrm{tr}[A,B]\rho|$$

$\epsilon(A)$: Noise of A, $\eta(B)$: Disturbance of B