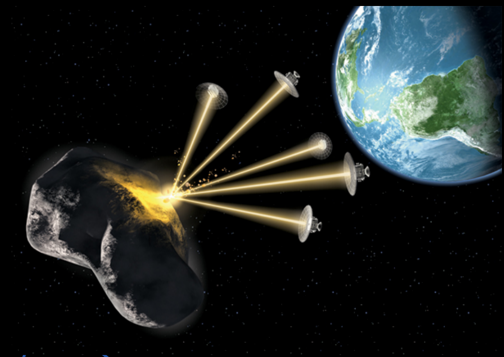
宇宙機の力学と軌道設計

九大院　坂東麻衣

はじめに

スペースミッション



軌道設計（人工衛星の航路）

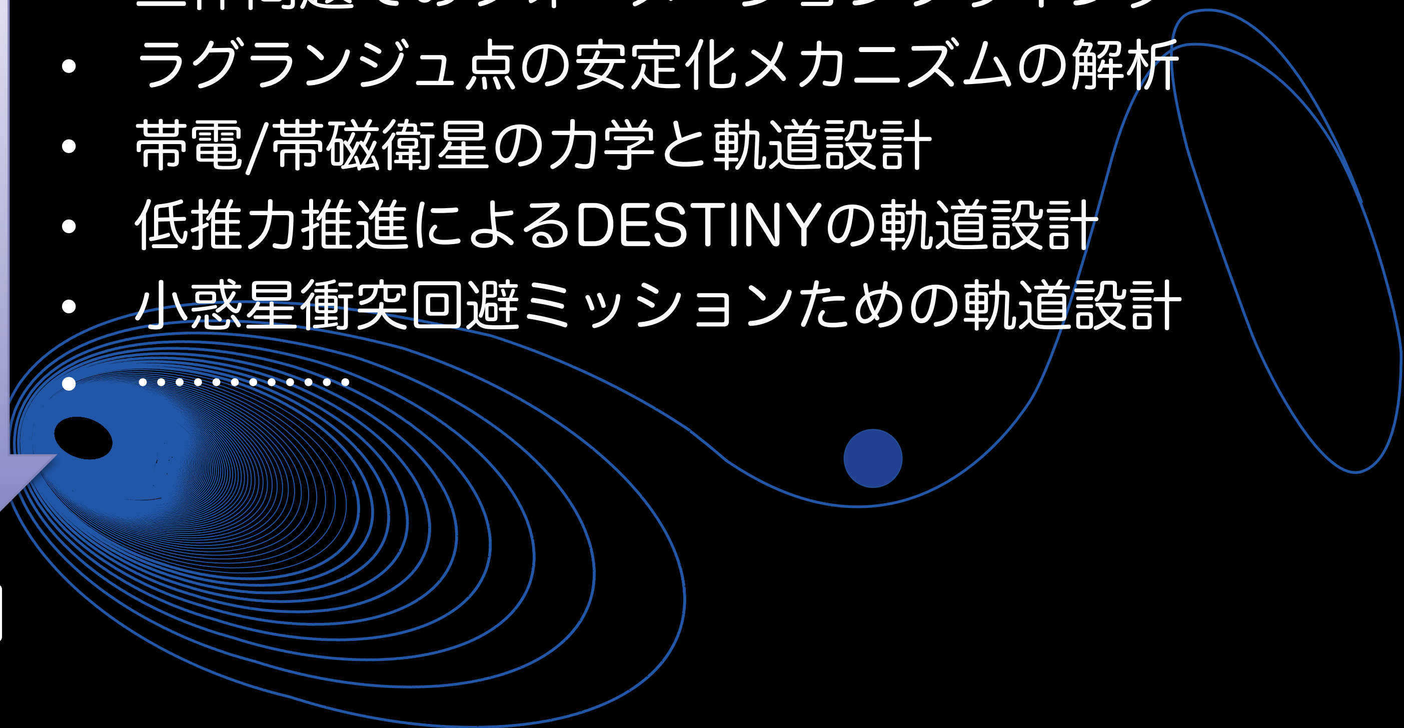
解析的アプローチによる軌道設計の効率化

運動の法則（力学）

Research Topics

理論・解析

- ハミルトンヤコビ方程式に基づく軌道設計
- 地球周回軌道上でのフォーメーションフライング
- 三体問題でのフォーメーションフライング
- ラグランジュ点の安定化メカニズムの解析
- 帯電/帯磁衛星の力学と軌道設計
- 低推力推進によるDESTINYの軌道設計
- 小惑星衝突回避ミッションための軌道設計
- …………

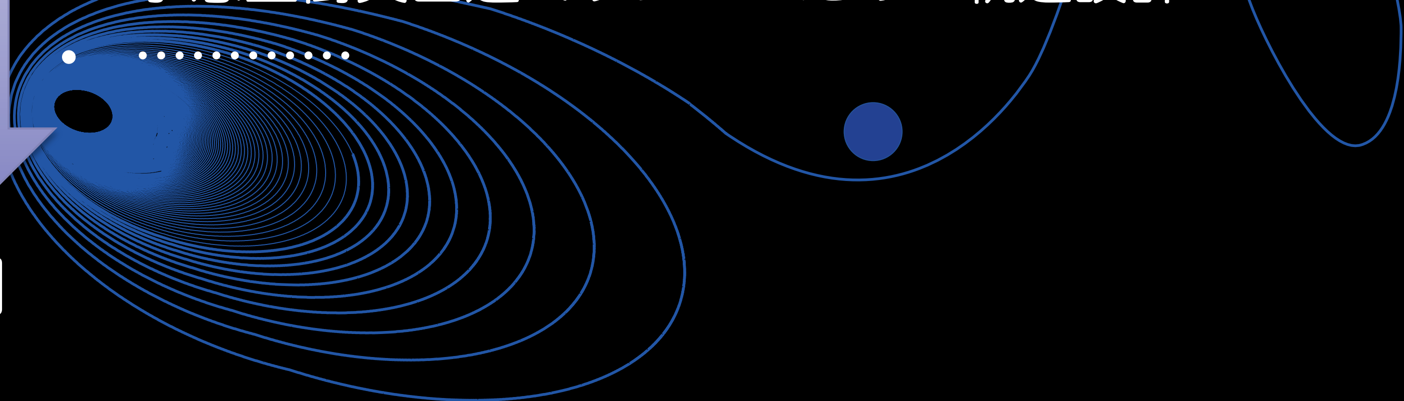


応用

Research Topics

理論・解析

- ハミルトンヤコビ方程式に基づく軌道設計
- 地球周回軌道上でのフォーメーションフライング
- 三体問題でのフォーメーションフライング
- ラグランジュ点の安定化メカニズムの解析
- 帯電/帯磁衛星の力学と軌道設計
- 低推力推進によるDESTINYの軌道設計
- 小惑星衝突回避ミッションための軌道設計
- …………

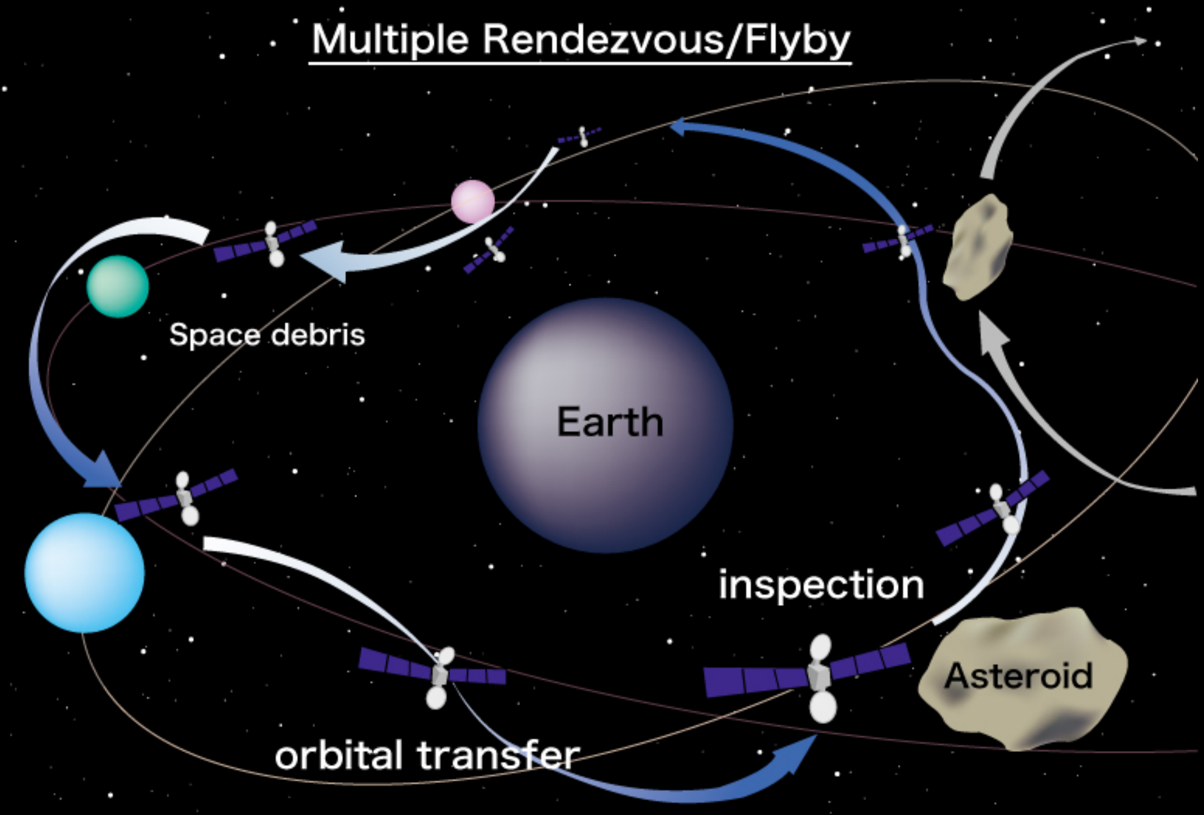


応用

はじめに

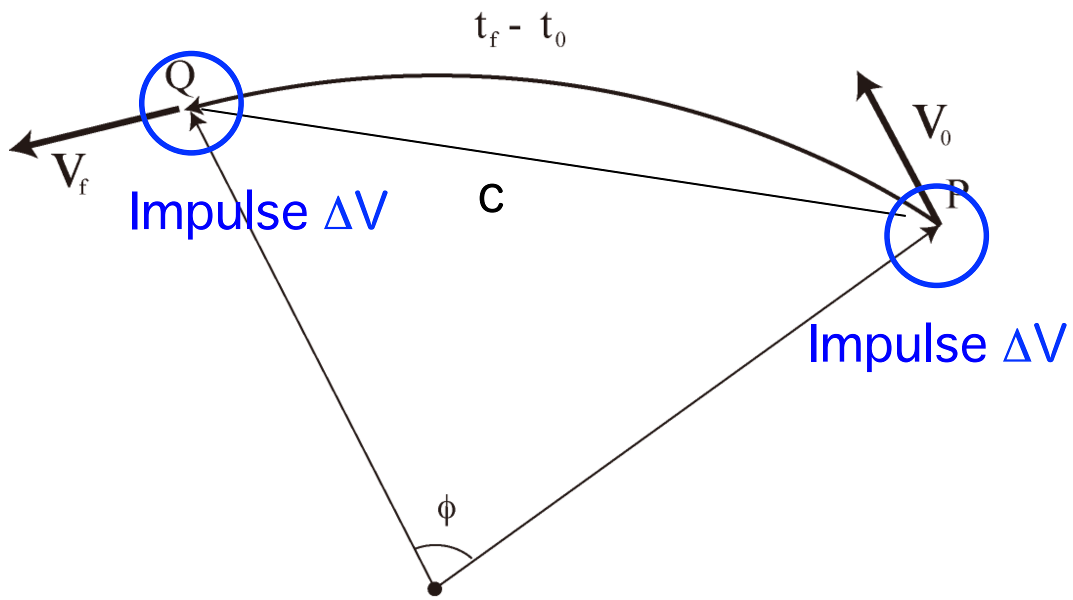
- 地球接近小惑星やスペースデブリを観測するための軌道設計を行うためには，従来の軌道理論では燃料消費の意味で最適な軌道を設計することが難しい．

→ 新しい軌道理論



ランベール問題

- Lambert's Problem
  - Transfer of a spacecraft from one point to another

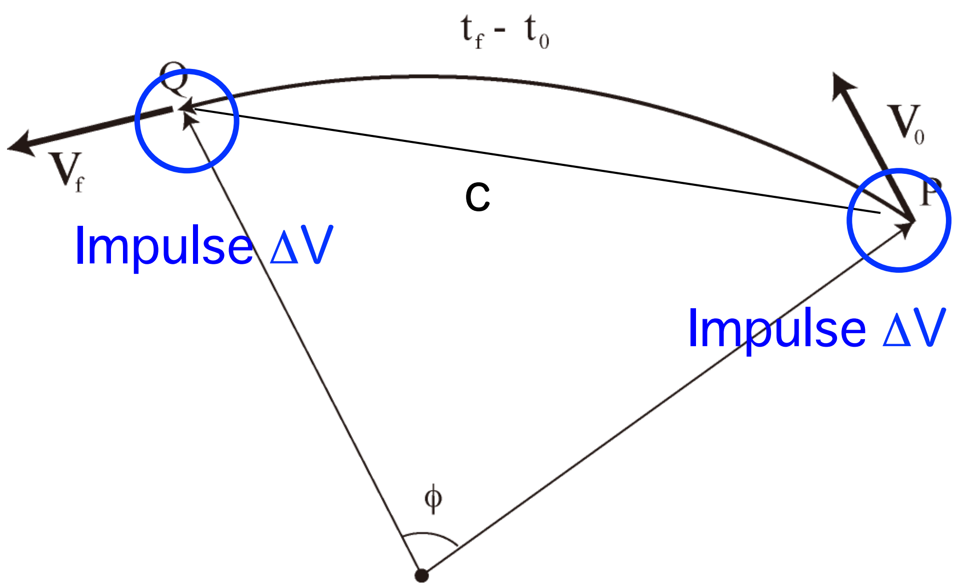


決められた時間でPからQへ移動するために必要な速度を求めよ.

ランベール問題
古典的アプローチ

ランベールの解

- 軌道の幾何学的形状をもとに必要な速度を求める方法



Lambert's equation

$$\sqrt{\mu}(t_2 - t_1) = a^{\frac{3}{2}}[\alpha - \beta - (\sin\alpha - \sin\beta)],$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{s}{2a}\right)^{1/2},$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \left(\frac{s-c}{2a}\right)^{1/2},$$

$$s = (r_1 + r_2 + c)/2,$$

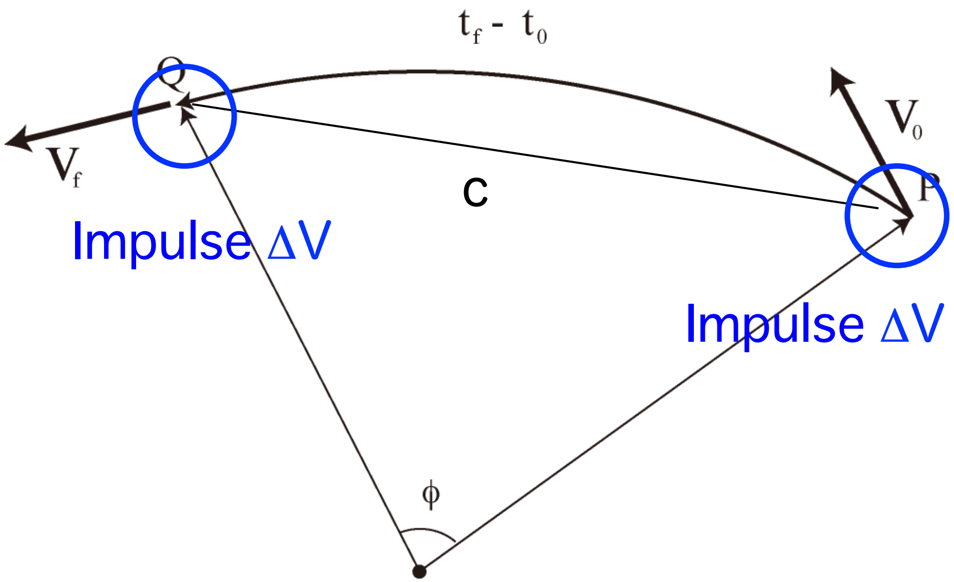
Lambert方程式を解くことにより，必要な速度を求めることができるが，終端位置，初期位置が変わるたびに解き直す必要がある.

境界条件が変わると解くことができない.

ランベール問題
母関数を用いたアプローチ

軌道の母関数を求めるアプローチ (Guibout, Scheeres, 2004)

軌道設計を大幅に簡単化！



Hamilton-Jacobi equation

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + H(\boldsymbol{q}, \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{q}}, t) = 0$$

$$\boldsymbol{p}_f = \frac{\partial F_1(\boldsymbol{q}_f, \boldsymbol{q}, t)}{\partial \boldsymbol{q}_f},$$

$$\boldsymbol{p}(t) = -\frac{\partial F_1(\boldsymbol{q}_f, \boldsymbol{q}, t)}{\partial \boldsymbol{q}},$$

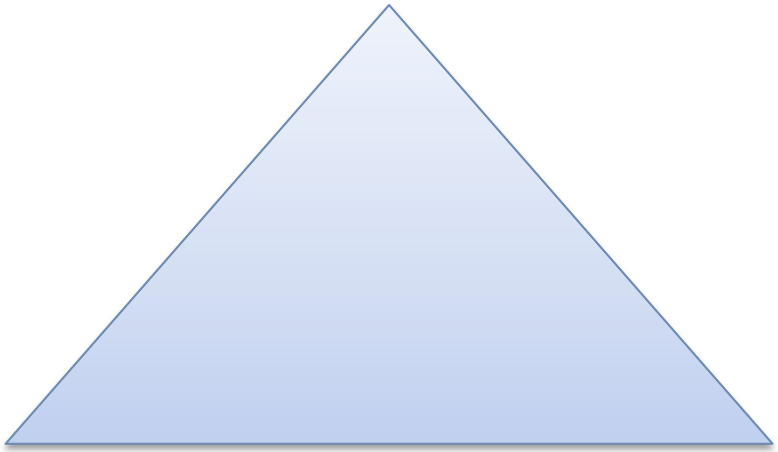
$$F_1(q_f, q_0, t_f)$$

Generating function

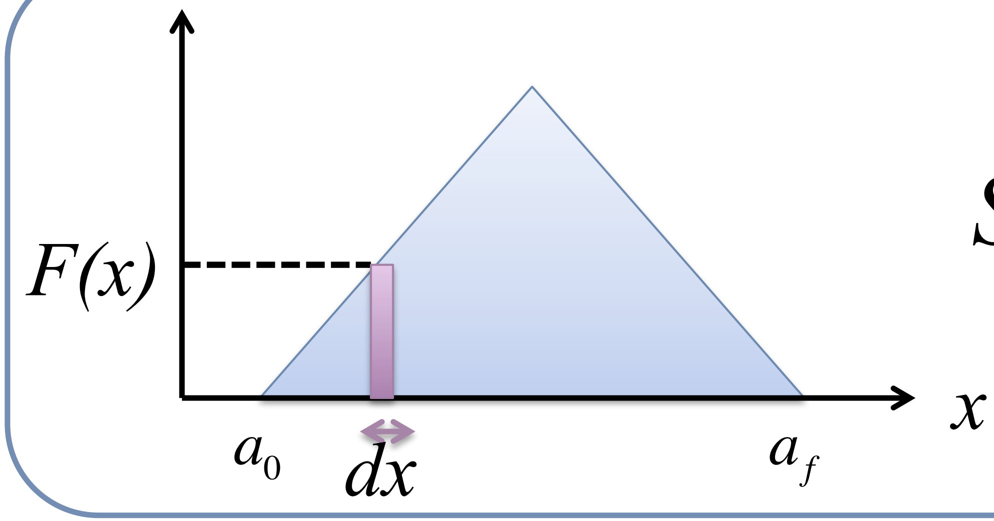
F1母関数は，初期位置，終端位置の関数であるため，関数の評価を行うことで必要な速度が求まる．

アナロジー

下の三角形の面積を求めよ.

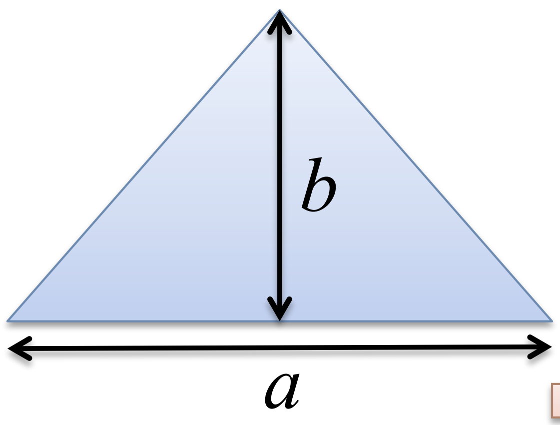


アナロジー



$$S = \int_{a_0}^{a_f} F(x)\,dx$$

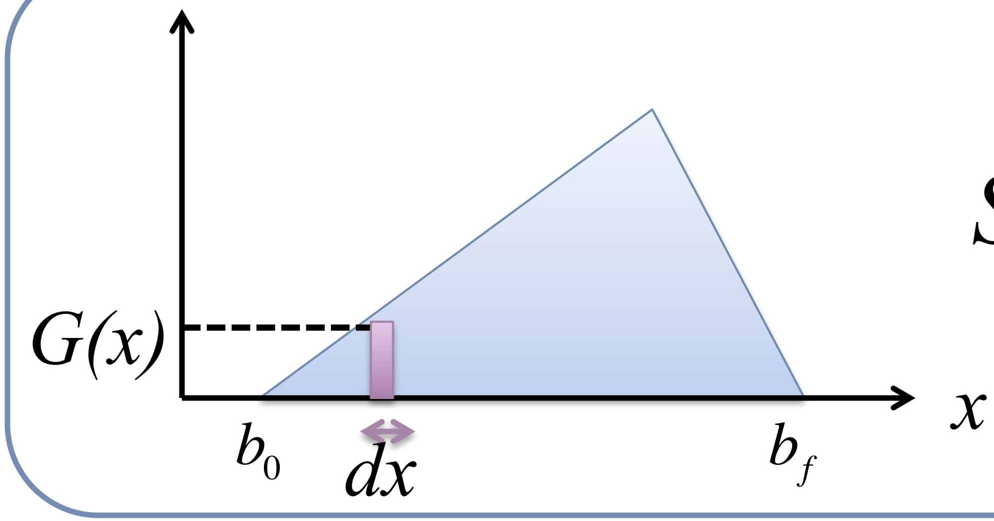
⇨ 古典的アプローチ



$$S = \frac{ab}{2}$$

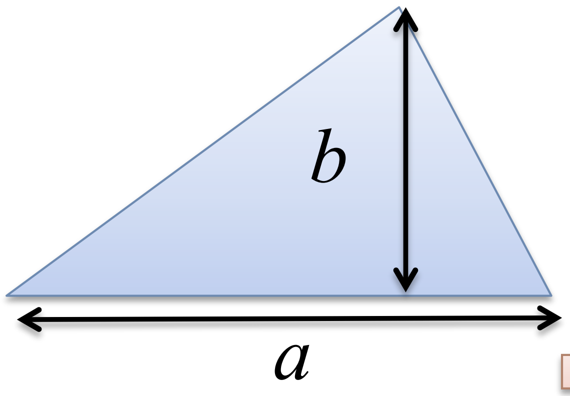
⇨ 母関数を用いたアプローチ

アナロジー



$$S = \int_{b_0}^{b_f} G(x)\,dx$$

⇨ 古典的アプローチ



$$S = \frac{ab}{2}$$

⇨ 母関数を用いたアプローチ

運動方程式

- Newton's equation

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}$$

- Euler-Lagrang

$$\boldsymbol{q} = [q_1, \cdots, q_n$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} =$$

$L = T - V$: Lagrangian

- Hamiltonの原理：運動は，作用積分の停留値として決定される.

$$I[q] = \int_{t_0}^{t_f} L(q, \dot{q}, t)\,dt$$

- すべての運動方程式は等価.
- 以下ではHamiltonの方程式を用いる.

- Hamilton's equation

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = ([q_1, \cdots, q_n]^T, [p_1, \cdots, p_n]^T),$$

: canonical variables

$$, \boldsymbol{p}, t) \over \boldsymbol{p},$$

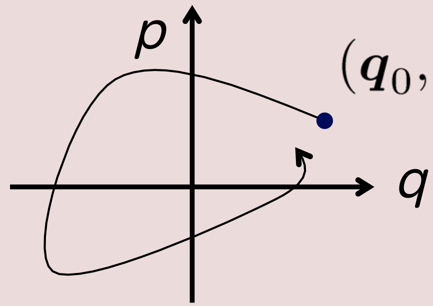
$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \over \partial \boldsymbol{q},$$

: Hamilton system

$^T \boldsymbol{p}$: Hamiltonian

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}$$

: generalized momentum



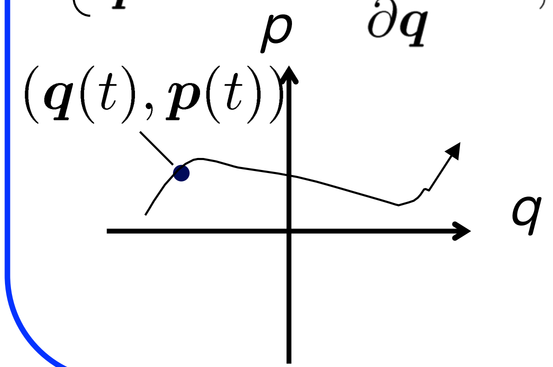
正準変換

- ２つの変数の組の間の関係式

$$(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = ([q_1,\cdots,q_n]^T,[p_1,\cdots,p_n]^T),$$
$$(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}) = ([Q_1,\cdots,Q_n]^T,[P_1,\cdots,P_n]^T)$$

Old variables (q, p)

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} = \dfrac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial \boldsymbol{p}}, \\ \dot{\boldsymbol{p}} = -\dfrac{\partial H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)}{\partial \boldsymbol{q}}, \end{cases}$$



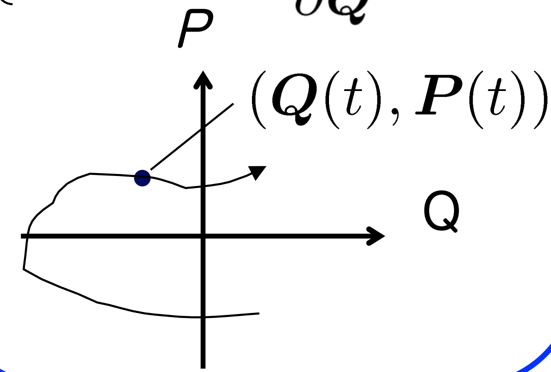
Hamiltonian : H

変換の規則

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{q}},$$
$$\boldsymbol{P} = -\frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{Q}},$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + H(\boldsymbol{q},\frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{q}},t) = 0$$

New variables (Q, P)

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{Q}} = \dfrac{\partial K(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t)}{\partial \boldsymbol{P}}, \\ \dot{\boldsymbol{P}} = -\dfrac{\partial K(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t)}{\partial \boldsymbol{Q}}, \end{cases}$$



Hamiltonian : K

ランベール問題の解

V. M. Guibout,D. J. Scheeres, Journal of Guidance, Control, and Dynamics 2004, vol.27 no.4 (693-704)

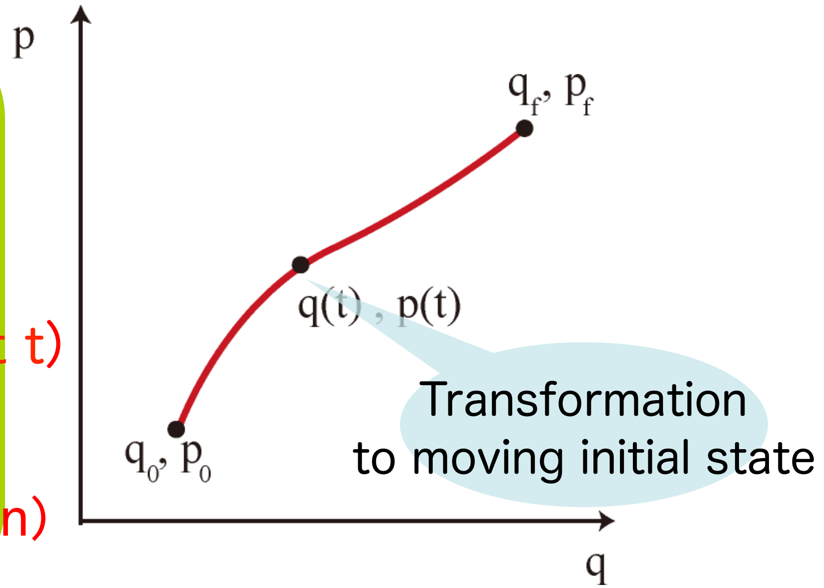
初期時刻の状態と現時刻での状態の変数変換を求める

Transformation equations

$$\boldsymbol{p}_f = \frac{\partial F_1(\boldsymbol{q}_f, \boldsymbol{q}, t)}{\partial \boldsymbol{q}_f},$$ (Final velocity)

$$\boldsymbol{p}(t) = -\frac{\partial F_1(\boldsymbol{q}_f, \boldsymbol{q}, t)}{\partial \boldsymbol{q}},$$ (velocity at t)

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + H(\boldsymbol{q}, \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{q}}, t) = 0$$ (HJ equation)



$(q, p) = (q(t), p(t)),\ H(q, p, t) = T+V$

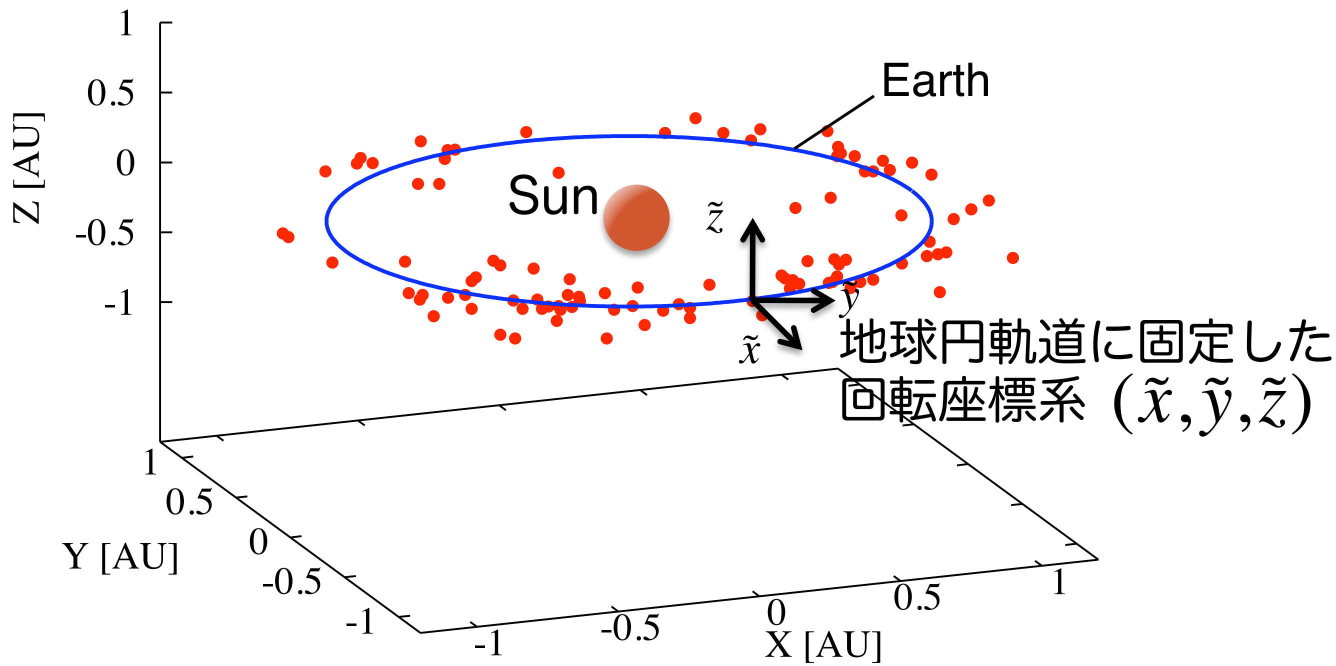
$(Q, P) = (q_f, p_f),\ K(q_f, p_f, t) = 0 \qquad t \in [t_0, t_f]$

時刻をおって運動を解くのではなく，初期値と現時点との間の変換を表す関数を求めれば，すべての軌道を一度に表すことができる

小惑星データ

- The MPC Orbit (MPCORB) Database (June 8, 2009)

t=0

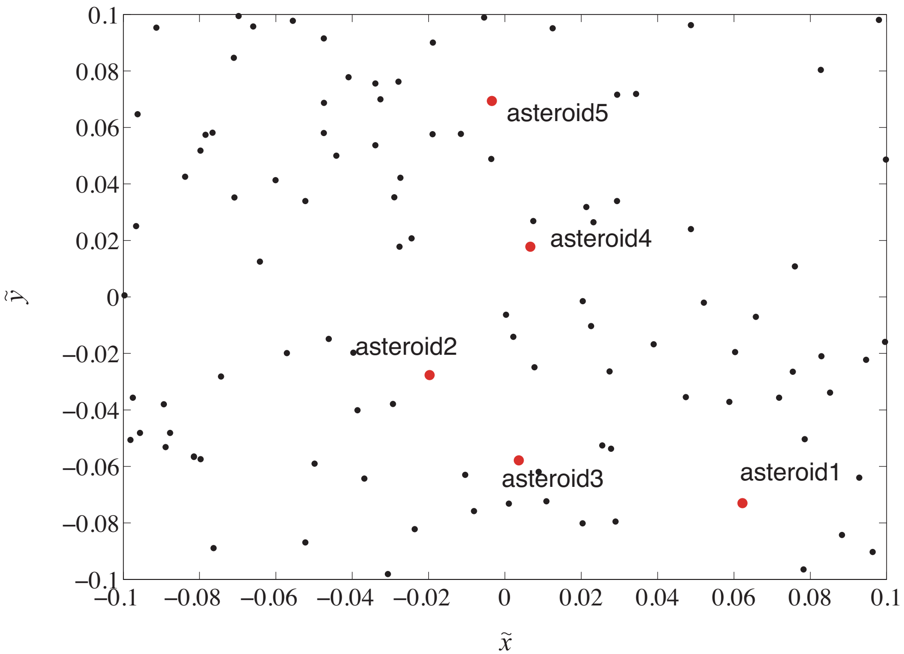


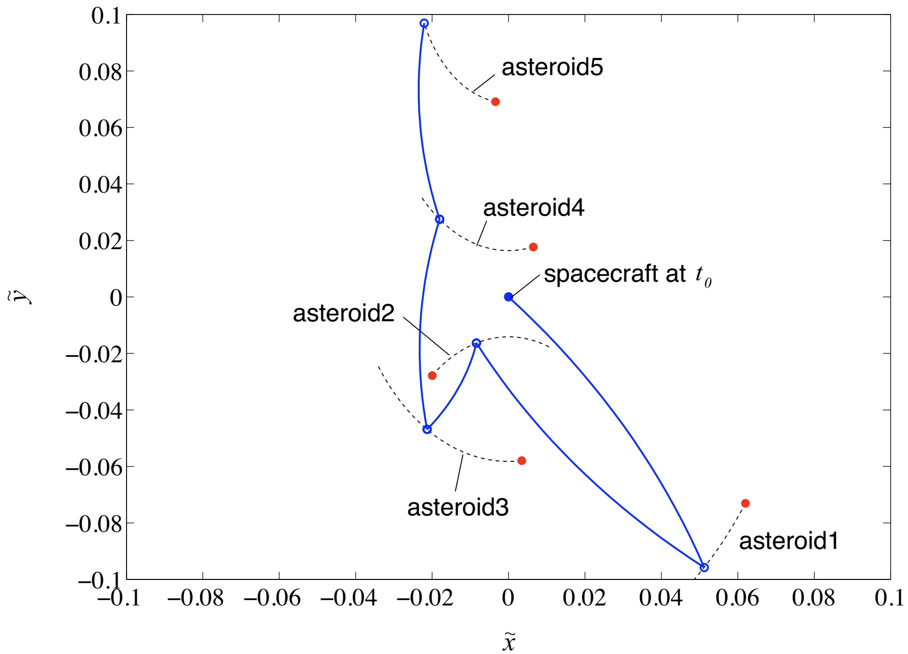
100 asteroids	→	9,034,502,400 possibilities

５つの小惑星を観測する場合

最適シーケンス

- Optimal sequence





100 asteroids → 9,034,502,400 possibilities

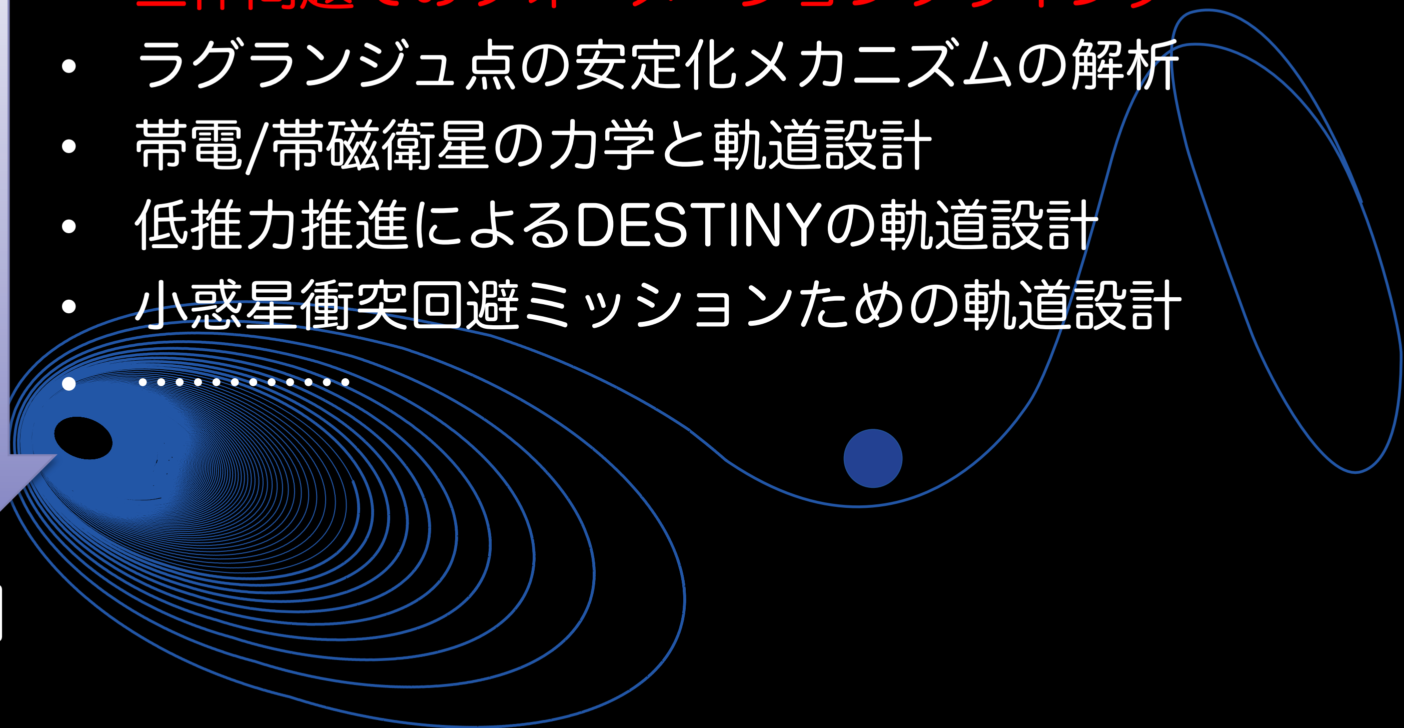
Selection of 5 asteroids

９０億通りの組み合わせの中から最適な複数フライバイ軌道を決定.

Research Topics

理論・解析

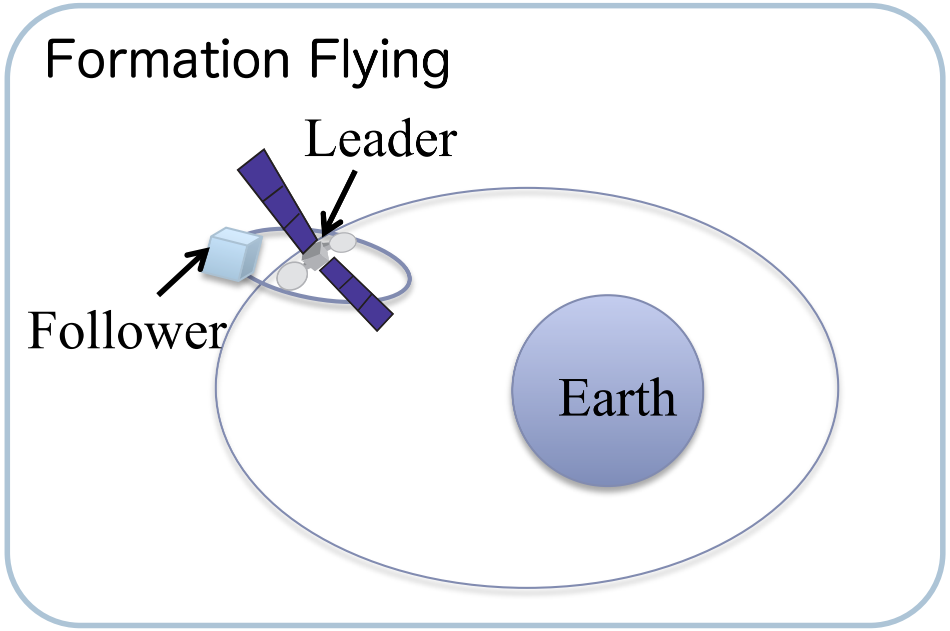
- ハミルトンヤコビ方程式に基づく軌道設計
- 地球周回軌道上でのフォーメーションフライング
- 三体問題でのフォーメーションフライング
- ラグランジュ点の安定化メカニズムの解析
- 帯電/帯磁衛星の力学と軌道設計
- 低推力推進によるDESTINYの軌道設計
- 小惑星衝突回避ミッションための軌道設計
- …………



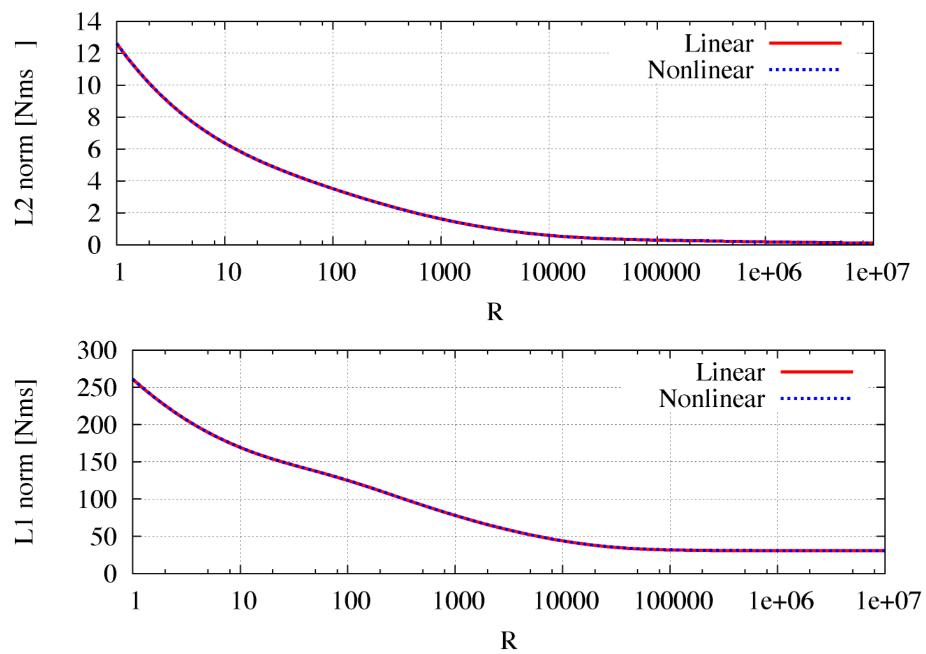
応用

地球周回軌道上のフォーメーションフライング

Purpose: 燃料消費を最小化しつつ，２機の宇宙機のフォーメーションフライングを実現する軌道を設計する



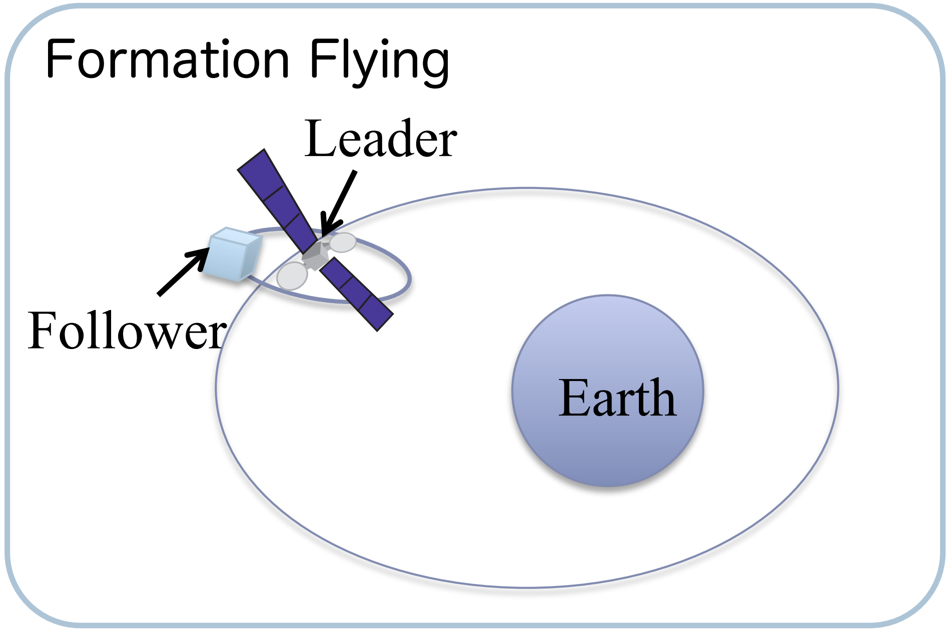
NCVE property



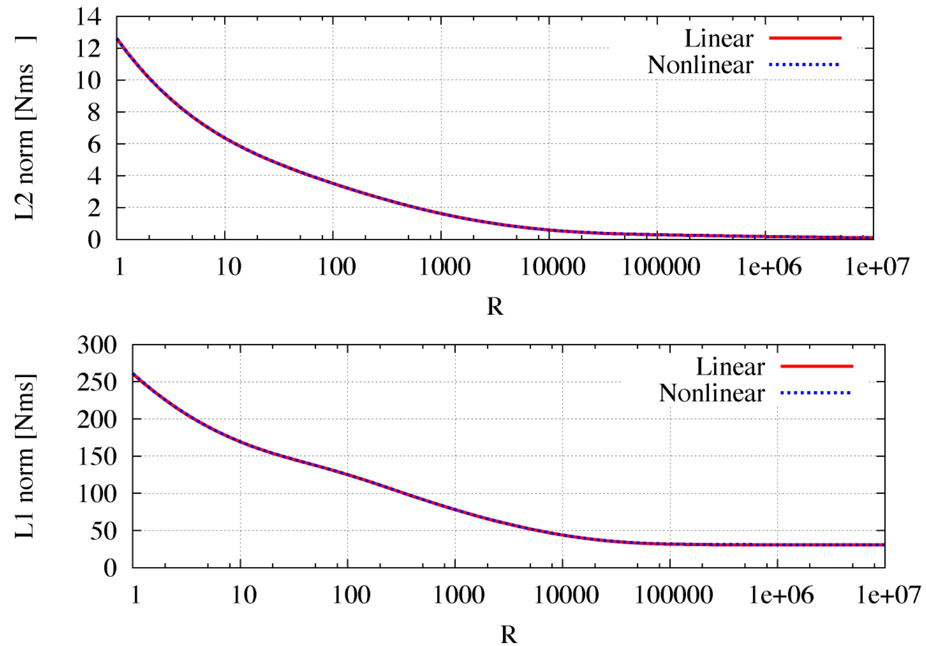
地球周回軌道上のフォーメーションフライング

Purpose: 燃料消費を最小化しつつ，２機の宇宙機のフォーメーションフライングを実現する軌道を設計せよ．

Solution: リーダー衛星の軌道近傍で成り立つ線形化方程式に対して，線形制御理論を用いた軌道設計が可能

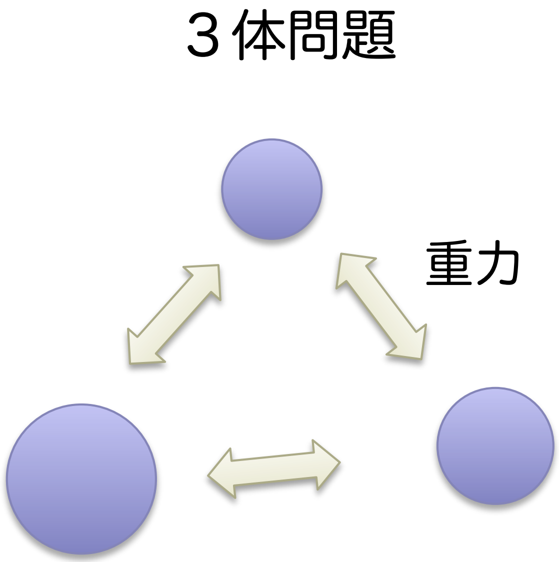


NCVE property



三体問題

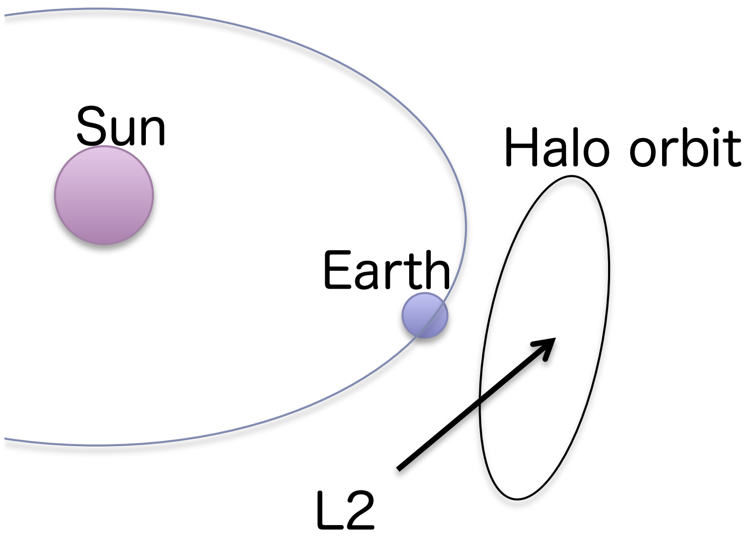
- ２つの天体は安定な周期軌道となる（ケプラーの法則）
- しかし３つ目の天体が加わると解析的に解くことが不可能，軌道を予測することができない.



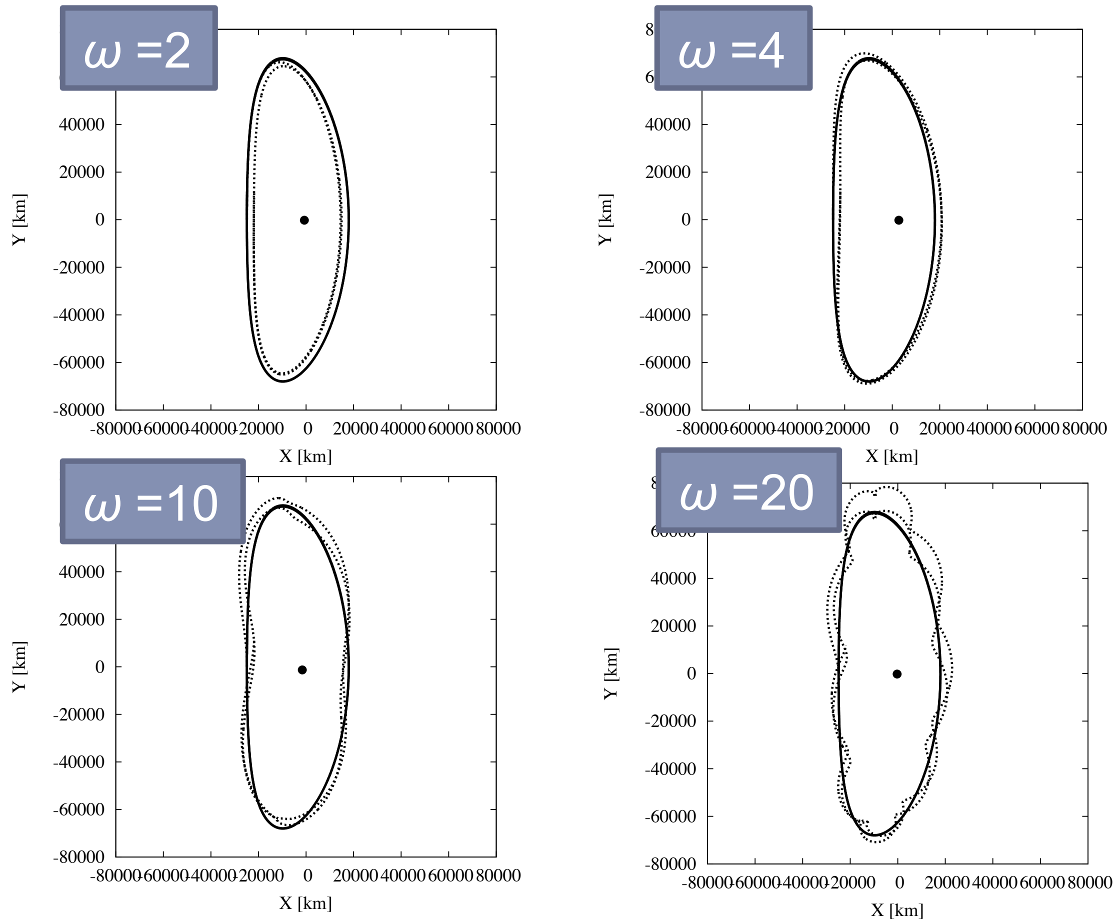
ポアンカレ

三体問題におけるフォーメーション

Purpose: 三体問題の不安定な周期軌道の軌道維持と周期軌道近傍でのフォーメーション軌道を設計せよ.



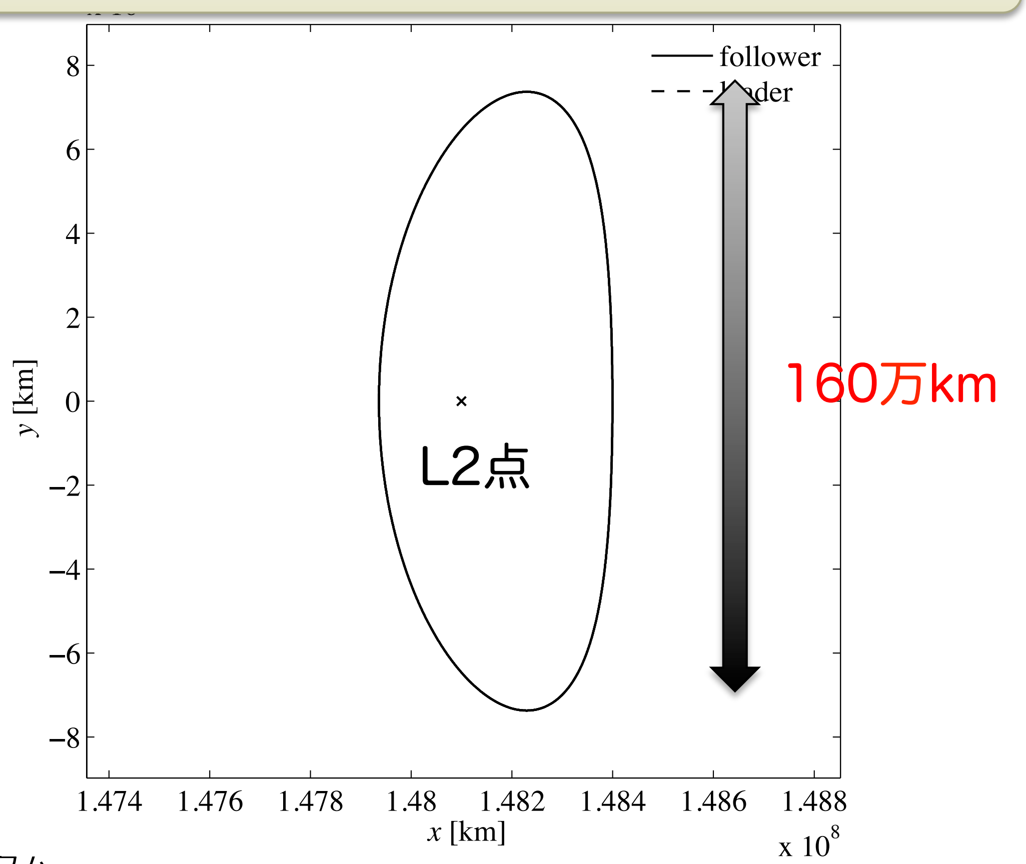
Formation flying using output regulation theory



Halo軌道(自然に存在する軌道)

- 不安定平衡点周りに存在する自然な周期軌道
- 大きな軌道(数10万km〜)

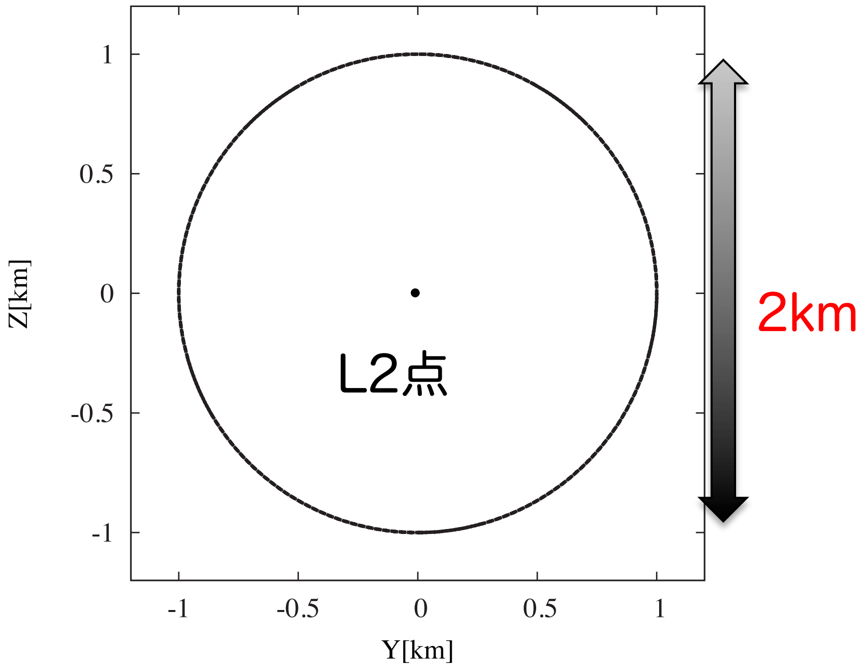
非線形性が強く軌道設計が難しい

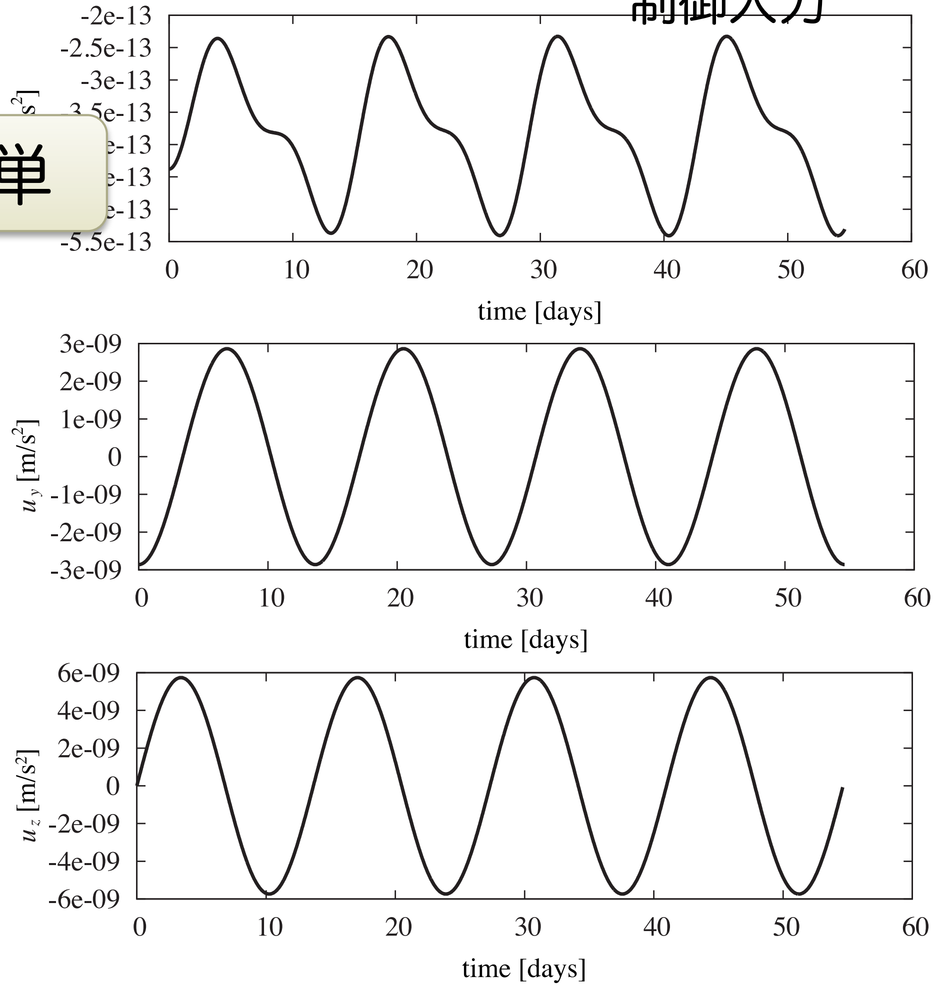


小halo軌道(人工的な軌道)

- 不安定平衡点周りに存在する人工的な小さな周期軌道
- 周期を任意に設計可能

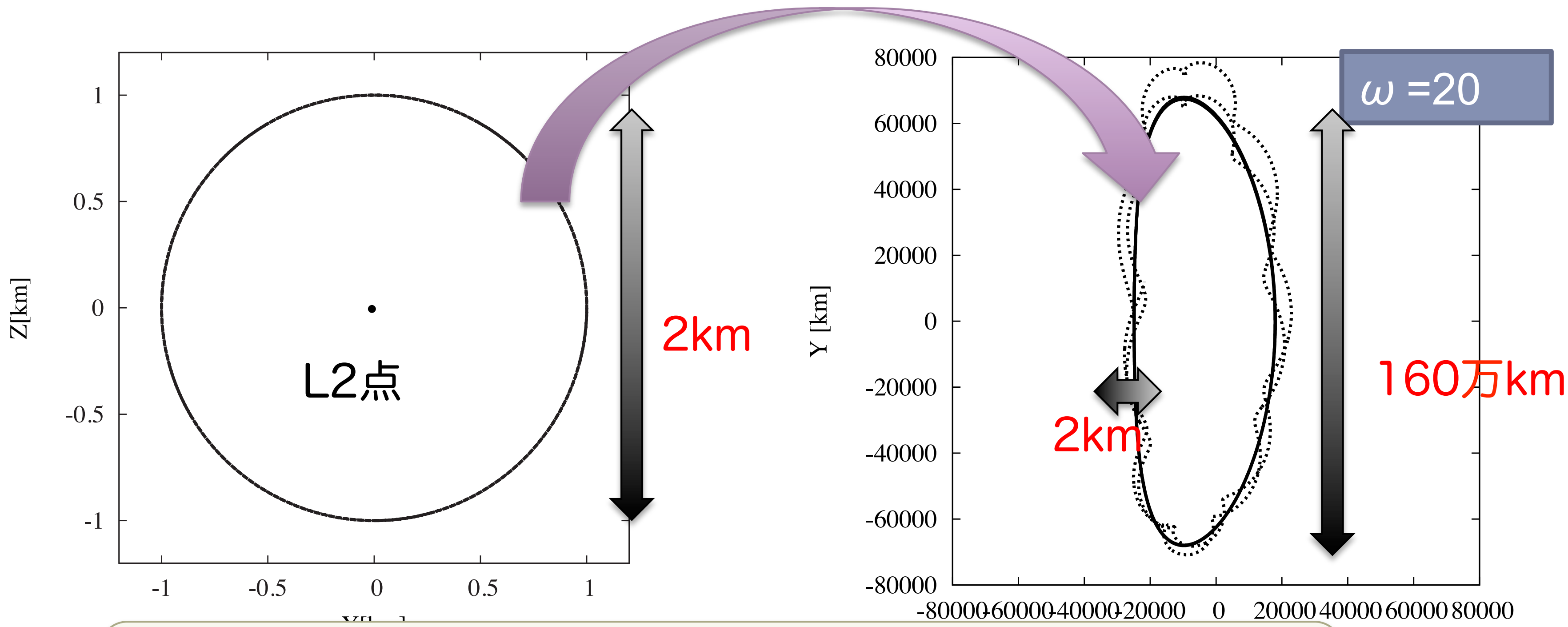
線形な領域での軌道設計は簡単





力学と制御の合わせ技

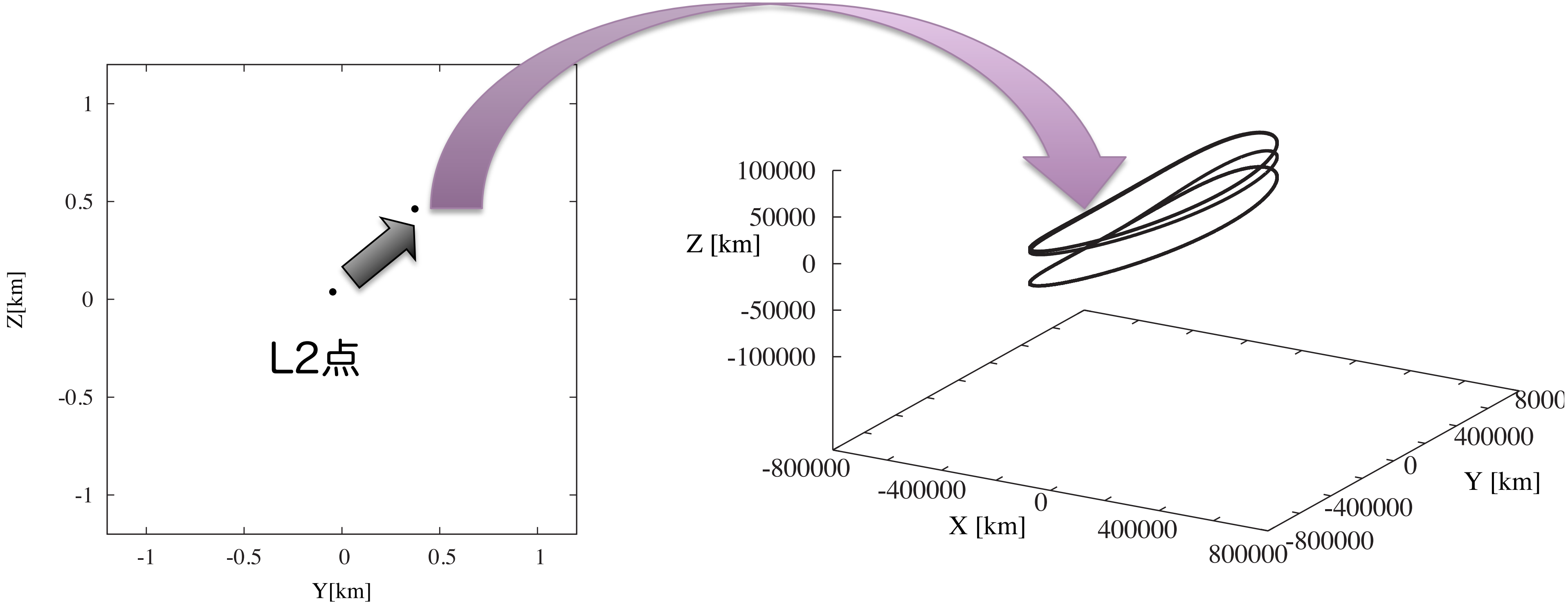
- L2点近くで小ハロー軌道を設計（左）
- Halo軌道に設計した小ハロー軌道を重ね合わせる．(右）



軌道設計が難しい領域でもフォーメーション
軌道が設計できた

合わせ技の応用

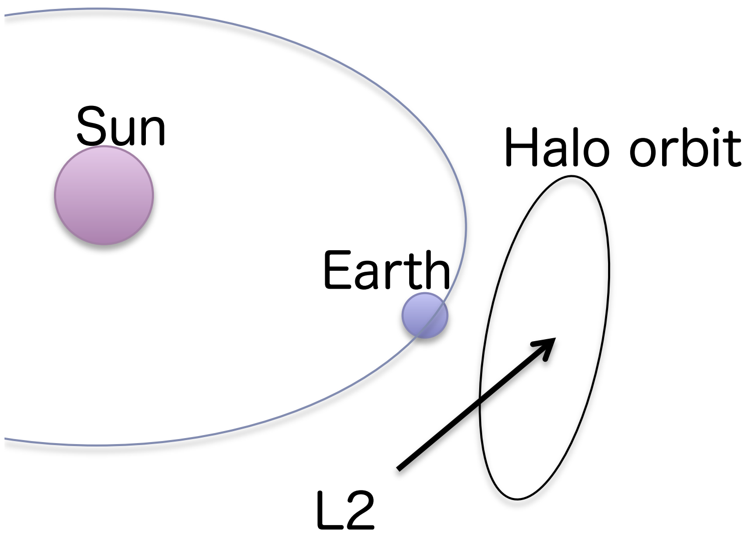
Halo軌道に小Halo軌道を重ねあわせることでずれたHalo軌道になる



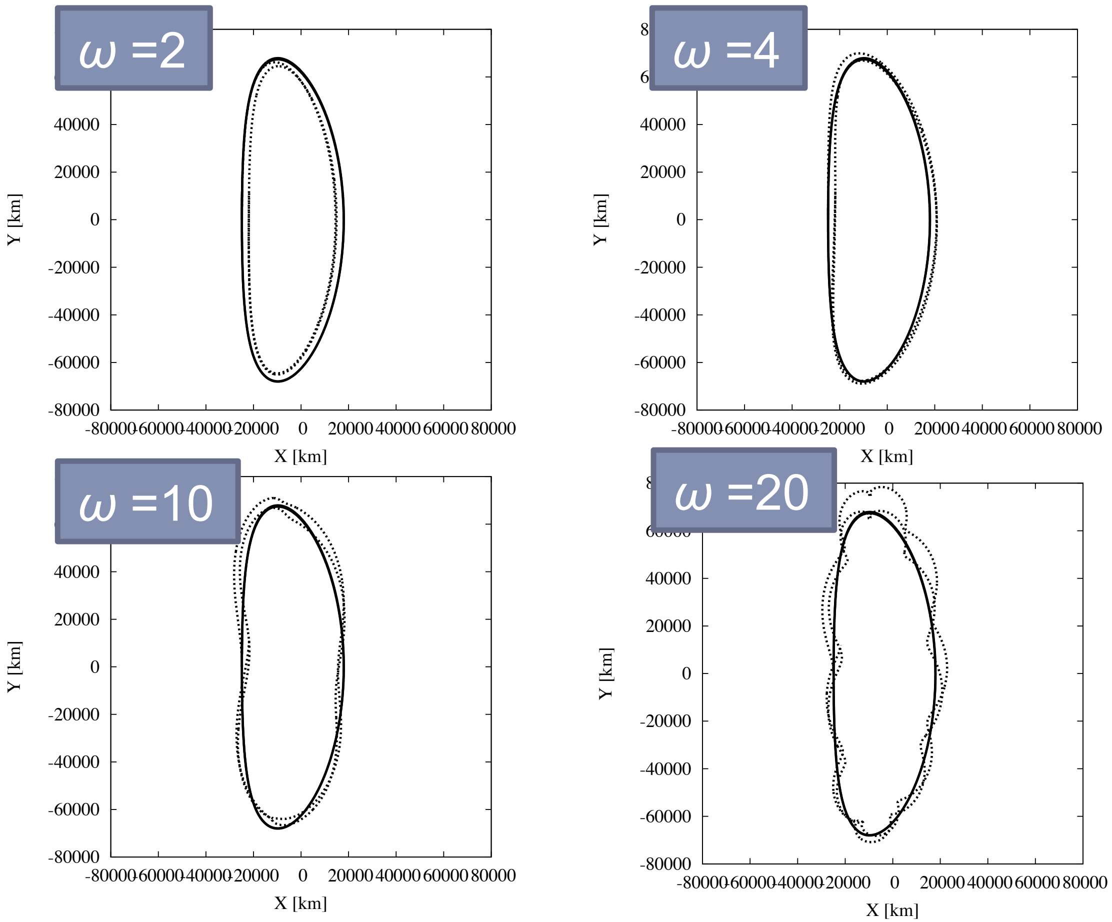
スラスタを用いたラグランジュ点の制御

三体問題におけるフォーメーション

ハロー軌道とは違う周期の周期軌道を設計した場合.



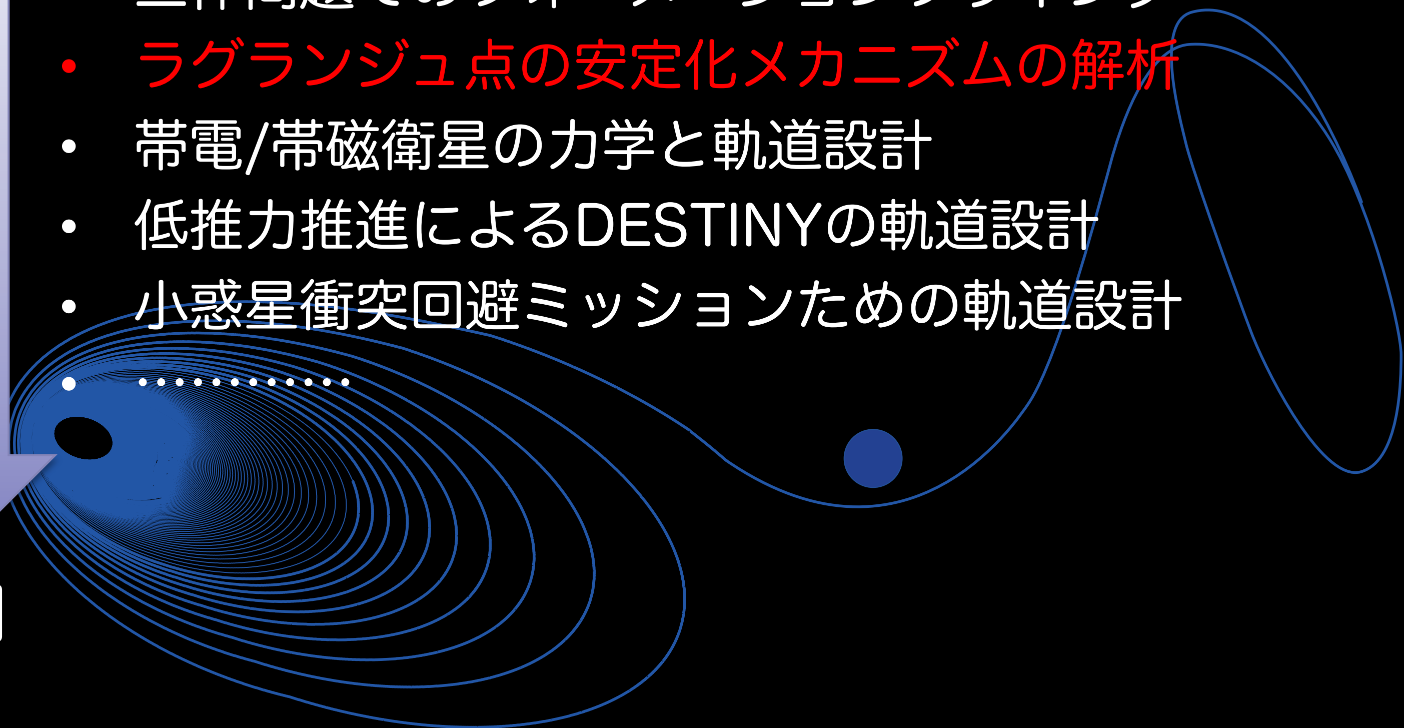
Formation flying using output regulation theory



Research Topics

理論・解析

- ハミルトンヤコビ方程式に基づく軌道設計
- 地球周回軌道上でのフォーメーションフライング
- 三体問題でのフォーメーションフライング
- ラグランジュ点の安定化メカニズムの解析
- 帯電/帯磁衛星の力学と軌道設計
- 低推力推進によるDESTINYの軌道設計
- 小惑星衝突回避ミッションための軌道設計
- …………

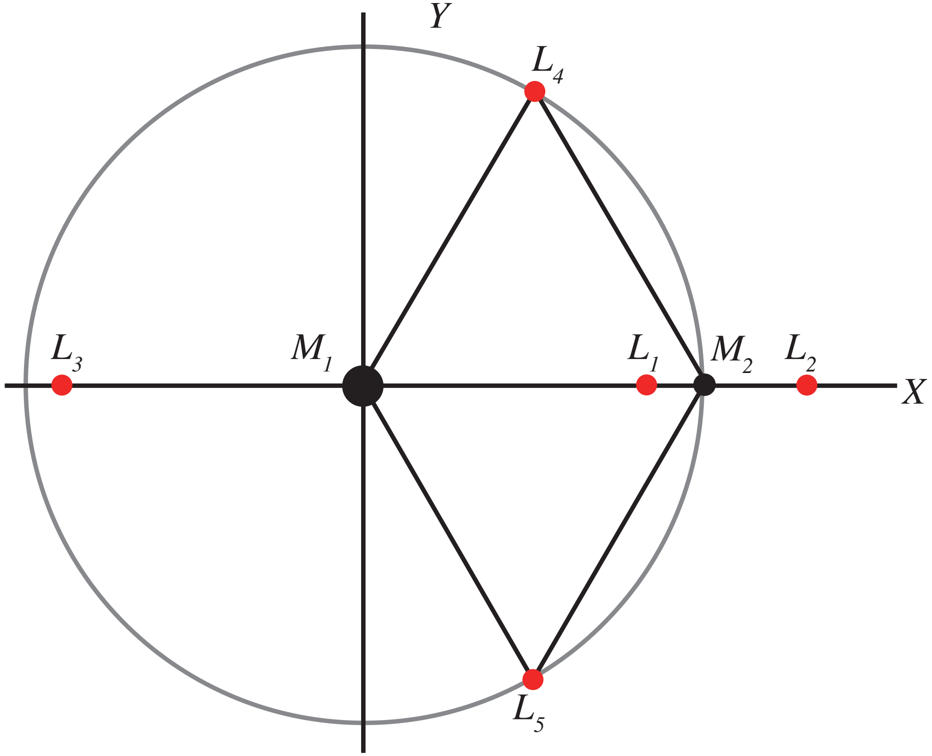


応用

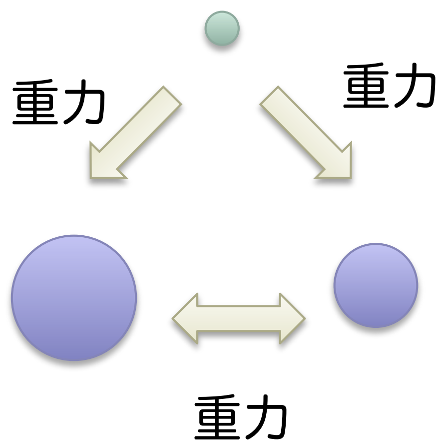
円制限三体問題

２つの天体に固定した回転座系で５つの平衡点
（引力がつりあう点）が存在する

5つの平衡点（ラグランジュ点）



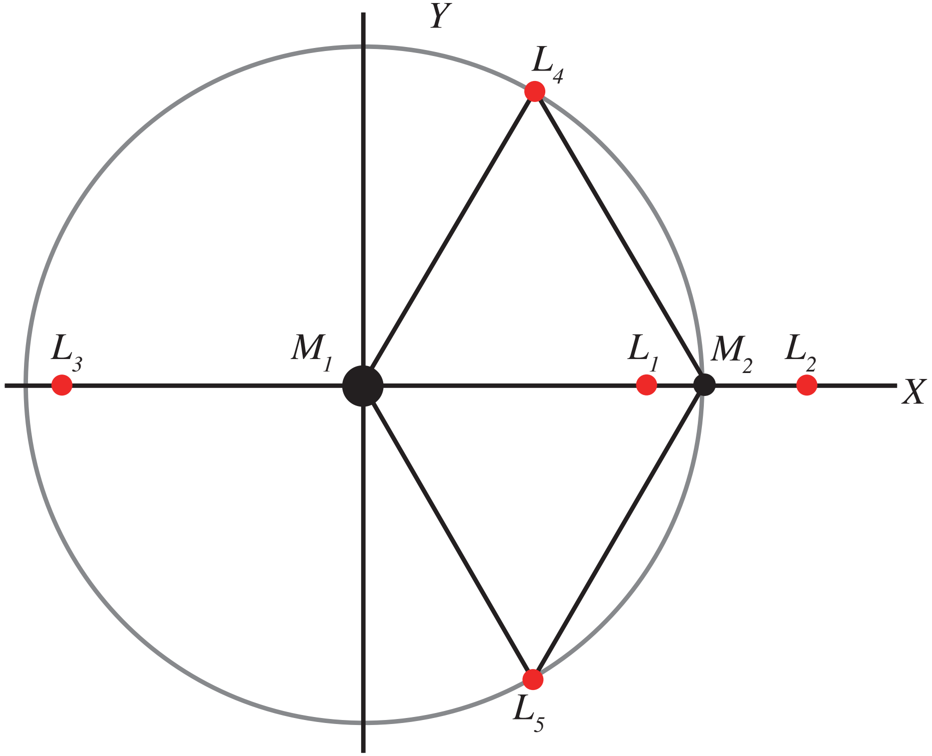
２天体が重心の周りを円運動



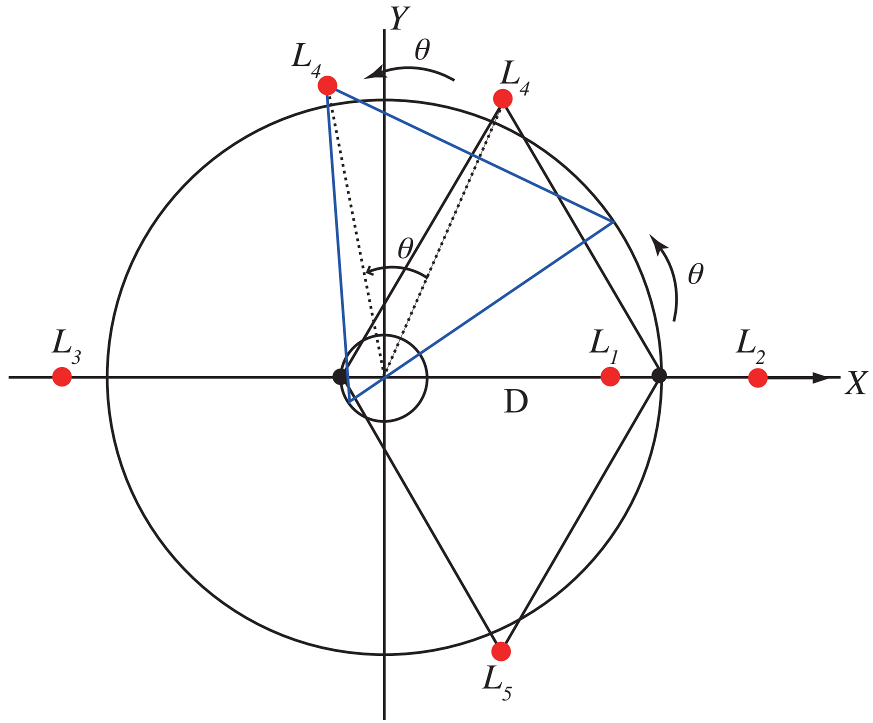
円制限三体問題

２つの天体に固定した回転座系で５つの平衡点
（引力がつりあう点）が存在する

5つの平衡点（ラグランジュ点）



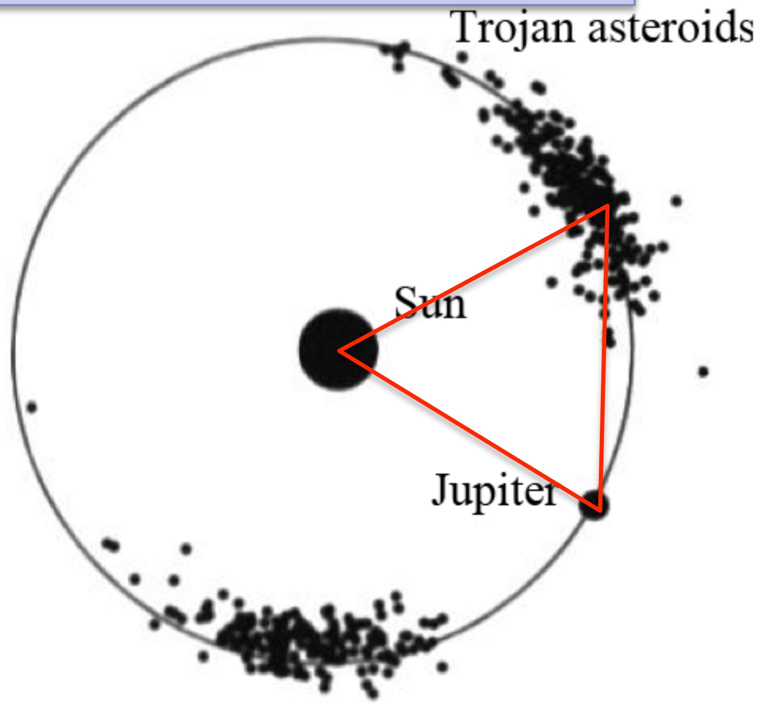
２天体が重心の周りを円運動



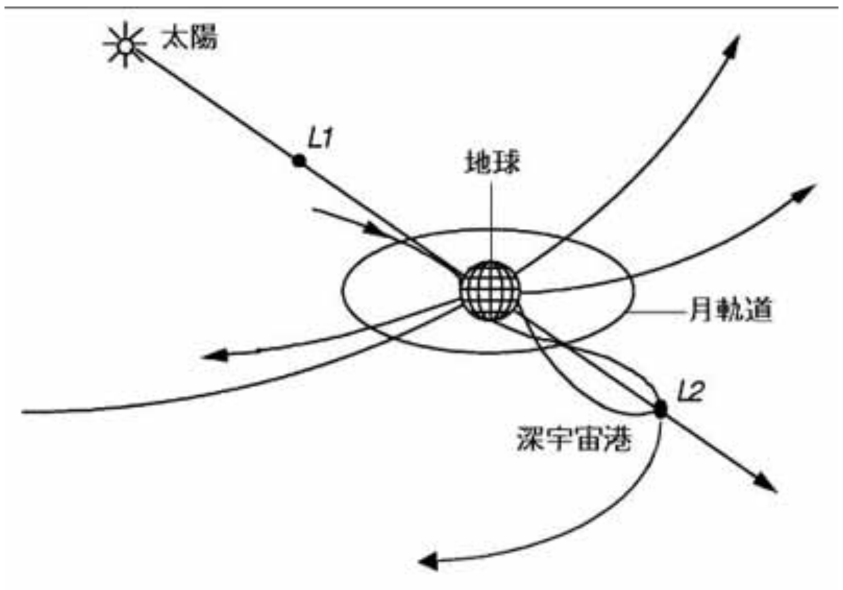
円制限三体問題

- 太陽/木星系：トロヤ郡小惑星
- 太陽/地球系：深宇宙港構想

太陽ー木星系:トロヤ群小惑星



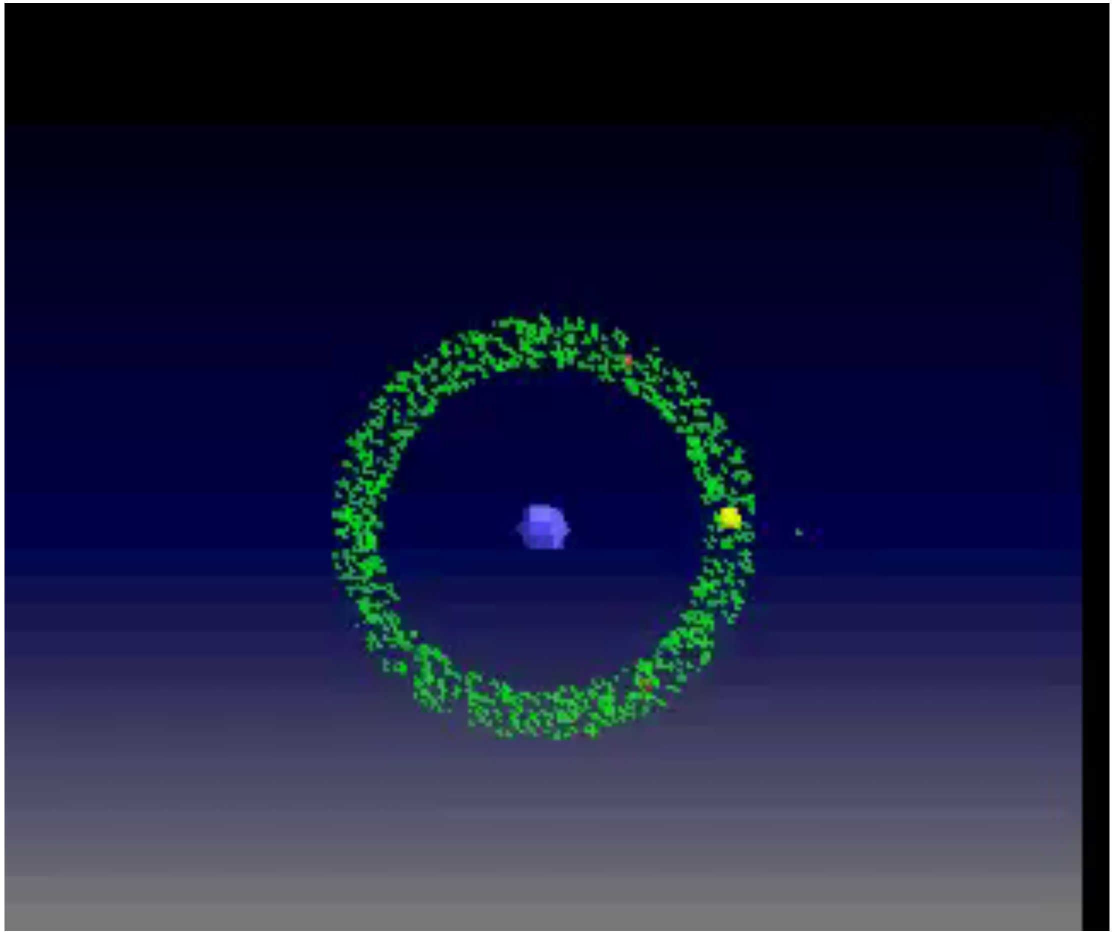
太陽ー地球系：深宇宙港構想



ISASニュース 2005.3 No.288

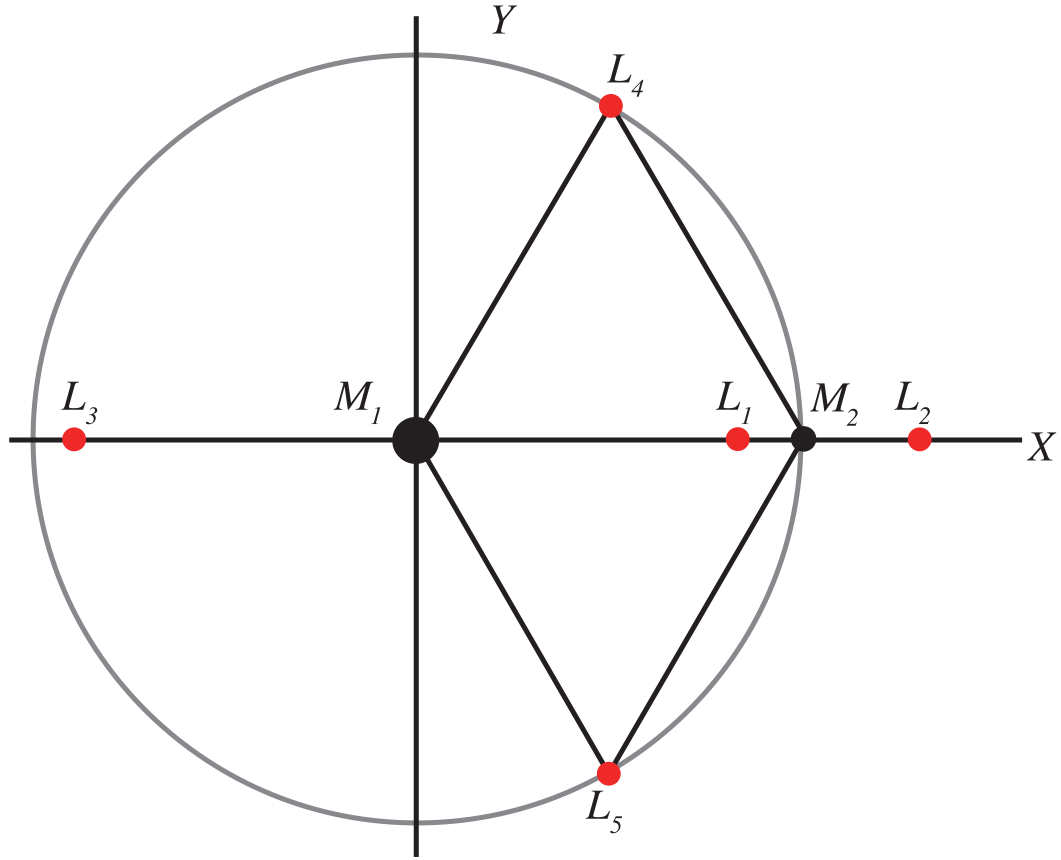
ISAS

安定なラグランジュ点



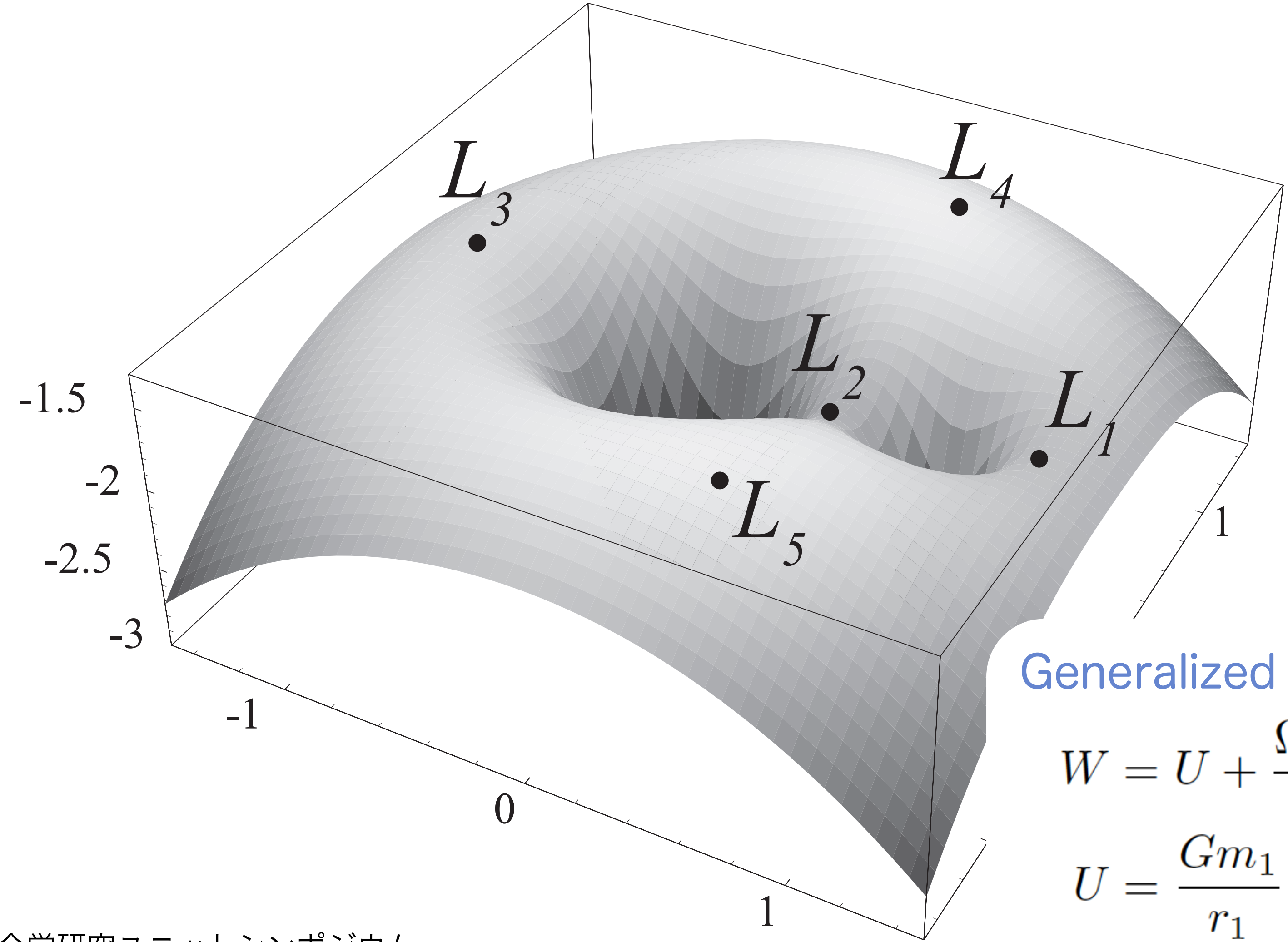
http://www.youtube.com/watch?v=zkk_81dR3GM

ラグランジュ点



ラグランジュ点

- 軌道を設計しようとするとこうみえる



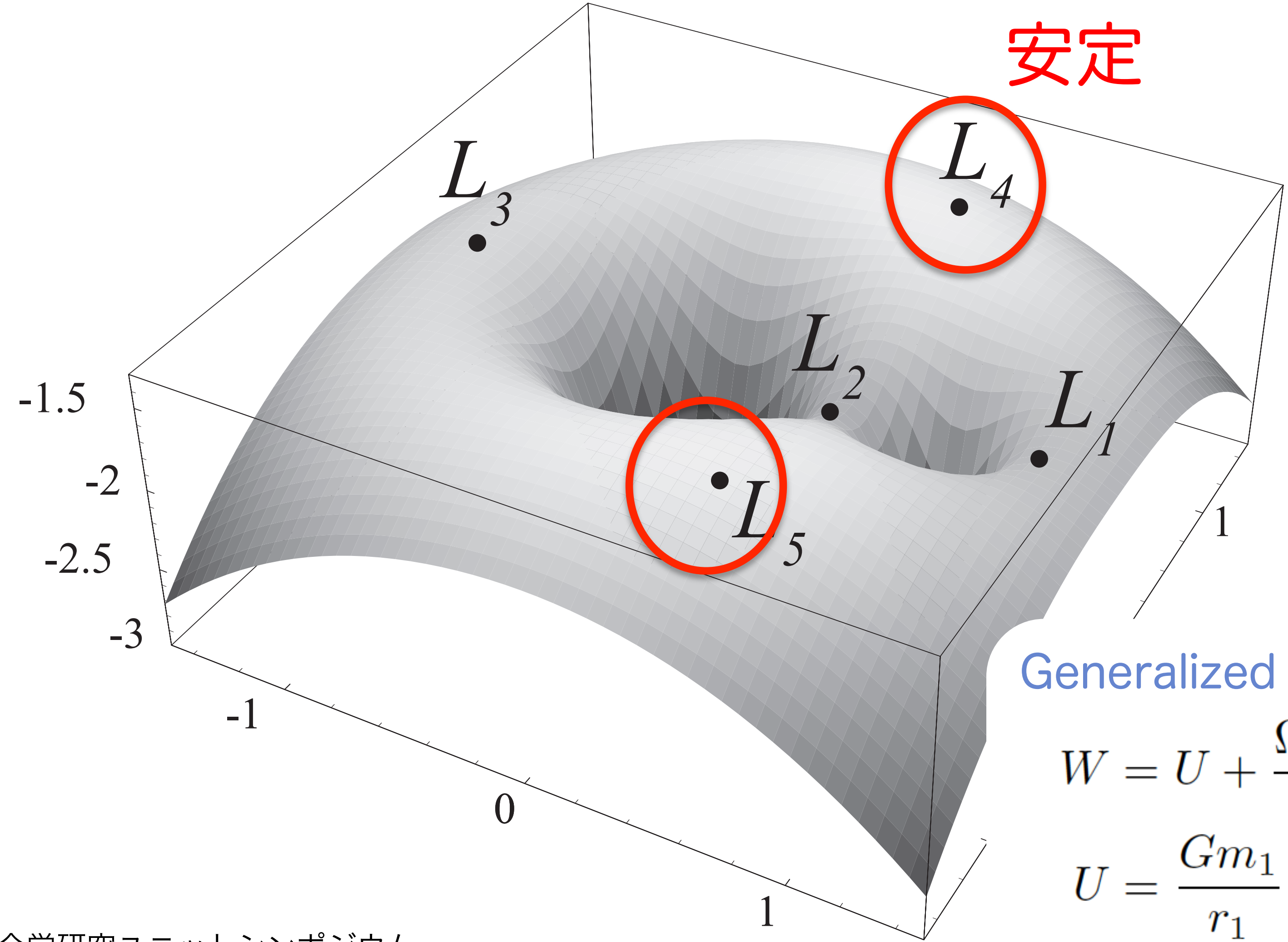
Generalized potential

$$W = U + \frac{\Omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

$$U = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}$$

L4/L5ラグランジュ点

- L4/L5点はポテンシャルカーブから転がり落ちない？



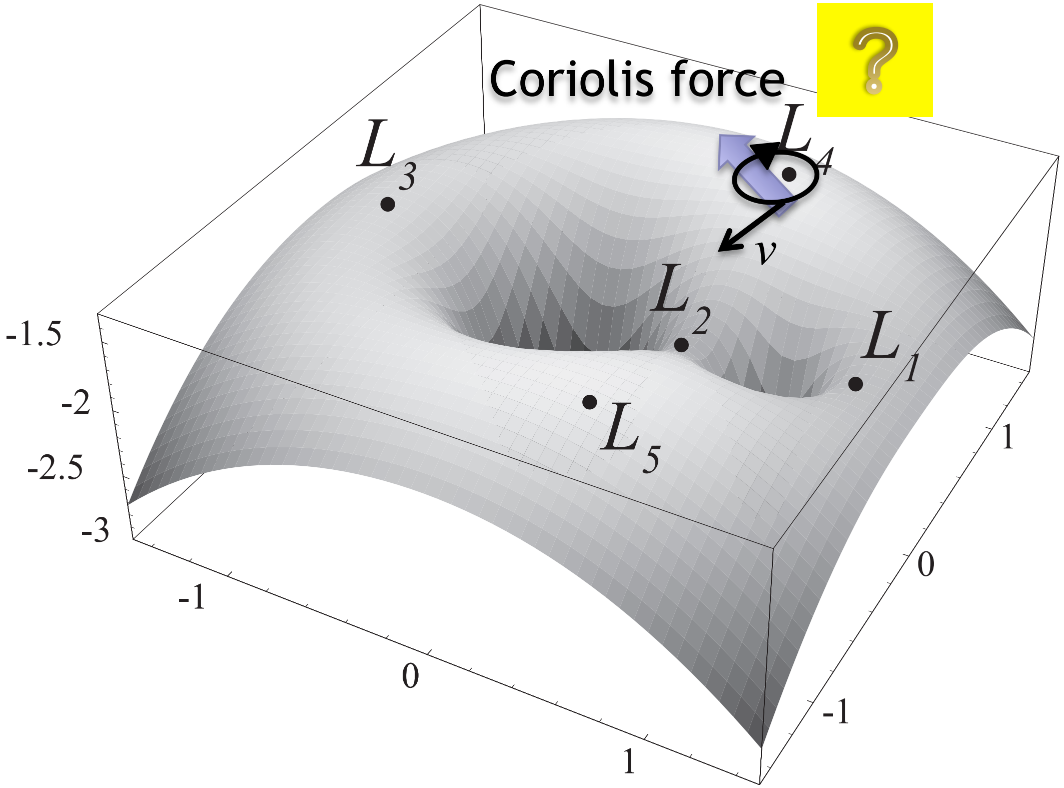
Generalized potential

$$W = U + \frac{\Omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

$$U = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}$$

L4/L5ラグランジュ点

- 安定化メカニズムの力学的解釈



Generalized potential

$$W = U + \frac{\Omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

$$U = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}$$

Coriolis force stabilize the L4 and L5 points.

最適制御からの特徴づけ

- Feedback structure in L4/L5 points

$$\dot{x} = (A - B\boxed{K})x = A_0 x$$

➡ 自然がどのような制御を行っているか特徴づけする

The inverse optimality of implicit control（result）

Theorem 1. The feedback control $u = -Kx \ (K \neq 0)$ which places all the closed-loop pole on the imaginary axis doesn't satisfy the return difference condition.

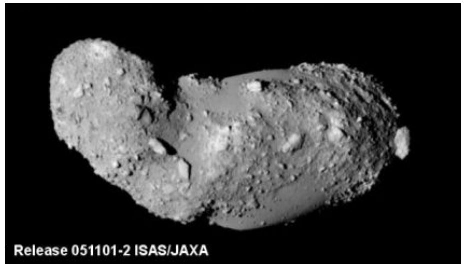
Theorem 2. The feedback control $u = -Kx \ (K \neq 0)$ which places all the closed-loop pole on the imaginary axis is optimal only if the cost has the following form:

$$J = \int_0^\infty \|K\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}\|^2 dt$$

例）ピーナッツ型小惑星の観測ミッション

- ピーナッツ型天体を三体問題とみたてることができる.

⇒三体問題の軌道の応用が可能！



Itokawa

ISAS/JAXA

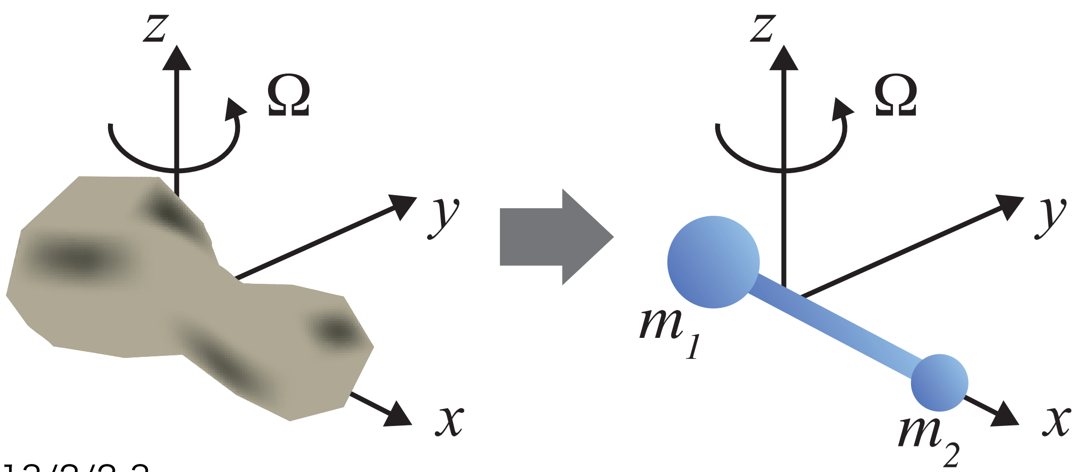
$$\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} = \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} = \frac{\partial W}{\partial y}$$

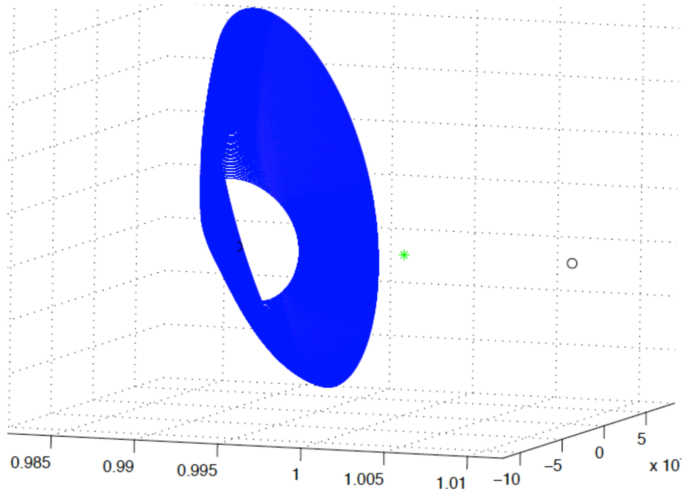
$$\ddot{z} = \frac{\partial W}{\partial z}$$

$$W = U + \frac{\Omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

$$U = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}$$



Periodic trajectory in the Vicinity of the asteroid

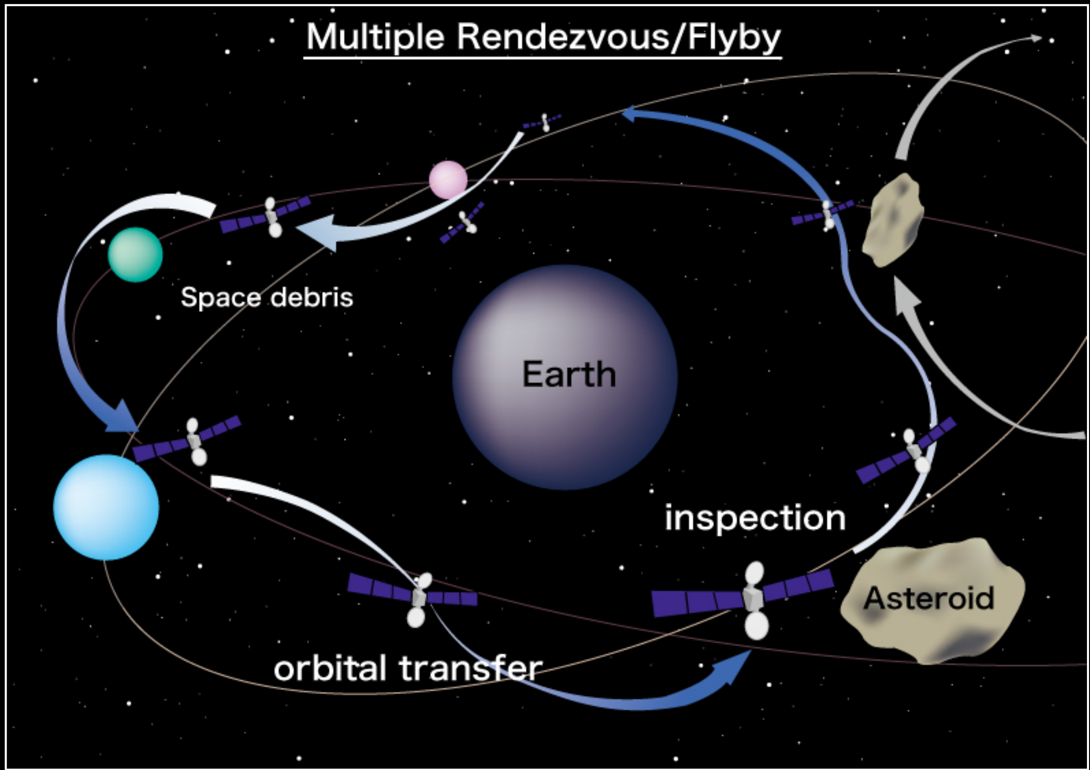


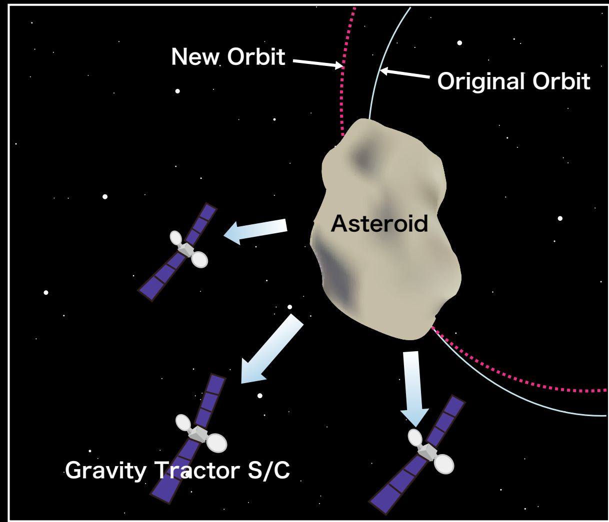
おわりに

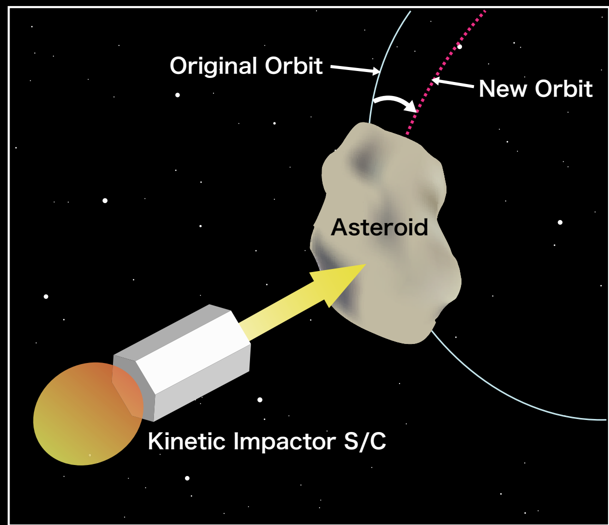
- 宇宙機の力学と軌道設計法について，特に解析的なアプローチに基づく軌道設計法を紹介した.
- これからの軌道設計では複雑な運動をより簡単に扱うアプローチが重要.
- 万有引力とスラスタをうまく組み合わせることでより上手な軌道設計を行うことができ，実現可能なミッションの幅が広がる.

Question?

軌道設計の自由度≒ミッションの自由度







Near Earth Asteroid observation missions

Future deflection missions of NEAs