

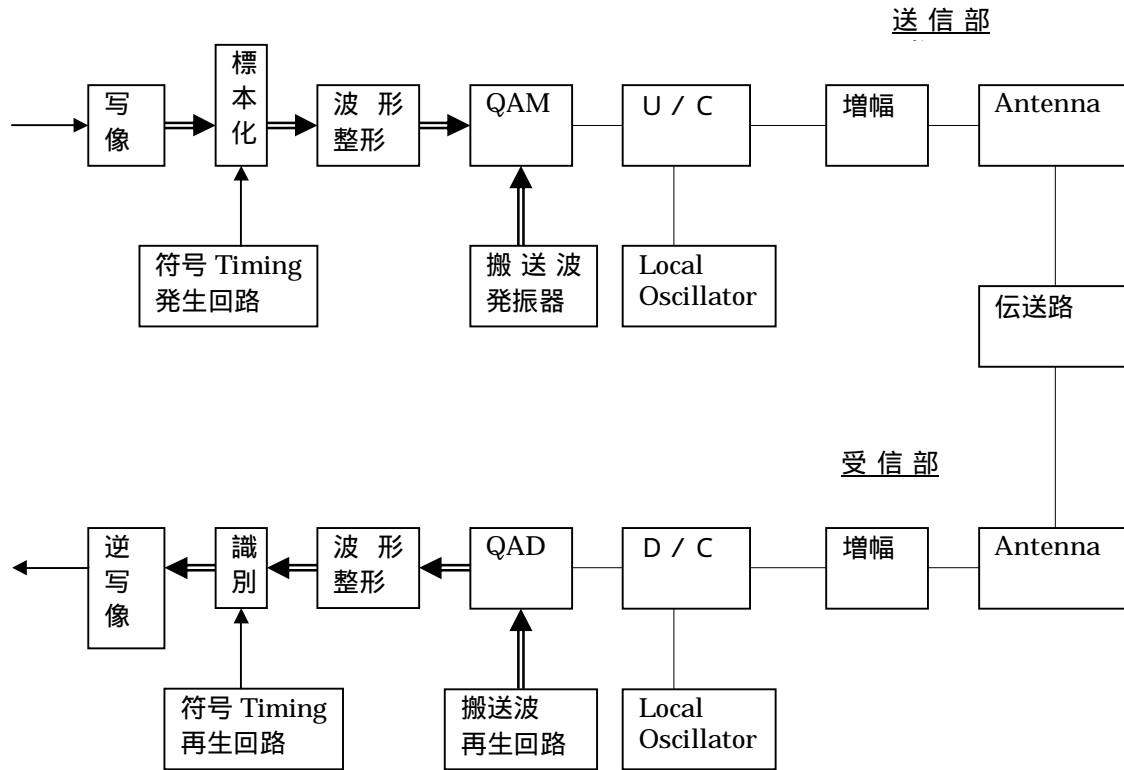
デジタル通信技術の基礎

市吉 修

	頁
1. デジタル通信回線の構成	1
2 . P A M伝送	1
3 . Nyquist の波形伝送方式	
3.1 理想 Nyquist Filter	3
3.2 Nyquist Filter とその特長	4
[1] 周波数特性	
[2] 時間 Impulse 応答	
[3] Nyquist の波形伝送方式	
4. 変調回路	5
<u>写像回路(Mapping or constellation circuit)</u>	
<u>波形整形フィルタ Wave shaping filter (WSF)</u>	
<u>Nyquist 信号伝送方式</u>	6
A1. 二相 PSK (BPSK)	
A2. 四相 PSK(QPSK)	
A3. 八相 PSK(8PSK)	
<u>非 Nyquist 伝送方式</u>	
B1. MSK	
B2. GMSK	
<u>Nyquist 方式の変形</u>	
C1 Offset QPSK (OQPSK)	
C2 $\pi/4$ QPSK	
<u>多値 QAM</u>	
<u>直行振幅変調(QAM)</u>	
5 復調回路	8
<u>搬送波(carrier)再生回路</u>	
<u>逡倍法</u>	
<u>逆変調法</u>	
<u>非同期検波</u>	
Filter and Dump 方式	
差動符号化	
<u>CLOCK(符号タイミング)再生回路</u>	
<u>包絡線検波</u>	
<u>零交差検出法</u>	
6 Digital 変調方式の誤り率特性	11
<u>信号伝送系のモデル</u>	
<u>BPSK の誤り率特性</u>	
<u>他の変調方式の誤り率</u>	
演習問題	13

1. デジタル通信回線の構成

一般に変調方式の違いを問わず以下の構成となる。

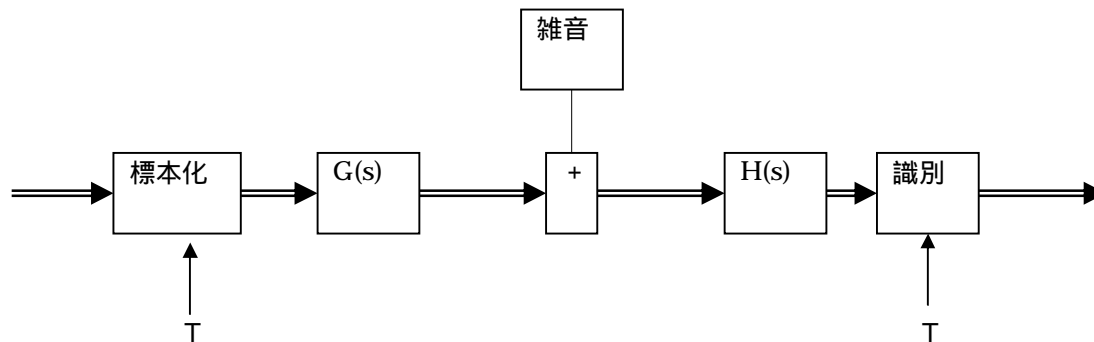


注 ⇒ ; 複素信号

写像、標本化、波形整形回路を Digital Signal Processing (DSP)で行うと変調方式を可変なシステムを容易に実現できる。

2 . P A M 伝送

データ伝送の本質は P A M (Pulse Amplitude Modulation) 伝送模型で表現できる。



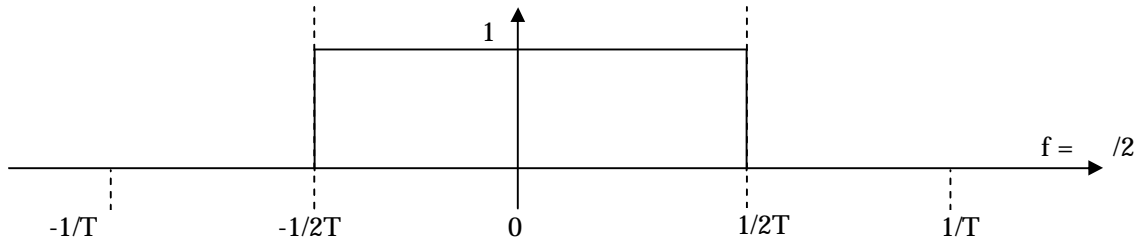
3 . Nyquist の波形伝送方式

上の P A M 伝送模型において送信、及び受信の波形整形フィルタ $G(s)$, $H(s)$ を全体として Nyquist フィルタ特性になるようにする。即ち

$$G(s) \cdot H(s) = X(s) \quad ; \text{Nyquist型フィルタ}$$

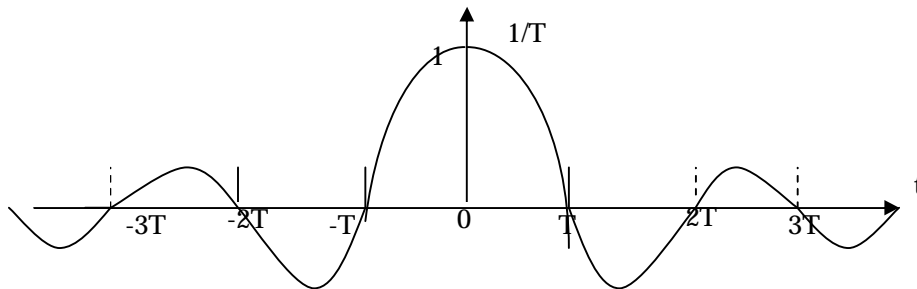
3.1 理想 Nyquist Filter

周波数特性



Impulse 応答

$$x_i(t) = 1/T \cdot \text{sinc}(t/T) / (t/T)$$



この Impulse 応答で本質的なことは

$$\begin{aligned} x_i(t) &= 1/T \quad (t = 0) \\ &= 0 \quad (t = \pm T, \pm 2T, \pm 3T, \dots) \end{aligned}$$

となることである。

これによって

帯域幅 $1/2T$ [Hz] の理想通信路を用いて伝送速度 $1/T$ (symbols/sec) で前後のパルスの干渉がゼロとなるパルス伝送が可能である。

そのためには受信部で正確な周期 T の時刻 (Symbol timing, or clock) を再生する必要がある。

また理想フィルタは現実には実現不可能である。仮に実現できたとしても信号波形

$$\text{sinc}(t/T) = \text{sinc}(t/T) / (t/T)$$

は収束が遅い、即ち振幅が時間軸上に遠くまで広がっているので少し再生 Symbol timing の誤差が生じると大きな符号間干渉が起きる。

そこで次の Nyquist Filter が用いられている。

3.2 Nyquist Filter とその特長

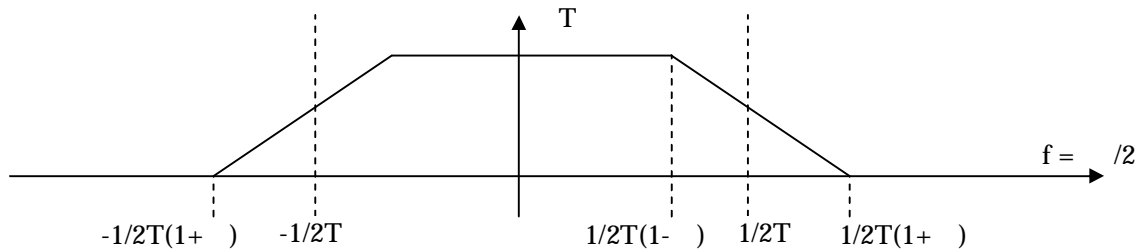
[1] 周波数特性

$$X(s) \quad (s = j\omega \quad ; \omega = -1)$$

周波数を $1/T$ の整数倍シフトして加え合わせるとインパルス時間信号の周波数特性に等しい。即ち、

$$[k=0, \pm 1, \pm 2, \dots] X(\omega + k \cdot 2\pi/T) = 1$$

例えば以下のようなものである (直線 Roll-off)。



用語

- T ; 標本化周期 (sec)
- $1/T$; 標本化速度 (Sample/sec, or Baud)
- $1/2T$; Nyquist Frequency
- r ; Roll-Off Factor ($0 \leq r \leq 1$)

Roll-off 率 $r = 0$ の場合は理想フィルタとなるが、それも一種の Nyquist filter である。

[2] 時間 Impulse 応答

上の直線 Roll-off filter の時間応答 $x(t)$ は

$$x(t) = \text{sinc}(\pi t/T) \cdot \text{sinc}(\pi t/T) \cdot \text{sinc}(\pi t/T)$$

上の第一因子は理想フィルタ ($r = 0$) の応答である。

有限 Roll-off の効果は第二因子に現れている。

(1) 理想フィルタの性質より

$$x(0) = 1$$

$$x(kT) = 0 \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

(2) 有限 Roll-off の効果により

t/T の大きいところでの減衰特性が $(t/T)^{-2}$ 即ち二乗で減衰する。

別の型の Nyquist フィルタを使えば更に減衰が早い。

余弦波形 Roll-off 型

例えばよく使われるのは余弦波形 (raised cosine) Roll-off 型である。正周波数特性は

$$X(\omega) = T \quad ; 0 \leq \omega \leq \pi/T(1-r)$$

$$= T/2 \cdot \{1 - \sin(T/2 (\omega - \pi/T))\} \quad ; \pi/T(1-r) \leq \omega \leq \pi/T(1+r)$$

時間応答は

$$x(t) = \sin(\pi t/T) / (\pi t/T) \cdot \cos(\pi t/T) / \{1 - (2\pi t/T)^2\}$$

となる。

第一因子は同じく理想フィルタである。

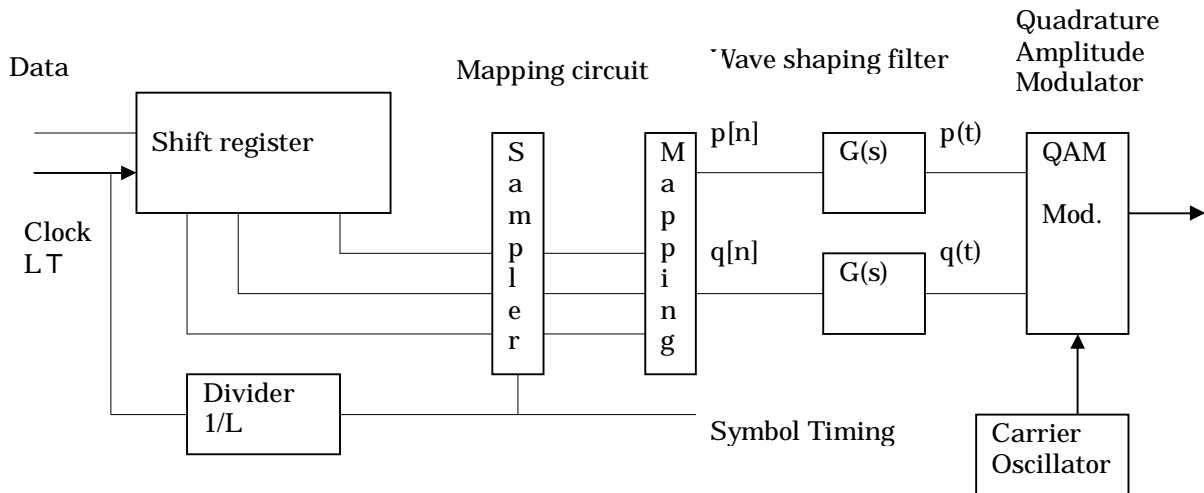
t/T の大きいところでの減衰特性が $(t/T)^{-3}$ 即ち三乗で減衰する。

[3] Nyquist の波形伝送方式

Nyquist Filter 特性の通信路を用いれば帯域幅を Roll-Off 率だけ相対的に拡大することにより理想フィルタの特長である前後の符号間干渉をゼロにしてしかも波形振幅の収束が早い信号波形の実現が可能である。またフィルタの周波数応答に不連続が無くなるので物理的に実現可能となる。

4. 変調回路

変調回路の一般形を下図に示す。



写像回路(Mapping or constellation circuit)

伝送さるべきデータは Shift register とクロック L 分周回路(Divider)と標本回路(Sampler)によって L 並列の信号に変換される。即ち L 個のデータを一括して複素平面に写像する。 L 個の二進データの取りうる場合の数は 2^L であるから複素平面には 2^L の相異なる点に対応づける。これを 2^L 値変調と呼ぶ。

$L=1,2,3,\dots$ に応じて 2, 4, 8 値となる。

L 個のデータは一括して複素平面に写像される。写像回路の出力は実部(Real)信号と虚部(Imaginary)信号の 2 本から成る複素信号 $p[n] + iq[n]$ ($i^2=-1, n=0,1,2,3,\dots$) である。

波形整形フィルタ Wave shaping filter (WSF)

写像回路の出力は Impulse 系列であり、波形整形フィルタを通して連続信号に変換される。

$$[\text{写像回路の出力}] = [n] \{ p[n] + iq[n] \} \cdot (t-nT)$$

$$[\text{WSF の出力}] = [n] \{ p[n] + iq[n] \} \cdot g(t-nT)$$

ただし $g(t)$ は WSF $G(s)$ の Impulse 応答である。

よく使われる変調方式は以下のものがある。

Nyquist 信号伝送方式

波形整形フィルタとして Root Nyquist フィルタを用いて送受総合特性を Nyquist filter とする。これは伝送路で加わる雑音の周波数特性が平坦な場合 (white noise) 送受信部の伝達特性が整合フィルタ (matched filter) となり復調信号の S/N 比を最大化できる。

A1. 二相 PSK (BPSK)

Bi-phase shift keying, BPSK である。写像回路の出力は $p+ip$, 即ち $p = q$ でありデータの 0,1 に対応して $p = q = +1, -1$ の何れかに対応づける。

A2. 四相 PSK(QPSK)

Quadrature phase shift keying である。二進データ 2 個の取り得る 4 通りの値に対して複素平面では $(p,q) = (+1,+1), (+1,-1), (-1,+1), (-1,-1)$ の何れかに対応づける。

A3. 八相 PSK(8PSK)

二進データ 3 個を複素平面上の 8 個の点に写像する。複素信号を

$$p + iq = a \cdot e^{i(\quad)}$$

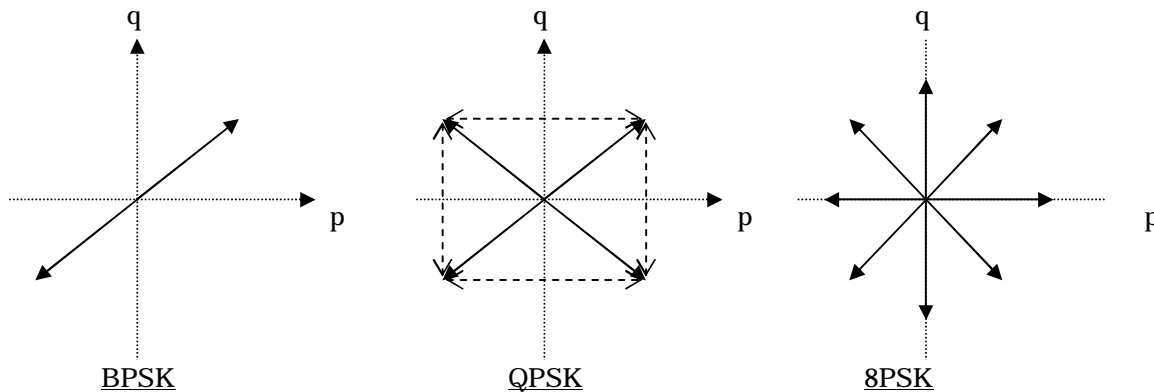
ただし

$$\text{振幅 } a = \sqrt{p^2 + q^2}$$

$$p = a \cdot \cos(\quad)$$

$$q = a \cdot \sin(\quad)$$

三個の二進データの組み合わせを $[k] = (2/8) \cdot k$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) の八個の点に対応付ける。



非 Nyquist 伝送方式

B1. MSK

Minimum shift keying の略で写像回路までは上の QPSK と同じであるが波形整形フィルタの応答は次図のようなものである。

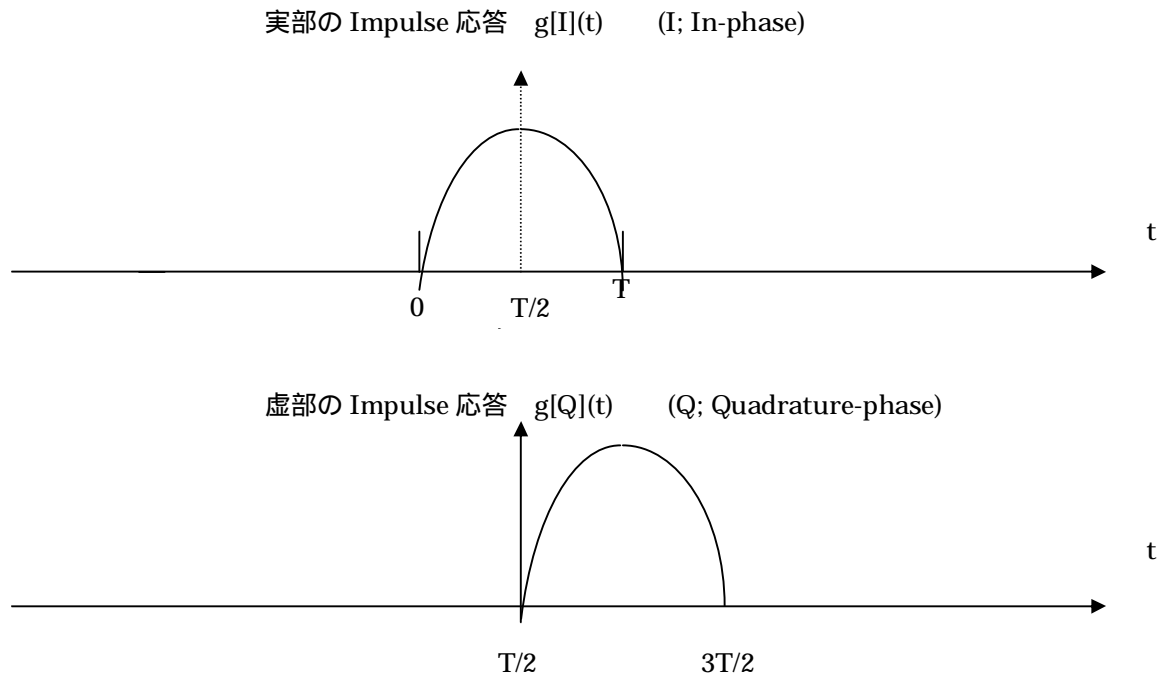
(1) 実部の応答は $g[I](t) = \sin(t)$ ($0 < t < T$)
 0 (それ以外)

(2) 虚部の応答は $g[Q](t) = g[I](t-T/2)$

MSK 方式の特長は実部と虚部が同時に 0 になることはなくまた常に振幅が一定となることである。

$$g[I](t)^2 + g[Q](t)^2 = \sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$$

この性質は通信路が非線形性のものであるとき、劣化が生じない特長となる。



MSK 変調回路の波形整形フィルタの Impulse 応答

B2 GMSK

MSK 方式の欠点は周波数帯域幅が有限でないことである。

(MSK 方式の波形整形フィルタのフーリエ変換を行い周波数特性を求めよ)

そこで MSK 変調信号に Gauss 型フィルタによる帯域制限を行う方式が GMSK 方式である。

C. Nyquist 方式の変形

C1 Offset QPSK (OQPSK)

波形整形フィルタは Nyquist 型を用いて実部と虚部に上の MSK と同様に $T/2$ の時間差を持たせる。このことによって MSK と同様に信号の振幅はほぼ一定となる。

C2 $\pi/4$ QPSK

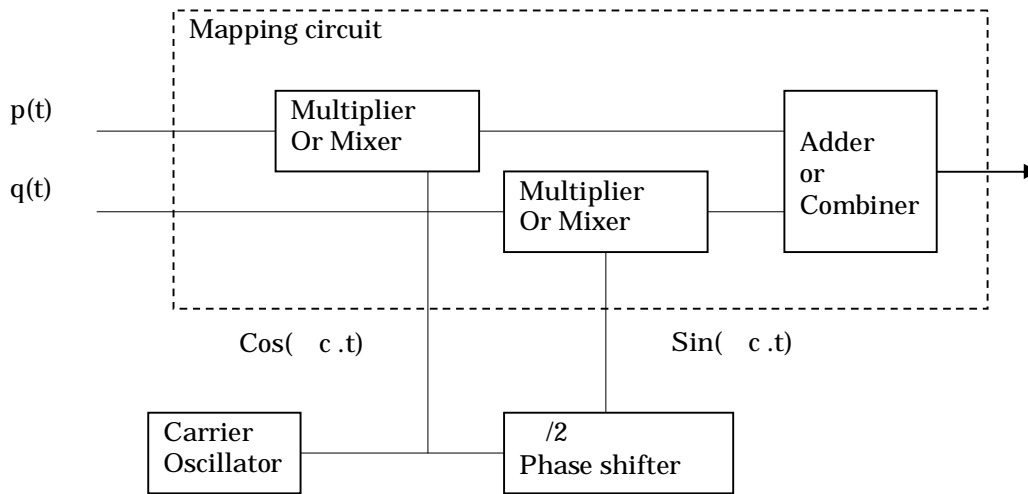
QPSK の 4 個の位相として 2 グループ $\{ \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4 \}$, $\{ 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2 \}$ の間を交互に偏移する。そこから $\pi/4$ シフト QPSK と呼ばれる。

OQPSK と $\pi/4$ QPSK の特長は変調された信号の振幅変動が小さいことである。通信路に非線形回路がある場合の劣化を小さくできる特徴がある。

D. 多値 QAM

QPSK は $p+iq$ において $p = \{1, -1\}$, $q = \{1, -1\}$ となるが $p = \{3, 1, -1, -3\}$, $q = \{3, 1, -1, -3\}$ なる組み合わせでは 16 値 QAM となる。QPSK は各パルス当たり 2 ビットの情報を運ぶが 16 値 QAM は 4 ビット運ぶことができる。同様に 256QAM では 8 ビットを運ぶ。このように多値数を上げると情報伝送効率は上がるが回路設計は困難になる。

直行振幅変調(QAM)



上の回路の出力は

$$s(t) = p \cdot \cos(c.t) - q \cdot \sin(c.t)$$

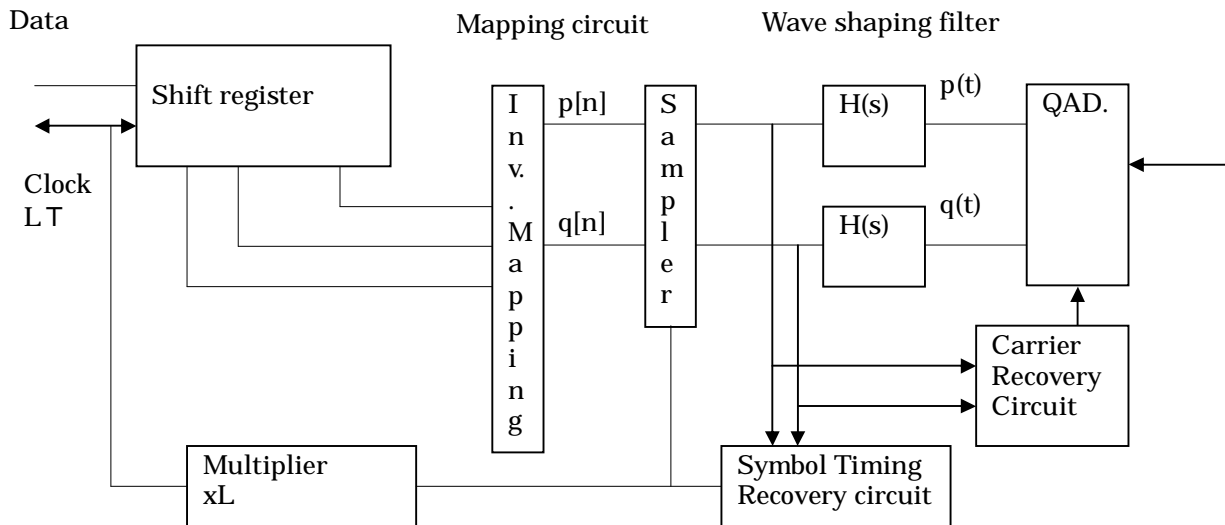
$$= \text{Re}\{ (p + iq) \cdot e^{i(c.t)} \}$$

となり複素信号処理と考えると一元的に把握される。即ち変調とは変調信号 $p+iq$ と搬送波 $e^{i(c.t)}$ の乗算を行うことである。

5 復調回路

復調回路の一般形を下図に示す。

前述の変調回路の逆の動作を行う。受信信号から搬送波(carrier)と符号タイミング(Symbol timing, or clock)を再生する回路を設ける必要がある。



搬送波(carrier)再生回路

通常変調波は搬送波成分を含んでいない。この事を確かめて見よう。

変調データ系列を $d[n]$ ($n=0,1,2,3,\dots$) とすると変調波は

$$s(t) = \sum_n d[n] \cdot g(t-nT) \cdot e^{j \cdot c \cdot t} \quad (j^2 = -1)$$

ただし $g(t)$ は送信波形整形フィルタのインパルス応答、 c は搬送波周波数である。

この信号の中に搬送波 $e^{j \cdot c \cdot t}$ 成分が含まれているとするとその振幅は

$$A = \langle \sum_n d[n] \cdot g(t-nT) \rangle$$

となる。ただし $\langle x(t) \rangle$ は $x(t)$ の時間平均を表す。 $g(t-nT)$ は前後のデータを重ね合わせる動作をする。

通常 $d[n] = +1, -1$ の 2 値をランダムに取るので上の平均は 0 となる。即ち $A=0$ となり搬送波成分は無い。

逓倍法

例えば BPSK の場合は 2 逓倍すると

$$\begin{aligned} s(t)^2 &= \sum_n \sum_m d[n] \cdot d[m] \cdot g(t-nT) \cdot g(t-mT) \cdot e^{j2 \cdot c \cdot t} \\ &= \sum_n d[n]^2 \cdot (g(t-nT))^2 \cdot e^{j2 \cdot c \cdot t} \\ &\quad + \sum_{[m] \neq [n]} d[n] \cdot d[m] \cdot g(t-nT) \cdot g(t-mT) \cdot e^{j2 \cdot c \cdot t} \end{aligned}$$

BPSK の場合等確率で $d[n] = +1$, 又は -1 となるが、上の式の第一項はデータの如何に関わらず $d[n]^2=1$ である。第二項は前後のデータの積の総和であるが変調データがランダムであると打ち消しあって平均的にはゼロとなる。

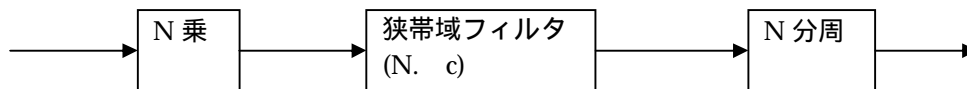
$$s(t)^2 = A \cdot e^{j2 \cdot c \cdot t} + \{ \sum_n \sum_m d[n] \cdot d[m] \cdot g(t-nT) \cdot g(t-mT) - A \} \cdot e^{j2 \cdot c \cdot t}$$

ここで

$$A = \langle \sum_n d[n]^2 \cdot (g(t-nT))^2 \rangle = \langle \sum_n (g(t-nT))^2 \rangle$$

上の式の第二項は雑音であるので除去する必要がある。搬送波は線スペクトルなので $2 \cdot c$ に同調したフィルタや PLL で濾波する。最後に 2 分周すると周波数 c の搬送波成分が得られる。

QPSK の場合は 4 逓倍、8PSK の場合は 8 逓倍する。一般に N 相 PSK の搬送波再生回路の構成は下図のようになる。



逆変調法

まず入力信号に対してできるだけ搬送波周波数に近く設定された局部発振器 $e^{j \cdot L \cdot t}$ でゼロ Hz 帯に周波数変換する。

$$s'(t) = s(t) \cdot e^{-(j \cdot L \cdot t)} = \sum_n d[n] \cdot g(t-nT) \cdot e^{j \cdot e \cdot t}$$

ただし

$$e = c - L$$

$s'(t)$ から暫定的に変調データ $d'[n]$ を再生する。

次に暫定データ $d'[n]$ により $s'(t)$ を逆変調(inverse modulation)する。その結果 $s''(t)$ は

$$\begin{aligned} s''(t) &= \sum_n d[n] \cdot d'[n]^* \cdot g(t-nT) \cdot e^{j \cdot e \cdot t} \\ &= A \cdot e^{j \cdot e \cdot t} + \{ \sum_n d[n] \cdot d'[n]^* \cdot g(t-nT) - A \} \cdot e^{j \cdot e \cdot t} \end{aligned}$$

ただし

$$A = \langle \sum_n d[n] \cdot d'[n]^* \cdot g(t-nT) \rangle$$

A が非ゼロであるためには $d[n]$ と $d'[n]^*$ の積が非ゼロの平均値を持つことが必要である。即ち十分長い時間に亘り、部分的にはデータ再生が出来ていなくてはならない。そのためには少なくとも周波数誤差 e が十分小さいことが必要である。

BPSK や QPSK に対しては暫定データ再生回路は単なる符号(+か-)検出器(hard limiter)でよい。QPSK の逆変調回路を次に示す。逆変調回路は複素乗算の虚数部分を計算すると搬送波位相誤差検出器を兼ねる動作を行う。即ち

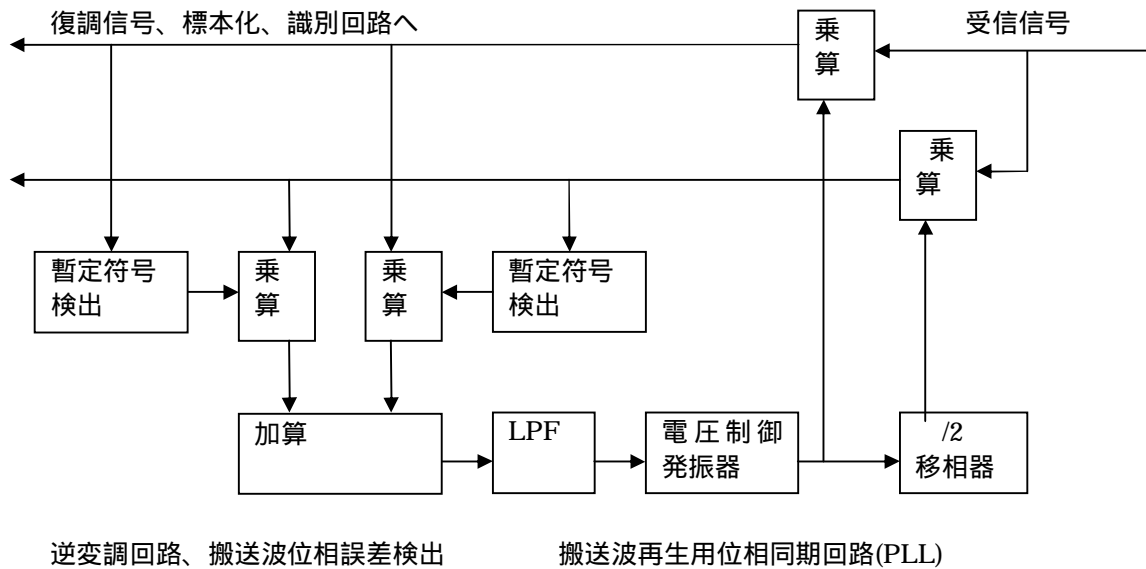
$$\text{Im} \{ \sum_n d[n] \cdot d'[n]^* \cdot g(t-nT) \} \cdot e^{j \cdot e \cdot t} = A \cdot \sin(e \cdot t + \theta)$$

搬送波再生が確立すると高い確率でデータ再生が正しく行われる。位相同期状態では

$$e = 0$$

$$A \cdot \sin(e \cdot t + e) = A \sin(e) \quad (=) \quad e$$

となり PLL が閉ループとして動作する。



非同期検波

上述の搬送波再生を行う方法を同期検波(Coherent detection)と呼ぶ。PLL を用いる搬送波再生には同期確立に要する時間がかかる。受信信号の先頭からの復調を可能にするには搬送波再生を必要としない非同期検波(non-coherent detection)が有効である。その代表的な方法は遅延検波(Delay detection)である。受信信号 $s(t)$ に対して一符号だけ遅延した信号 $s(t-T)$ を作り $s(t) \cdot s^*(t-T)$ を演算し更にフィルタ動作を行う。受信信号 $s(t) = [n] \quad d[n] \cdot g(t-nT) \cdot e^{j \quad c \cdot t}$ に対して

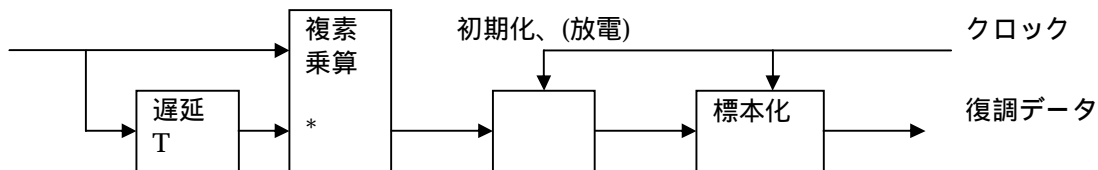
$$s(t) \cdot s^*(t-T) = [n \cdot m] \quad d[n] \cdot d^*[m] \cdot g(t-nT) \cdot g^*(t-mT-T) \cdot e^{j \quad c \cdot t} \cdot e^{-j \quad c \cdot (t-T)}$$

$$= e^{j \quad c \cdot T} \cdot \{ [n] \quad d[n] \cdot d^*[n-1] \cdot g(t-nT) / g^*(t-nT) + [n \neq m] \quad d[n] \cdot d^*[m-1] \cdot g(t-nT) \cdot g^*(t-mT) \}$$

上の式の第一因子 $e^{j \quad c \cdot T}$ は定数であるので複素共役数を掛けて除去することができる。

Filter and Dump 方式

波形整形フィルタが矩形変調の場合には $g(t) = 1(-T/2 < t < T/2)$, 0(それ以外)であるので上の式の第二項は0となる。また上の遅延検波の出力は一符号長に限られるので一つの符号に対して積分を行い次の復調データに切り替わる時に標本化を行うと同時に積分器を初期化(放電)する Filter-dump 方式が良く用いられる。その構成を次図に示す。



差動符号化

受信部の遅延検波の結果情報データ系列を正しく再生するためには送信側で作動符号化(differential coding)を行う。本来の情報データを $D[n]$, 変調データを $d[n]$ とすると $d[n] = D[n] / d^*[n-1]$ なる符号化を

行えば受信部の遅延検波の結果は $d[n] \cdot d^*[n-1] = D[n]$ となり情報データが直接再生できる。

CLOCK(符号タイミング)再生回路

Nyquist の波形伝送システムで本質的な役割を果たすクロック再生法としては次の方法が良く用いられる。

包絡線検波

QAM 変調においてはデータ変化に応じて振幅が変動するので二乗検波等により振幅の大きさを検波すればクロック成分が含まれるので PLL 等の狭帯域回路で選択すればよい。MSK や FSK などの振幅変動の無い変調方式に対しては次の零交差検出法が有効である。

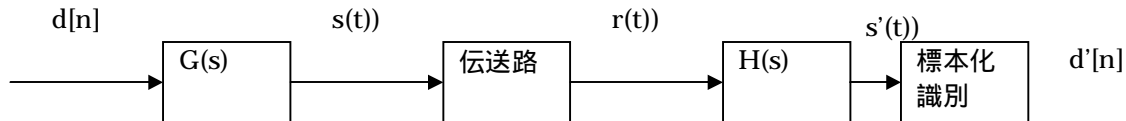
零交差検出法

DSP 構成の復調回路においては変調速度の二倍で標本化を行い、前後のデータが変化するときその中間のタイミングの標本値によって標本化タイミングの誤差が検出される。その誤差をフィルタリングして周波数制御発振器に帰還すれば前述の逆変調搬送波再生回路と同様にしてクロック再生が可能になる。

6 Digital 変調方式の誤り率特性

信号伝送系のモデル

前述の搬送波再生、クロック再生が正しく行われるとデータ伝送系の動作は次のパルス伝送系でモデル化される。



ここで G(s),H(s)はそれぞれ送信部、受信部のチャネルフィルタの特性である。

送信信号は

$$s(t) = a \cdot [n] \cdot d[n] \cdot g(t-nT)$$

受信信号は

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

となる。ただし n(t)は伝送路で加わる雑音である。

受信フィルタ H(s)の出力において

$$s'(t) = a \cdot [n] \cdot d[n] \cdot g(t-nT)(\cdot) h(t) + n(t)(\cdot) h(t)$$

ただし(・)は畳み込み積分である。

送受信部の波形整形フィルタについては

$$g(t-nT)(\cdot) h(t) = \int g(t-nT-t') \cdot h(t') dt' = x(t-nT)$$

x(t)は Nyquist filter のインパルス応答であり、

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \quad (t=0) \\ &= 0 \quad (t= \pm T, \pm 2T, \pm 3T, \dots) \end{aligned}$$

t = kT における標本値 s'(kT)は

$$s'(kT) = a \cdot x_0 \cdot d[k] + n'(kt)$$

となる。ここで雑音 n'(kt)は

$$n'(t) = n(t)(\cdot) h(t) \quad (t=kT)$$

n'は熱雑音でありその振幅は平均値 0 で二乗分散が雑音電力に等しい正規分布を成す。

$$Pn' = 1 / (2 \langle n'^2 \rangle) \cdot e^{-(n'^2 / 2 \langle n'^2 \rangle)}$$

従って s'(kT)の分布は平均値が a.x0, 二乗分散が <n'^2> の正規分布となる。

$$P[s'](y) = 1 / (2 \langle n'^2 \rangle) \cdot e^{-(y - a \cdot x_0)^2 / 2 \langle n'^2 \rangle}$$

BPSK の誤り率特性

BPSK の場合 $d[k]=+1$, または -1 である。識別回路においては閾値を $Th = 0$ に設定し $y > Th=0$ ならば $d = 1$, $y < Th = 0$ ならば $d = -1$ と判定する。

今 $d[k]=+1$ の場合の誤り率は

$$P_e = \int_{-\infty, 0} P[s'(y)] dy = Q(a \cdot x_0 / \sqrt{\langle n'^2 \rangle})$$

ただし誤差関数 $Q(\cdot)$ は

$$Q(\cdot) = \int_{-\infty, -}^{\cdot} 1 / \sqrt{2\pi} \cdot e^{-y^2 / 2} dy$$

$D[k]=-1$ の場合も同様である。

ここで \cdot を評価する。

送信電力は

$$\begin{aligned} P_s &= \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-KT/2, KT/2} (1/KT) \cdot |s(t)|^2 dt \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-KT/2, KT/2} (1/KT) \cdot a^2 \cdot d[n] \cdot d^*[m] \cdot g(t-nT) \cdot g^*(t-mT) dt \\ &= a^2 / T \int_{-}^{\cdot} |g(t)|^2 dt \end{aligned}$$

通常 Nyquist 伝送においては送受信フィルタは整合(matching)させて用いる。すなわち

$$G(j\omega) = H(j\omega) = X(j\omega)$$

$X(j\omega)$ は前述の Nyquist フィルタである。

$$\int_{-}^{\cdot} |X(j\omega)|^2 d\omega = 1/T$$

$$x(t) = 1/2 \int_{-}^{\cdot} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$x_0 = x(0) = 1/T$$

また

$$\int_{-}^{\cdot} |g(t)|^2 dt = 1/2 \int_{-}^{\cdot} |G(j\omega)|^2 d\omega = 1/2 \int_{-}^{\cdot} |X(j\omega)|^2 d\omega = 1/T$$

故に

$$P_s = a^2 / T^2$$

$$a \cdot x_0 = (P_s) \cdot T / T = (P_s)$$

他方 $\langle n'^2 \rangle$ は雑音電力 P_n' に他ならないから誤り率は

$$P_e = Q(\sqrt{P_s / P_n'})$$

で与えられる。

雑音電力は

$$\begin{aligned} P_n' &= \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-KT/2, KT/2} (1/KT) \cdot |n'(t)|^2 dt \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-KT/2, KT/2} (1/KT) \cdot |n(t) \cdot h(t)|^2 dt \\ &= 1/2 \int_{-}^{\cdot} |N_0(\omega) \cdot H(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

ここで

$$N_0(\omega) = \sqrt{N_1(j\omega)}$$

$$N_1(j\omega) = 1 / (KT) \int_{-KT/2, KT/2} n(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} 1/2 \int_{-}^{\cdot} |N_0(\omega)|^2 d\omega &= 1/2 \int_{-}^{\cdot} |N_1(\omega)|^2 d\omega \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-KT/2, KT/2} (1/KT) \cdot |n(t)|^2 dt \\ &= P_n \text{ 雑音電力} \end{aligned}$$

即ち $N_0(j\omega)$ は Hz あたりの雑音電力、即ち雑音電力密度(W/Hz)である。

AWGN(Additive white Gaussian noise)

通常伝送路で加わる雑音は電力スペクトル密度が一定値 N_0 で振幅分布が正規分布となる。

AWGN 伝送路においては

$$\begin{aligned} P_n' &= N_0 \cdot 1/2 \int_{-}^{\cdot} |H(\omega)|^2 d\omega \\ &= N_0 \cdot 1/2 \int_{-}^{\cdot} |X(\omega)|^2 d\omega = N_0 / T \end{aligned}$$

故に誤り率は

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{P_s}{N_0 T}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{P_s \cdot T}{N_0}}\right)$$

ここで $P_s \cdot T$ は変調符号(symbol)当たりの Energy である。 $P_s \cdot T = E_s$ とおくと誤り率は

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

となる。

誤差関数は正規分布関数の積分であり、計算は困難であるが、次の不等式から容易に近似計算ができる。

$$\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}} < Q(x) < \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}x/2}$$

$$= \left(\frac{E_s}{N_0}\right) = \left(\frac{P_s}{P_n}\right) \text{であるから誤り率は大略信号の SN 比に指数関数的に逆比例する。}$$

他の変調方式の誤り率

他の Nyquist 伝送方式、即ち QPSK, 8PSK, 多値 QAM についても上述の BPSK と同様の解析手法が適用できる。ただし変調点は複素平面上に複数の点(QPSK の場合 4)があるので BPSK に比べて複雑である。大半の誤りは最短距離にある隣接の変調点間の識別誤りによって起こる。

QPSK の場合変調点は信号振幅を a とすると変調ベクトルは $a/\sqrt{2} (+1 + j)$ の 4 点である。最も離れた点間の距離は $2a$ であり最短距離は $\sqrt{2}a$ である。同じ信号振幅の BPSK に於いては異なる点間の距離は $2a$ であるから同じ誤り率を確保するためには QPSK は BPSK の約 2 倍の振幅、即ち 2 倍の送信電力が必要となる。ただし各変調値が 2 ビットのデータを搬送するのでビットあたりの所要送信電力は BPSK と殆ど同じである。

更に多値数の大きな変調方式においては 1 ビットの伝送データの増加に対して変調点間の最短距離は $1/2$ になるので同じ誤り率を確保するのは 4 倍(6dB)の電力増加が必要となる。

演習問題

1. フーリエ変換を行って理想フィルタ、直線 Roll-off, Raised cosine roll off 型 Nyquist フィルターの周波数特性と時間インパルス応答の関係を確認せよ。
2. 上の各 Nyquist フィルタはインパルス応答が時間 t の大きなところで t^{-1} , t^{-2} , t^{-3} に比例して減衰する。大きな t に対する時間応答が一般に t^{-n} ($n > 3$)となる Nyquist 関数の実現法を示せ。
3. MSK 変調波を 4 通倍しても搬送波成分は現れないことを示せ。どういう成分が現れるかを調べ MSK 変調信号の搬送波及びクロックの再生法を示せ。
4. 遅延検波の誤り率特性は同期検波に比べて約 3dB 劣化することを示せ。