

## 熱雑音下のビット誤り率 ～デジタル変調方式に対する BER 推定の基本～

唐沢好男

このレポートでは熱雑音による伝送誤りを扱う。各種変復調方式に対するビット誤り率 (BER) 計算式導出の考え方やその計算式をまとめている。これまでも、無線通信の教科書や専門書では、デジタル変復調方式やマルチパスフェージング下でのビット誤り率 (BER) の説明に多くのページが割かれているが、誤り率推定の基本的な考え方を中心に、もう少し詳細なところに踏み込んでみたい。このシリーズの他のレポートで、周波数選択性フェージングや高速フェージングでの誤り発生メカニズムと BER の定量的推定を取り上げているが[1], [2]、本レポートはその出発点を与えるものである。

### 1. デジタル変復調方式

#### 1. 1 デジタル変調

##### (1) デジタル変調とは

変調方式には、連続的に変化するベースバンド信号を電波の振幅・位相・周波数に乗せるアナログ変調方式と、1と0で構成されるビット列を符号化して電波に乗せるデジタル変調方式がある。ここでは、デジタル変調方式を対象にする。

デジタル変調方式の場合は、ビット列を符号化して IQ 複素平面上の点にどのような形でマッピングさせるかが変調方式の違いであって、マッピングされた複素ベースバンド信号を電波に乗せる (アップコンバージョンする) のは方式によらず共通である。

デジタル通信は、ビット列の情報を送る通信である。ビット列をそのままの時系列で送るのではなく、いくつかのビットをまとめて符号 (シンボル) 化し、その符号を単位として一定周期 (シンボル周期) 毎に変えてゆくのが共通になる。例えば QPSK と呼ばれる変調方式では、2 ビットで4種類の符号を作る。00, 01, 10, 11 のビットに対して、複素数面 (I 軸 (実数軸) と Q 軸 (虚数軸) で構成される) 上の円周上の中心角  $45^\circ$ ,  $-45^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $-135^\circ$  の4点に対応付けする。そして、これをアナログ信号に変えて電波で送り出す仕組みである。

デジタル変調での信号点多値化の方式には大きく分けて三つのタイプが有る。IQ 面上での信号点の配置を円周上の等間隔に配置する位相シフトキーイング (PSK; Phase Shift Keying)、振幅と位相の両方を使う直交振幅変調 (QAM; Quadrature Amplitude Modulation)、そして、信号点の位置の代わりに異なる周波数を割り付ける (別の言葉で言うと、信号点の位相回転速度を符号によって変える) 周波数シフトキーイング (FSK; Frequency Shift Keying) である。PSK と QAM は線形変調方式、FSK は非線形変調方式に分類される。線形変調方式は周波数利用効率の増大を目指す場合に、非線形変調方式は送信電力効率を追求する場合に採用される。近年の無線通信では周波数利用効率が大事になるため線形変調への流れが

ある。本レポートでも、PSK と QAM に焦点を当てて解説する。

(2) 代表的な変調方式

PSK 系で、1 シンボルで 1 ビット伝送するのが BPSK (Binary PSK)、2 ビット伝送するのが QPSK (Quaternary PSK)、1 シンボル毎に信号点の位置を  $\pi/4$  回転させて、帯域制限フィルタ挿入時の振幅変化を小さくした QPSK が  $\pi/4$  シフト QPSK ( $\pi/4$ -QPSK) である。さらに信号点の数を 8, 16 に増やした PSK として 8 相 PSK (8-PSK)、16 相 PSK (16-PSK) がある。図 1 (a) は BPSK, QPSK, 8 相 PSK の信号点配置と対応するビットの関係を示している。信号点配置図は信号空間ダイアグラム (コンステレーション (星座の意味)) と呼ばれる。

QAM は振幅と位相の両方を使って、信号点を空間に均一に配置する変調方式である。正方形配置が代表的で、図 1 (b) は 1 シンボルで 4 ビットを伝送する 16 値 QAM (16QAM)、6 ビット伝送する 64 値 QAM (64QAM) の信号点配置である。さらに多値度を上げた 256QAM (8 ビット)、1024QAM (10 ビット) などがある。

後述する誤り率解析で分かるように、受信時に起きる復号誤りは隣接の信号点を間違っ  
て読んでしまう確率が一番高い。この影響を最小にするために、隣接信号点間では、ビット  
の配置で 1 ビットだけ違うように割り当てる工夫を行う。このような指針で割り当てられ  
た符号はグレイ符号と呼ばれる。図 1 では、8-PSK と 16QAM についてグレイ符号によるビ  
ット割り当てを示している。

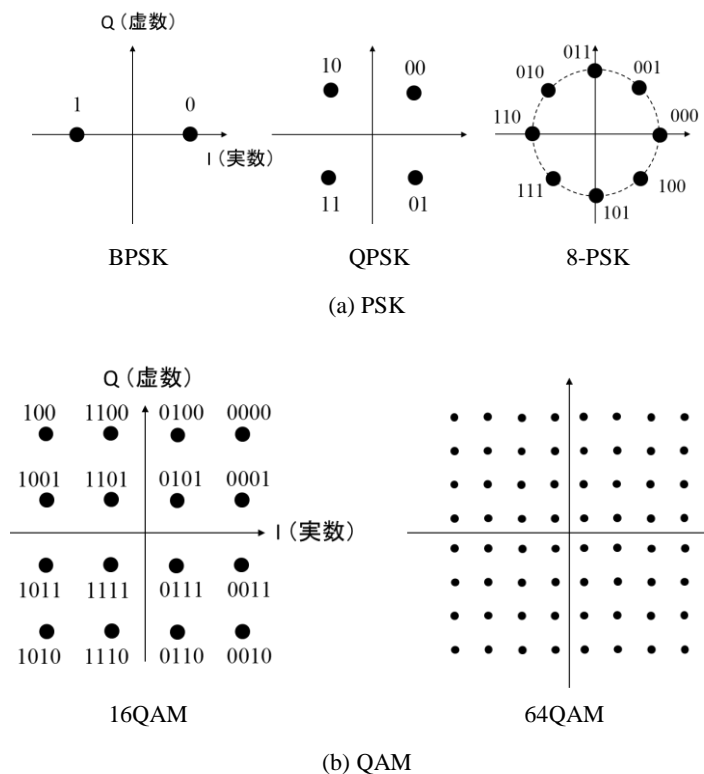


図 1 代表的なデジタル変調方式の信号空間ダイアグラムとグレイ符号によるビット割り当て

### (3) ナイキストフィルタ

シンボル周期  $T_s$  毎に、一つの信号点から次の信号点に移って行くが、矩形パルスのように不連続に状態が切り替わると周波数帯域の広い範囲に亘ってスペクトルが現われるので、効率のよい周波数利用のため帯域制限フィルタ（波形整形フィルタ）が送受信の双方で用いられる。このときのフィルタ特性には、受信側でのデータサンプル点において前後のシンボルが干渉しないことが求められる。この基準を満たしたフィルタはナイキストフィルタと呼ばれる。ナイキストフィルタとして下記の特性を持つフィルタ ( $H_{NF}$ :周波数特性、 $h_{NF}(t)$ :時間応答特性) が広く用いられている。

$$H_{NF}(f) = \begin{cases} 1 & \left( 0 < |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_s} \right) \\ \frac{1}{2} \left[ 1 - \sin \left\{ \frac{\pi}{2\alpha} (2|f|T_s - 1) \right\} \right] & \left( \frac{1-\alpha}{2T_s} < |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_s} \right) \\ 0 & \left( \frac{1+\alpha}{2T_s} < |f| \right) \end{cases} \quad (1)$$

$$h_{NF}(t) = \frac{\sin(\pi t / T_s) \cos(\pi \alpha t / T_s)}{\pi t / T_s \cdot 1 - (2\alpha t / T_s)^2} \quad (2)$$

このフィルタはレイズドコサインロールオフ (raised cosine roll-off) フィルタと呼ばれる。パラメータ  $\alpha (\leq 1)$  はロールオフファクタと呼ばれ、周波数特性変化の滑らかさを決める。通常、 $\alpha = 0.5$  付近に設定される。式(2)は、フィルタのインパルス応答であるが、入力パルスがデルタ関数的に与えられるときの、そのパルスに対する時間波形である。この波形をサンプルタイミングに相当する時間  $t = nT_s$  ( $n$  は 0 以外の整数) ごとにみると、全て 0 になっており、符号間干渉が発生しないフィルタであることが確かめられる。このフィルタ特性は、送信フィルタと受信フィルタの総合特性を与えるものであり、実際には送受でほぼ均等に分担して総合特性を実現する。

## 1. 2 検波方式

受信側では、受信した信号の復調を行う。復調とは変調によって電波に乘せられた情報を電波から降ろす技術である。もとのベースバンド信号に戻す方法には同期検波(coherent detection)と遅延検波(differentially coherent detection)の二つの方式がある。同期検波は受信信号から搬送波周波数を再生し、その再生された信号を位相基準に用いる方法である。遅延検波は位相基準として 1 シンボル前の自分自身の信号を用いる方法である。前者は周波数純度の高い (= 位相が安定した) 搬送波再生に一定の時間 (数シンボル時間以上の積分) が必要になるが、その分、復調信号の SN 比 (信号対雑音電力比) 劣化を小さくできる。遅延検波は高速な時間変動に対しても追随性が良いが、基準位相にも雑音が含まれるため SN

比特性は同期検波に比べて 1~3dB 劣っている。

遅延検波は検波の仕組みからも分かるように、このままだと送信情報系列とは別な符号系列が出力される。このため、検波時に送信符号が得られるよう送信側で差動符号化が行われる。遅延検波は位相差のみで受信情報を読みとることができる PSK 方式と相性が良い。図 2 は  $M$  相 PSK の場合の差動符号化と遅延検波の回路構成とその動作を表している。差動符号化は、通常、論理式の演算で求めて行くが、図では、アナログ回路の機能ブロック図で示している。16QAM, 64QAM などの振幅変化も含む多値変調方式では遅延検波後の情報再生（復号）が難しいので同期検波が一般的である。遅延検波 PSK 方式は DPSK (Differential PSK), 個別の BPSK, QPSK に対しては DBPSK, DQPSK と呼ばれる。

同期検波では、搬送波再生位相に不確定性を有する (BPSK では 0 と  $\pi$ )。これによって検波時に符号反転が生じる可能性があり、かつ、この誤りは一旦発生すると連続するので、送信信号にこの対策を組み入れる (既知のパイロット信号を与える等の) 必要がある。一方、差動符号化/遅延検波では、この問題はなく、いったん発生した誤りも 2 シンボル以内に収まる。

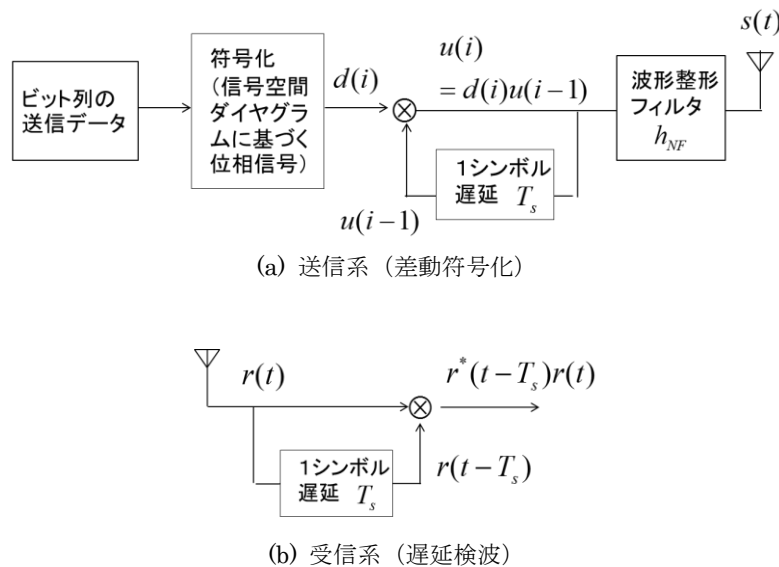


図 2  $M$  相 PSK の差動符号化と遅延検波 (受信側の掛け算は位相基準信号が複素共役)

## 2. 信号電力一定下での熱雑音による誤り

### 2. 1 信号と雑音の電力比

通信の障害となる雑音にはいろいろの種類があるが、最も一般的でかつ重要なのは受信機の前段に現われる熱雑音である。ベースバンド帯域で見した場合の熱雑音には以下の性質がある。

- ① 雑音の瞬時の大きさは IQ 複素数面上のそれぞれの軸上に独立な正規分布  $N(0, \sigma^2)$  をする。すなわち、IQ 面上での 2 次元正規分布であり、振幅 (原点からの大きさ) はレイリー分布する。

- ② 平均電力のスペクトル密度は周波数に対して一様である。ただし、受信機に帯域制限フィルタが入るので、通過帯域内においてである。
- ③ 帯域制限フィルタが入った回路では、シンボル周期間隔  $T_s$  のサンプリング毎に、標本値は独立である、一方、 $T_s$  より短い時間での標本値にはフィルタの特性に応じて相関がある。
- ①と②の性質により、熱雑音は加法性白色ガウス雑音 (Additive White Gaussian Noise: AWGN) と呼ばれる。

各種変調方式に対するビット誤り率 (Bit Error Rate: BER) は信号電力と雑音電力の比の関数で表される。この比の表し方には、以下の三つがある。

CNR (carrier-to-noise power ratio : 搬送波対雑音電力比) :

搬送波電力と雑音電力の比。高周波信号に対する表現。

SNR (signal-to-noise power ratio: 信号対雑音電力比) :

検波後の信号の平均電力と雑音電力の比。ベースバンド信号 (検波後の信号) に対する表現

$E_b/N_0$  : 1 ビット当たりの信号電力 (信号電力密度) と 1Hz 当たりの雑音電力 (雑音電力密度) の比

SNR の関数として BER の理論式が導かれるという意味で、また一方、CNR は計算機シミュレーションなどにおいて、電力設定がしやすいという意味で、SNR と CNR はそれぞれ、同じ程度によく用いられる。一方、BPSK や QPSK の変調方式に対して BER vs. CNR (or SNR or  $E_b/N_0$ ) のグラフを書こうとするとき、信号と雑音の電力比の定義の違いに混乱することが多い。ここでは、その直感的理解を与え、混乱が起きないように整理する。

上記の定義 (一般的な教科書で行われている定義) では、CNR は高周波信号に対する表現、SNR はベースバンド信号に対する表現としているが、両方ともベースバンド (IQ 面) での定義にした方がわかりやすいであろう。(注: 変調信号に搬送波周波数成分が残っている場合には、その電力も含めて考えないといけないが、ここで対象としている PSK や QAM では搬送波の全電力が情報信号に与えられている)。

SNR: 検波軸 (I 軸) 上の信号電力  $P_{S,I}$  と、検波軸上の平均雑音電力  $P_{N,I}$  の比

CNR: 信号の全電力  $P_{S,I+Q}$  と、雑音の全平均電力  $P_{N,I+Q}$  の比

このように定義すると、BPSK では、CNR と SNR は図 3 (a) より、次式となる。

$$\left. \begin{array}{l} P_{S,I} = r^2 \\ P_{N,I} = \sigma^2 \end{array} \right\} \quad SNR = \frac{P_{S,I}}{P_{N,I}} = \frac{r^2}{\sigma^2} \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_{S,I+Q} = r^2 \\ P_{N,I+Q} = 2\sigma^2 \end{array} \right\} \quad CNR = \frac{P_{S,I+Q}}{P_{N,I+Q}} = \frac{r^2}{2\sigma^2} \quad (4)$$

QPSK では、図(b)より、次式となる。

$$\left. \begin{array}{l} P_{S,I} = r^2 / 2 \\ P_{N,I} = \sigma^2 \end{array} \right\} \quad SNR = \frac{P_{S,I}}{P_{N,I}} = \frac{r^2}{2\sigma^2} \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_{S,I+Q} = r^2 \\ P_{N,I+Q} = 2\sigma^2 \end{array} \right\} \quad CNR = \frac{P_{S,I+Q}}{P_{N,I+Q}} = \frac{r^2}{2\sigma^2} \quad (5)$$

ゆえに、次式のように整理できる。

$$SNR = 2CNR = \frac{r^2}{\sigma^2} \quad \text{for BPSK} \quad (6)$$

$$SNR = CNR = \frac{r^2}{2\sigma^2} \quad \text{for QPSK} \quad (7)$$

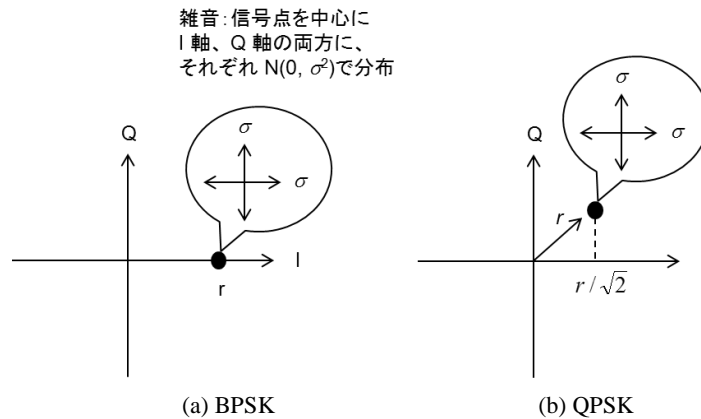


図3 IQ面上(ベースバンド信号)でみた信号成分と雑音成分

$E_b/N_0$ は異なる変調方式のBER特性を電力効率で比較するときに用いられる。1シンボル当たりの伝送ビット数を  $k$  (BPSK では  $k=1$ 、QPSK では  $k=2$  など)、シンボル周期を  $T_s$ 、受信フィルタの等価雑音帯域幅を  $B$  とすると、

$$E_b = \frac{T_s P_{S,I+Q}}{k} \quad (8a)$$

$$N_0 = \frac{T_s P_{N,I+Q}}{B} \quad (8b)$$

$$E_b / N_0 = \frac{BT_s P_{S,I+Q}}{kP_{N,I+Q}} \quad (8c)$$

受信フィルタが整合フィルタであれば  $BT_s=1$  (このような設計が普通) であるので、この場合、求める  $E_b/N_0$  は CNR との関係で次式のようになる

$$E_b / N_0 = \frac{P_{S,I+Q}}{kP_{N,I+Q}} = \frac{1}{k} \text{CNR} \quad (9)$$

## 2. 2 各種変調方式に対する BER 特性

それぞれの変復調方式に対する BER 推定の基本的な考え方と具体的な計算式や BER 特性を示す。

### 2. 2. 1 PSK

#### (1) BPSK

全ての出発点はここにあると言う基本。振幅  $A$  の信号点 (ビット 0) を中心に複素ガウス分布する雑音がある (図 4)。CNR  $\gamma$  は  $A^2/(2\sigma^2)$  である。実数軸 (I 軸) の変数  $x=A+n_I$  ( $n_I$ : 雑音の I 軸成分) に対して、 $x$  の確率密度関数は次式で与えられる正規分布である。

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (10)$$

このとき、ビットが誤る確率  $P$  は  $x \leq 0$  の範囲なので

$$\begin{aligned} P_{BPSK} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{-A} \exp\left(-\frac{x'^2}{2\sigma^2}\right) dx' \quad (x' = x - A) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_A^{\infty} \exp\left(-\frac{x'^2}{2\sigma^2}\right) dx' \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma}) \quad \left(\gamma = \frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここで、erfc は誤差補間数で次式で与えられる。

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (12)$$

ビット 1 に対応する  $-A$  の信号点が誤る確率も同じであり、かつ、ビット 0, 1 の発生確率も  $1/2$  と等しいので、式(11)が BPSK 方式の BER を表す式（厳密式）である。

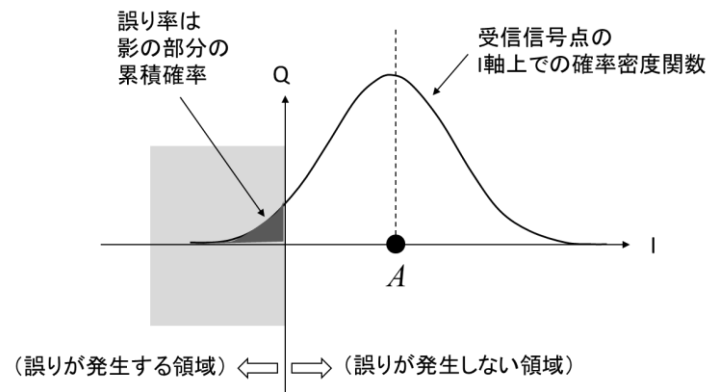


図4 BPSK で誤りが発生する範囲（確率密度関数の縦軸は I 軸方向に対する確率密度）

## (2) QPSK

QPSK は 2 ビットを伝送する方式であり、最初のビットを Q 軸の正負で、2 番目のビットを I 軸の正負で判定すると考えると、検波軸が直交してお互いのビット判定に影響がなく BPSK と同じことであり、違うのはビット当たりの電力が半分、すなわち、 $A^2$  が  $A^2/2$  になっていることである。CNR  $\gamma$  自体は BPSK も QPSK も  $A^2/(2\sigma^2)$  で同じであることから、QPSK の BER は

$$P_{QPSK} = \frac{1}{2} \text{erfc} \left( \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \right) \quad (13)$$

となる。シンボル内のビット単位で誤り率を出しているので、ビット誤り率として厳密式である。ただ、上記の考え方には、シンボルが 1 ビット誤りなのか 2 ビット誤りなのかの議論が無く、不安を感じる人もいると思うので、以下の説明で(13)式が厳密式であることのダメ押しをしたい。

図5に示すように、信号点の位置を 4 つの象限に分け、正しい位置が第 1 象限にある場合を考える。雑音下の受信信号点がそれぞれの象限にある確率を  $p_1, p_2, p_3, p_4$  とすると、 $p_2=p_4$  である。第一象限に正しい信号点があるときのビット誤り率  $P_1$  は



$$P_1 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{2}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_4 = p_2 + p_3 \tag{14}$$

この  $p_2+p_3$  は信号点の実軸の負側にある確率で、BPSK で求めた(11)式そのもの(ただし、 $\gamma \rightarrow \gamma/2$ ) なので(13)式となり、どの象限もビット誤り率は同じであるので、(13)式は厳密式である。

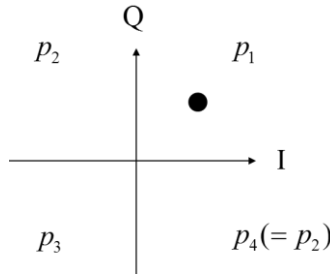


図5 QPSK の誤り率算定に関する一つの考え方の説明図

(●は正しい信号点 (=送信信号点) の位置、そのとき、象限  $i$  に受信信号点がある確率を  $p_i$ )

### (3) 多相 PSK

BPSK は 2 相 PSK、QPSK は 4 相 PSK であるが、ここでは一般的な  $M (=2^k)$  相 PSK の誤り率を求める。ただしこちらはやや手強い。

図6に示すように、着目する信号点の位置を I 軸上の  $x=A$  に置く。雑音下での実際の受信点を原点 ( $x=0$ ) からの振幅と位相  $r$  と  $\phi$  で表すと、その結合確率密度関数  $f_{r\phi}(r, \phi)$  は、仲上・ライス分布を導いた途中式に現われているように、以下の式になる[3]。

$$f_{r\phi}(r, \phi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2 - 2Ar \cos \phi + r^2}{2\sigma^2}\right) \tag{15}$$

これより、位相  $\phi$  の確率密度関数  $f_\phi(\phi)$  は、

$$f_\phi(\phi) = \int_0^\infty f_{r\phi}(r, \phi) dr = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \times \left[ 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A \cos \phi}{\sigma} \exp\left(\frac{A^2 \cos^2 \phi}{2\sigma^2}\right) \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{A \cos \phi}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right\} \right] \tag{16a}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp(-\gamma) \left[ 1 + \sqrt{\pi\gamma} \cos \phi \exp(\gamma \cos^2 \phi) \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\gamma} \cos \phi\right) \right\} \right] \tag{16b}$$

となる ((16a)式は仲上・ライスフェージング環境での位相分布の式としてお馴染み)。ここ

で erf は誤差関数で、次式で与えられる。

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erfc}(x) \quad (17)$$

$M=2^k$  ( $k$  は自然数で、 $k=\log_2 M$ ) で与えられる  $M$  相 PSK の場合、グレイ符号の性質により、受信信号点が隣の信号点区間に入った場合のビット誤り率は  $1/k$ 、さらに、その隣の区間に入った場合には  $2/k$  となる。ゆえに、BER は次式で算定できる。

$$P_{M-PSK} = \begin{cases} \frac{1}{2} \times 2 \times \int_{\pi/4}^{3\pi/4} f_{\phi}(\phi) d\phi + \frac{2}{2} \times 2 \times \int_{3\pi/4}^{\pi} f_{\phi}(\phi) d\phi & (M=4 \text{ (QPSK)}) \\ \frac{1}{\log_2 M} \times 2 \times \int_{\pi/M}^{3\pi/M} f_{\phi}(\phi) d\phi + \frac{2}{\log_2 M} \times 2 \times \int_{3\pi/M}^{5\pi/M} f_{\phi}(\phi) d\phi + \varepsilon_p & (M \geq 8) \end{cases} \quad (18a,b)$$

$M \geq 8$  の場合の  $\varepsilon_p$  は 2 隣接以上に離れた区間の誤り率で、CNR がある程度大きい場合 (例えば  $\gamma > 1$  (0dB)) には無視できる量である。式(18)を積分を解いた閉形式で表すことは不可能に思え、 $\gamma \gg 1$  の条件の下での近似式が次式のように得られている。

$$P_{M-PSK} \approx \frac{1}{\log_2 M} \operatorname{erfc} \left( \sin \frac{\pi}{M} \sqrt{\gamma} \right) \quad (M \geq 8) \quad (19)$$

(注：QPSK については(13)式も(18a)式も数学的に近似なく同じものを扱っているの、(18a)式を突き詰めて行けば、(13)式に至るはずである (が筆者には力が及ばない))。

図は、 $M=4$  (QPSK), 8, 16, 32 について、(18)の積分式の数値計算結果と計算式(13), (19)の値 (PSK\_calc) を比較して示している。 $M=8, 16, 32$  については、積分式で、第 1 項のみ (PSK\_int\_1:隣接区間での誤り) と第 2 隣接区間まで (PSK\_int\_2) の BER を示していて、 $\varepsilon_p$  の項を除いているので近似式であることには変わらない。同図より以下のことが分かる。

- ① QPSK では、両手法が完全に一致している。理論式同士なので合って当然であるが、積分式での考え方や積分精度の確認にはなっている。
- ②  $\gamma$  が 0dB 以下の超低 CNR 領域では、隣接区間のみの考慮ではずれが大きくなるが、 $\gamma$  が 0dB 以上で、かつ、BER が 0.1 以下の領域では、隣接区間のみの考慮と第 2 隣接までの考慮とで差が小さく、隣接区間のみの考慮で十分である。
- ③ 近似計算式 (19) は CNR の全体に亘ってよい近似になっており、実用的な意味で十分である (=安心して使ってよい)。

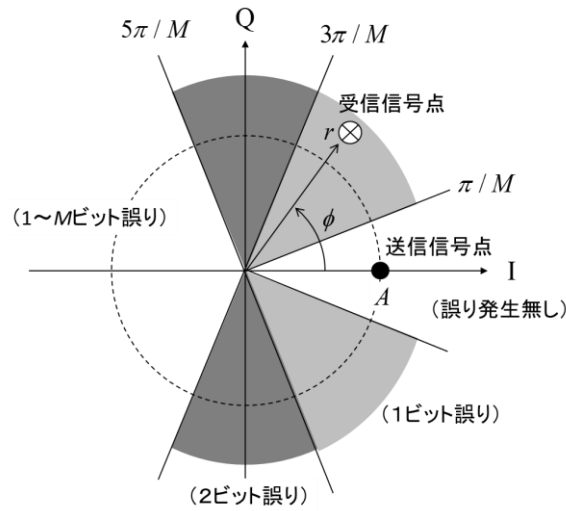


図6 M-PSK での誤り発生エリア (グレイ符号の場合 ; 図は M=8 の角度で描いている)

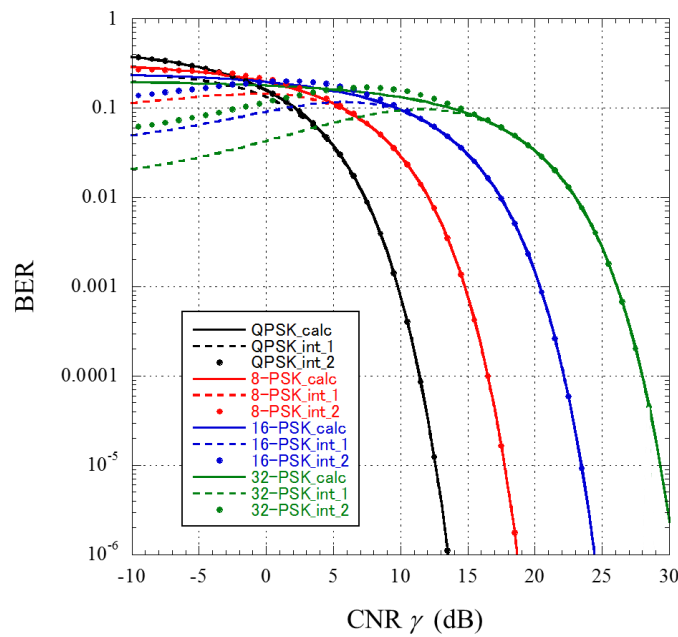


図7 M相 PSK における各種計算法の比較 (M=8, 16, 32 の積分式(18)で、 $\gamma < 0$  [dB]部分において、CNR が低下するに従い BER が小さくなる傾向が見られるが、これは誤り発生が無視できない第3隣接区間以降が考慮されていないため)

#### (4) PSK 方式の遅延検波 (DPSK)

PSK 方式の遅延検波では、現タイミング  $i$  の信号  $r(iT_s)$  の位相と 1 シンボル時間前の信号  $r((i-1)T_s)$  の位相の差によって送信符号を判定する。すなわち

$$r(iT_s)r^*((i-1)T_s) \Rightarrow \phi_i + \Delta\phi \tag{20}$$

このうち、 $\phi$ は送信情報であり、 $\Delta\phi$ が雑音による誤差である。 $M$ 相 PSK では、この誤差が、 $\pi/M$ 以上になると誤りが発生することになる。そこでこの問題は、二つの独立な位相分布の差の分布を求めればよいということになる。それぞれの位相の分布は(16)式で与えられるので、差の分布はそれを求める公式に入れればよい。確率変数の差の分布を求める公式は [3] (の(3.19)式) により

$$f_{\Delta\phi}(\Delta\phi) = 2 \int_0^\pi f_\phi(\phi + \Delta\phi) f_\phi(\phi) d\phi \quad (21)$$

であり、誤り率は(18)式と同様に

$$P_{M-DPSK} = \begin{cases} 2 \int_{\pi/2}^\pi f_{\Delta\phi}(\Delta\phi) d\Delta\phi & (M = 2 \text{ (DBPSK)}) \\ \int_{\pi/4}^{3\pi/4} f_{\Delta\phi}(\Delta\phi) d\Delta\phi + 2 \int_{3\pi/4}^\pi f_{\Delta\phi}(\Delta\phi) d\Delta\phi & (M = 4 \text{ (DQPSK)}) \\ \frac{2}{\log_2 M} \int_{\pi/M}^{3\pi/M} f_\phi(\phi) d\phi + \frac{4}{\log_2 M} \int_{3\pi/M}^{5\pi/M} f_\phi(\phi) d\phi + \varepsilon_p & (M \geq 8) \end{cases} \quad (22a,b,c)$$

で求められる。ただ、特殊関数を含んだ二重積分であり、ここから使いやすい計算式を手に入れて行くには、Pawula 等[4]の式展開に頼らなければならない。その結果、BPSK について次式が導かれている（この詳細等については、例えば、[5], [6]）。

$$P_{DBPSK} = \frac{1}{2} \exp(-\gamma) \quad (23)$$

DQPSK についても次式が得られている。

$$P_{DQPSK} = Q(a, b) - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2}\right) I_0(ab) \quad (24)$$

$$a = \sqrt{(1-1/\sqrt{2})\gamma}, \quad b = \sqrt{(1+1/\sqrt{2})\gamma}$$

ここで、 $Q(a,b)$ はマーカム Q 関数である。特殊関数が求められる数式ソフトがあればそれでよいが、それが無いと簡単に計算ができない。さりとて、(22)式の積分も、BER が小さいところで積分の刻み幅の設定が難しく、安定した数値を得るには結構骨が折れる（計算時間との相談になる）。そこで、フェージング環境下での平均 BER を求めたい場合などでは、誤り率の値が大きい部分が結果に対して支配的になるので、その部分で近似がよい以下の簡便式が実際によく使われている。

$$P_{DQPSK} \approx \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) \quad (25)$$

図8は遅延検波のDBPSKとDQPSKに対するBERとCNRの関係を示している。式(23)と(25)による計算式(実線)と(22a,b)式による積分計算値(--●--)の両方を示している。遅延検波においては、DBPSKでは、(23)式が厳密式であるのに対して、DQPSKの近似式(25)はBERが小さい部分でずれが目立っている。ただし、上で述べたように、フェージング下での誤り算出では誤り率の値が大きい部分が結果に対して支配的になるので、そのような際にはこの式の利用で大きな問題はない。なお、DQPSKのBERの近似式と厳密式とでのフェージング下での平均BERの推定に与える影響については、後述する図11に示す。同期検波と遅延検波の比較では、CNRに依存して1dB~3dB程度同期検波が優れている。DBPSKではSNRが大きくなるに従ってBPSKの特性に近づくが、DQPSKではQPSKに近づく傾向が見られない。これは、CNRが大きくなるにつれて位相差 $\Delta\phi$ の分布がDBPSKで誤りになる $\pi/2$ を超える確率は非常に小さくなる一方、 $\pi/4$ 程度には一定の確率が残り、それがDQPSKには現われていると解釈できる。

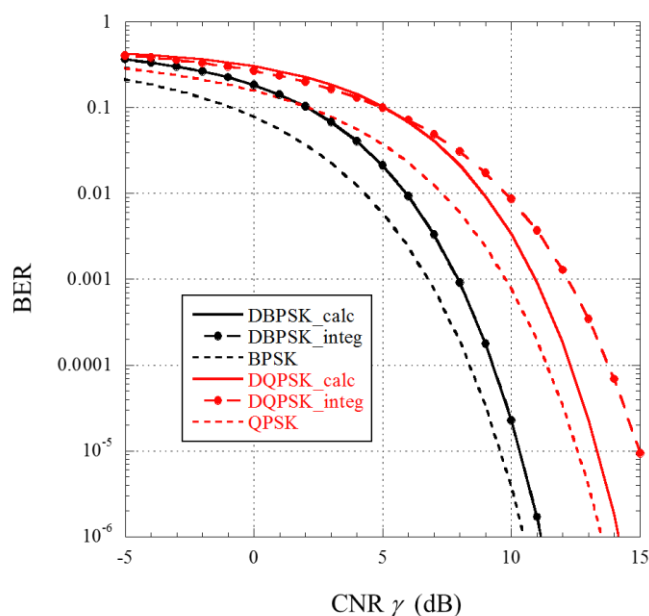


図8 DBPSKとDQPSKのBERとCNRの関係(同期検波(点線)も比較のために)

## 2. 2. 2 QAM

16QAMの誤り率を考えてみよう。図9に示すように16の信号点があり、受信点がそれぞれの区間から隣接区間に飛び出たとき、シンボル誤りが生じ、グレイ符号が用いられる場合はシンボル内のビット誤り数は1である。図より、シンボルの位置関係により、①~③で示した3種類の区間ではそれぞれ異なる誤り率を示すことになる。それぞれのビット誤り率を $P_1, P_2, P_3$ とすると、全体でのBERは

$$P_{16QAM} = \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{4}P_3 \quad (26)$$

である。I,Q 両軸の一方側に境界を持つ  $P_1$  は QPSK の誤り率と同じ考えで求められる。 $P_3$  はその境界が両側にあるので、第一隣接区間のみで誤りを考えるとき、 $P_1$  の 2 倍になる（第 2 隣接区間の誤りは無視しているため近似である）。 $P_2$  はその中間（I,Q 軸の一方に一つの境界、もう一方に両側境界を持つ）であり、 $P_1$  の 1.5 倍になる。これを整理すると

$$P_{16QAM} \approx \frac{1}{4}P_1 + \frac{3}{4}P_1 + \frac{1}{2}P_1 = \frac{3}{2}P_1 \quad (27)$$

となる。

次に①の位置でのビット誤り率  $P_1$  を調べる。16QAM の隣接信号点間距離を  $2A$  とすると、全信号点での平均電力は  $10A^2$  となる。QPSK の隣接信号点間距離を  $2A'$  とすると、平均電力は  $2A'^2$  であるので、QPSK と 16QAM で平均電力を同じにすれば、16QAM の方が信号点当たりの平均電力が 1/5、すなわち CNR が 1/5 になっている。これゆえ、式(13)で与えられる QPSK の誤り率の  $\gamma/2$  の部分が  $\gamma/10$  になる。さらに、隣接区間の誤り率が QPSK の 1/2 から 1/4 に変わるので①のビット誤り率  $P_1$  は QPSK の(13)式に対して

$$P_1 \approx \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \text{erfc} \left( \sqrt{\frac{\gamma}{2} \times \frac{1}{5}} \right) = \frac{1}{4} \text{erfc} \left( \sqrt{\frac{\gamma}{10}} \right) \quad (28)$$

である。近似式にしているのは、隣接区間のビット誤り率 1/4 のみを考慮しているためである。(27)式と(28)式により、16QAM の BER は

$$P_{16QAM} \approx \frac{3}{8} \text{erfc} \left( \sqrt{\frac{\gamma}{10}} \right) \quad (29)$$

となる。64QAM 以上の正分配列  $2^k$ -QAM ( $k=6, 8, 10, \dots$ ) についても、 $P_1, P_2, P_3$  の場所の存在比率が変わる（BER 比率は変わらない）、のと、信号点間距離の違いだけなので、同様な考え方で求められ次式となる[7]。

$$P_{M-QAM} \approx \frac{\sqrt{M}-1}{k2^{k/2-1}} \text{erfc} \left( \sqrt{\frac{3}{2(M-1)}\gamma} \right) \quad (k = \log_2 M) \quad (30)$$

(29), (30)の近似式については、 $\gamma=0$  で  $P_0=0.5$  とならず、低 CNR 部で誤差が出るが、ビット誤り率が 0.1 以下ではこの式で十分である。

図 10 は BPSK, QPSK, 8-PSK, 16-PSK, 16QAM, 64QAM について、BER と CNR の関係を示している。同じ  $k$  ビット伝送の  $2^k$ -PSK と  $2^k$ -QAM の比較では、QAM の方が誤り率特性で優れている（例：図 10 の 16-PSK と 16QAM）。これは、搬送波電力を同じにして、PSK と QAM の隣接信号点間距離を計算すると、QAM の方が距離が大きくなっているためである。

したがって、一般に、多値変調ではPSKよりQAMが利用されている。(16-PSKと16QAMでは隣接信号点間距離0.39:0.63となることを確かめて欲しい)。

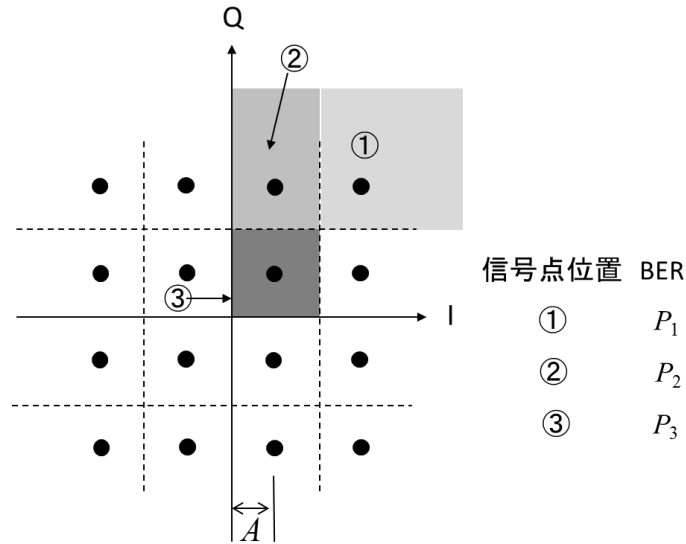


図9 16QAMのビット誤り率算定の説明図

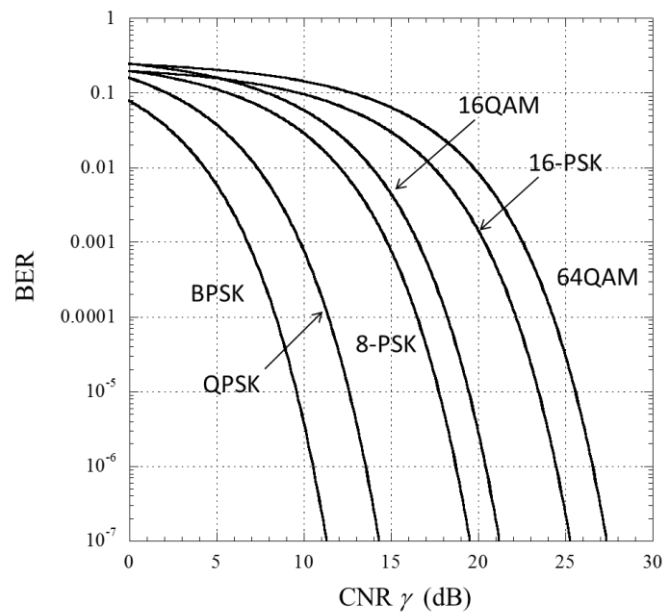


図10 各種PSK, QAM方式に対するBERとCNRの関係

### 3. フラットフェージング環境下でのビット誤り率特性

#### 3. 1 ビット誤り率の基本推定式と各種フェージング環境での CNR の確率分布

フラットフェージング環境下でのビット誤り率特性を求める。フラットフェージングとは、高速フェージング（時間選択性フェージング：デジタル変調信号のシンボル時間内にフェージングの状態が変化する）や、周波数選択性フェージング（信号帯域内でフェージング特性が変化する）でない、時間および周波数領域で特性が平坦（フラット）なフェージングを言う。移動伝搬環境では CNR が時間（シンボル周期よりは十分に長い時間）とともに変化し、フェージング環境に従った確率分布をもつ。そのときの平均ビット誤り率  $P_e$  は、2節で述べた信号電力一定の条件下で求めたビット誤り率に対する CNR  $\gamma$  の確率分布での重み付け平均になり、次の基本式で求められる。

$$P_e = \int_0^{\infty} f_p(\gamma) P_0(\gamma) d\gamma \quad (31)$$

ここで、 $P_0(\gamma)$  は、変数  $\gamma$  の関数で与えられるビット誤り率、 $f_p(\gamma)$  はその  $\gamma$  の確率密度関数である。

受信信号の強度を表わす確率密度関数は振幅  $r$  で与えられているものが多い。一方、CNR は電力の次元であり、かつ雑音レベルは一定とみなしうるので、 $r^2$  に比例する量の確率密度関数に変換する必要がある。この新たな変数を  $z$  とし  $z=r^2$  と置くと、この変数  $z$  の確率密度関数:  $f_p(z)$  は、 $r$  の確率密度関数:  $f(r)$  を用いて以下の式で変換できる。

$$f_p(z) = f\{r(z)\} \left| \frac{dr}{dz} \right| = \frac{1}{2\sqrt{z}} f(\sqrt{z}) \quad (32)$$

ビット誤り率は  $z$  に対応する変数が CNR  $\gamma$  なので、これを変数として式を示して行く。振幅分布がレイリー分布、仲上・ライス分布、仲上  $m$  分布するフェージング環境に対して、CNR  $\gamma$  の確率密度関数を求めるとそれぞれ以下になる。なお、全ての式において瞬時 CNR  $\gamma$  の平均値  $\langle \gamma \rangle$  を  $\Gamma_0$  とし、平均 CNR と呼ぶ。

#### 【レイリーフェージング】

$$f_p(\gamma) = \frac{1}{\Gamma_0} \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_0}\right) \quad (33)$$

#### 【仲上・ライスフェージング】

$$f_p(\gamma) = \frac{K}{\Gamma_D} \exp\left\{-K\left(\frac{\gamma}{\Gamma_D} + 1\right)\right\} I_0\left(2K\sqrt{\frac{\gamma}{\Gamma_D}}\right) \quad (34a)$$

$$= \frac{1+K}{\Gamma_0} \exp\left\{-\frac{(1+K)\gamma}{\Gamma_0} - K\right\} I_0\left(2\sqrt{\frac{(1+K)K\gamma}{\Gamma_0}}\right) \quad (34b)$$



( $\Gamma_D$ : 直接波成分の CNR,  $K$ : ライスファクタ=直接波成分と散乱波成分の電力比)

【仲上 $m$ フェージング】

$$f_p(\gamma) = \frac{1}{\Gamma(m)} \left( \frac{m}{\Gamma_0} \right)^m \gamma^{m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Gamma_0} \gamma\right) \quad (m \geq 0.5) \quad (35)$$

ここで $\Gamma$  はガンマ関数である。式の形から分かるように、(33)式は指数分布、(34)式は非心カイ二乗分布（非心ガンマ分布）、(35)式はガンマ分布である。

【レイリーフェージング、 $M$  ブランチの最大比合成（MRC）ダイバーシチ】

レイリーフェージング環境、 $M$  ブランチのダイバーシチにおいて、無相関な変動の最大比合成では、CNR の確率密度関数は次式である（[3]の(8.3)式）。

$$f_p(\gamma; M) = \frac{1}{\Gamma(M)} \frac{\gamma^{M-1}}{\Gamma_0^M} \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_0}\right) \quad (36)$$

ここで、 $\Gamma_0$  は素子当たりの平均 CNR である。これもガンマ分布であり、仲上  $m$  フェージングの式(33)において、 $m \rightarrow M$ 、 $\Gamma_0 \rightarrow M\Gamma_0$  としたケースに対応する。

【レイリーフェージング、 $M$  ブランチの不等電力最大比合成ダイバーシチ】

レイリーフェージング環境において、素子毎の平均電力が異なる場合（ブランチ  $m$  の平均 CNR が  $\Gamma_m$ ）では、CNR の確率分布は次式である（[3]の(8.35)式）。

$$f_p(\gamma; M) = \frac{1}{\prod_{m=1}^M \Gamma_m} \sum_{m=1}^M \frac{\exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_m}\right)}{\prod_{\substack{m' \neq m \\ m'=1}}^M \left(\frac{1}{\Gamma_{m'}} - \frac{1}{\Gamma_m}\right)} \quad (37)$$

【仲上・ライスフェージング、 $M$  ブランチの最大比合成（MRC）ダイバーシチ】

仲上・ライスフェージング環境で、ブランチ毎の平均電力が等しく、かつ、不規則波成分の変動がブランチ間で無相関の場合には、[3]の(8.38)式より、

$$f_p(\gamma; M) = \frac{K}{\Gamma_D} \left( \frac{\gamma}{M\Gamma_D} \right)^{(M-1)/2} \exp\left\{-K \left( \frac{\gamma}{\Gamma_D} + M \right)\right\} I_{M-1} \left( 2K \sqrt{\frac{M\gamma}{\Gamma_D}} \right) \quad (38a)$$

$$= \frac{K+1}{\Gamma_0} \left\{ \frac{(K+1)\gamma}{MK\Gamma_0} \right\}^{(M-1)/2} \exp\left\{-\left(\frac{K+1}{\Gamma_0}\right)\gamma - KM\right\} I_{M-1} \left( 2\sqrt{\frac{K(K+1)M\gamma}{\Gamma_0}} \right) \quad (38b)$$

である。ここで、 $\Gamma_D$ は素子当たりの直接波成分に対する CNR,  $K$ はライスファクタである。

このようにして式(31)の2つの関数 (PDF:  $f_p$  と BER:  $P_0$ ) が得られるので、あとは必要なものを組み合わせて積分すれば平均 BER  $P_e$  が求められる。

### 3. 2 閉形式で表される BER 算定式

変復調方式と電波伝搬環境のいくつかの組み合わせにおいては、積分を含まないクローズドフォームの式が得られており、その例を示す。

以下のすべてにおいて QPSK の場合を示すが、BPSK では式中の  $\Gamma_0, \Gamma_D, \Gamma_s$  を、それぞれ、 $2\Gamma_0, 2\Gamma_D, 2\Gamma_s$  で置き換えて求めればよい。また、QAM の場合も QPSK と  $P_0$  の式の構造が同じであるため、QPSK の結果か式から換算できる。

#### 【レイリーフェージングと QPSK】

$$P_e = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+2/\Gamma_0}} \right) \quad (39)$$

この式の導出を付録 1 に示す。上でも述べたように、(29), (30)式で示した QAM も同じ関数系なので積分が同様に解ける。例えば、16QAM では係数の 1/2 の部分が 3/8 に、平方根内の  $2/\Gamma_0$  が  $10/\Gamma_0$  に置き換わるだけである。

#### 【レイリーフェージングと DQPSK】

$$P_e = \frac{1}{\Gamma_0 + 2} \quad (40)$$

#### 【仲上-ライスフェージングと DQPSK】

$$P_e = \frac{1+K}{\Gamma_0+2+2K} \exp\left(-\frac{K\Gamma_0}{\Gamma_0+2(1+K)}\right) \quad (41a)$$

$$= \frac{K}{\Gamma_D+2K} \exp\left(-\frac{K\Gamma_D}{\Gamma_D+2K}\right) \quad \left(\Gamma_0 = \left(1 + \frac{1}{K}\right)\Gamma_D\right) \quad (41b)$$

$$= \frac{1}{\Gamma_s+2} \exp\left(-\frac{\Gamma_D}{\Gamma_s+2}\right) \quad \left(K = \frac{\Gamma_D}{\Gamma_s}\right) \quad (41c)$$

(41a)式で  $K=0$  とするとレイリーフェージングの式(40)になる。この導出を付録 2 に示す。

【レイリーフェージングの  $M$  ブランチ最大比合成と QPSK】

$$P_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{\Gamma_0}}} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{M-1} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \left( 1 + \frac{\Gamma_0}{2} \right)^m \right\} \right] \quad (42)$$

この式の導出も付録 1 を拡張すればよいが、伝搬の分布の指数分布がガンマ分布に変わっているのが結構手ごわい。[6]の付録 7.1 に詳しくまとめられているのでそちらをみてほしい。

【レイリーフェージングの  $M$  ブランチ最大比合成と DQPSK】

$$P_e = \frac{1}{2 \{ \Gamma_0 / 2 + 1 \}^M} \quad (43)$$

この導出は積分公式： $\int_0^{\infty} x^a e^{-bx} dx = \Gamma(a+1) / b^{a+1}$  を使って容易である。

DQPSK 方式におけるレイリーフェージングおよび仲上-ライスフェージングでの平均 CNR  $\Gamma_0$  と平均 BER の関係 (式(40), (41)) を図 1 1 に実線で示す。点線は DQPSK の BER 特性  $P_0$  に厳密式(22)を用いて求めたもの (レイリー、 $K=6\text{dB}$ ,  $10\text{dB}$  の 3 種類について) であるが、レイリーフェージングを含む  $K < 10\text{dB}$  の範囲でその差は無視できる程度に小さく、近似式の利用で問題ないことが分かる。

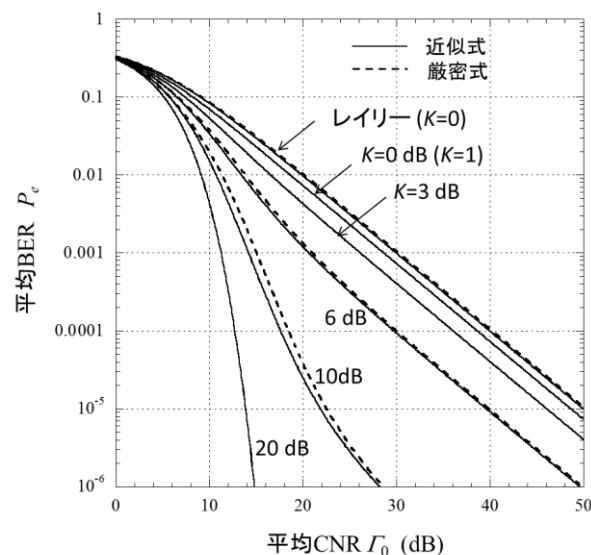


図 1 1 DQPSK 方式におけるレイリーフェージングおよび仲上・ライスフェージングでの平均 BER と平均 CNR の関係 (実線は式(40), (41a)を用いた近似計算。点線 (レイリー、 $K=6\text{dB}$ ,  $10\text{dB}$  の 3 種類) は厳密式で求めた結果)

## 付録1 QPSK、レイリーフェージングの平均BER：式(39)の導出

部分積分によって求めて行く。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Gamma_0} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_0}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right) d\gamma \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_0}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right) \right]_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_0}\right) \frac{d}{d\gamma} \left\{ \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right) \right\} d\gamma \end{aligned}$$

右辺第1項は

$$-\frac{1}{2} \left[ \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_0}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right) \right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

第2項中の微分の部分は

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\gamma} \left\{ \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right) \right\} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{d\gamma} \int_{\sqrt{\frac{\gamma}{2}}}^\infty \exp(-t^2) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\gamma} \int_\gamma^\infty \frac{1}{\sqrt{t'}} \exp\left(-\frac{t'}{2}\right) dt' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) \end{aligned}$$

第2項をまとめると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\gamma}{\Gamma_0}\right) \frac{d}{d\gamma} \left\{ \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right) \right\} d\gamma &= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \exp\left\{-\left(\frac{1}{\Gamma_0} + \frac{1}{2}\right)\gamma\right\} d\gamma \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+2/\Gamma_0}} \left( \text{積分公式: } \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(-ax) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right) \end{aligned}$$

二つの項を合わせて式(39)が得られる。

## 付録2 DQPSK、仲上・ライスフェージングの平均BER：式(41a)の導出

$P_0$ には、近似式(25)を用いる。

$$\begin{aligned} P_e &= \int_0^\infty \frac{1+K}{\Gamma_0} \exp\left\{-\frac{(1+K)\gamma}{\Gamma_0} - K\right\} I_0\left(2\sqrt{\frac{(1+K)K\gamma}{\Gamma_0}}\right) \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) d\gamma \\ &= \frac{1+K}{2\Gamma_0} \exp(-K) \int_0^\infty \exp\left\{-\left(\frac{(1+K)}{\Gamma_0} + \frac{1}{2}\right)\gamma\right\} I_0\left(2\sqrt{\frac{(1+K)K\gamma}{\Gamma_0}}\right) d\gamma \end{aligned}$$

$$= a \int_0^{\infty} \exp\{-b\gamma\} I_0(c\sqrt{\gamma}) d\gamma$$

$$a = \frac{1+K}{2\Gamma_0} \exp(-K), \quad b = \frac{(1+K)}{\Gamma_0} + \frac{1}{2}, \quad c = 2\sqrt{\frac{(1+K)K}{\Gamma_0}}$$

積分公式[8]

$$\int_0^{\infty} t \exp(-bt^2) I_0(ct) dt = \frac{1}{2b} \exp\left(\frac{c^2}{4b}\right)$$

が適用できるよう、 $\sqrt{\gamma} = t$ として整理すると

$$a \int_0^{\infty} \exp\{-b\gamma\} I_0(c\sqrt{\gamma}) d\gamma = 2a \int_0^{\infty} t \exp(-bt^2) I_0(ct) dt = \frac{a}{b} \exp\left(\frac{c^2}{4b}\right)$$

となり、 $a, b, c$ を元に戻すと、式(41a)が得られる。

#### 参考文献

- [1] 唐沢好男, “等価伝送路モデルによる符号間干渉誤りの甘美な計算法,” 技術レポートYK-054 (私報), 2020.10. [http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR\\_YK\\_054\\_ETP\\_Calculation\\_Formula.pdf](http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_054_ETP_Calculation_Formula.pdf)
- [2] 唐沢好男, “Fast Fading環境におけるビット誤り率,” 技術レポートYK-052 (私報), 2020.10. [http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR\\_YK\\_052\\_Fast\\_Fading\\_BER.pdf](http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/TR_YK_052_Fast_Fading_BER.pdf)
- [3] 唐沢好男, 改訂 デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2016.03.
- [4] R. F. Pawula, S. O. Rice, and J. H. Roberts, “Distribution of phase angle between two vectors perturbed by Gaussian noise,” IEEE Trans. Commun., vol. COM-30, pp. 1828-1841, Aug. 1982.
- [5] 高畑文夫, デジタル無線通信入門, 培風館, 2002.
- [6] 赤岩芳彦, デジタル移動通信技術のすべて, コロナ社, 2013.
- [7] 守倉正博, 通信方式, オーム社, 2013.
- [8] 森口繁一他, 数学公式 III, 岩波書店, 1960.