
2021年第51回 天文・天体物理若手夏の学校
重力・宇宙論分科会 集録集

■ 謝辞

2021年度天文・天体物理若手夏の学校は、基礎物理学研究所を始め、国立天文台、宇宙線研究者会議(CRC)からのご支援により成り立っております。事務局一同厚く御礼申し上げます。

重力・宇宙論分科会

■ index

重宇 1	末藤 健介	大域的磁場を持つ動的宇宙モデルと佐々木多様体
重宇 2	齊藤 海秀	Universal 10^{20} Hz stochastic gravitational waves from photon spheres of black holes
重宇 3	野村 皇太	非線形電磁気の枠組みにおけるブラックホールの準固有振動
重宇 4	度會 大貴	連星ブラックホール合体時に放射される重力波を用いた Hawking の面積定理の検証
重宇 5	大澤 悠生	Analogue black hole における Hawking 放射
重宇 6	郭 優佳	超伝導体から見るブラックホール像
重宇 7	脇 隆浩	Complementarity と Firewall
重宇 8	鳥羽 修平	ブラックホール熱力学と高階微分重力理論
重宇 9	沼尻 光太	潮汐変形現象に対する理論的解析: 一般相対論及びその拡張理論の観点から
重宇 10	宮下 優一	宇宙論と非局所場理論
重宇 11	宮地 大河	2次元ブラックホール時空中の偽の真空崩壊
重宇 12	斎藤 大生	回転ブラックホール時空における真空崩壊
重宇 13	高寺 俊希	Stable cosmology in generalized massive gravity
重宇 14	七條 友哉	ひも模型と揺らぎのスペクトル解析
重宇 15	三木 大輔	光学振動子系における非ガウス状態の量子もつれ
重宇 16	前田 新也	非ガウス性による重力の量子性の検証
重宇 17	砂川 浩諒	回転ブラックホール周辺のアクシオン電磁気学
重宇 18	松田 大輝	膨張宇宙における Black Hole Shadow
重宇 19	諏訪 みづき	インフレーション宇宙論におけるブラックホールのダイナミクス
重宇 20	金森 翔太郎	大気チェレンコフ望遠鏡を用いた原始ブラックホールの探索
重宇 21	笠井 健太郎	原始ブラックホールを生成するインフレーション
重宇 22	上原 晃一郎	曲率ピークの形状が原始ブラックホール形成においてサイズに及ぼす影響
重宇 23	Gao Pengyuan	Cosmic No-hair Conjecture and Inflation with an SU(3) Gauge Field
重宇 24	村田 知瞭	閉じた宇宙における axion-SU(2) モデル
重宇 25	宮崎 一慶	ultra-light axion-like particle の oscillon による 21cm 異方性の効果
重宇 26	中島 光一郎	21 cm forest による暗い銀河の検出可能性
重宇 27	伊東 拓実	ガウス過程回帰を用いた前景除去
重宇 28	阿部 祐大	銀河形成シミュレーションを用いた銀河の特異速度 の推定法の開発
重宇 29	尹 聖煥	a new approach to model baryonic effects on future cosmological surveys : the baryonification method
重宇 30	室越 琳生	CMB スペクトルの黒体からのズレの詳細測定で拓く初期宇宙探査
重宇 31	笥 嵩文	Cosmic Birefringence による Axion-Like Particle の 探査と制限
重宇 32	河合 宏紀	Fuzzy Dark Matter (FDM) ハローモデルの構築と FDM の質量制限
重宇 33	林 慎太郎	Early Dark Energy による Hubble Tension の解決
重宇 34	井上 直樹	後期宇宙での暗黒物質崩壊によるハッブルテンションの緩和
重宇 35	谷口 貴紀	観測的効果を考慮したコズミックシアバイスペクトルの測定手法
重宇 36	寺澤 凌	separate universe simulation を用いた長波長密度揺らぎへの応答の測定
重宇 37	山下 晃毅	大スケール非一様性を持つ宇宙での構造形成について
重宇 38	中沢 准昭	Dispersion Measure による宇宙論的距離の推定
重宇 39	村上 由三	ボソン星の動的発展
重宇 40	稲熊 穂乃里	Post-Newtonian 効果を考慮した Eccentric Kozai-Lidov 時間

重宇 poster1	窪田 圭一郎	重力波を用いたダークエネルギー探索
重宇 poster2	佐田 彩夏	Analogue Gravity
重宇 poster3	齋藤 仁	非線形 teleparallel gravity における GR との等価性
重宇 poster4	田村 悠陽	静的な二体ブラックホール時空中の円軌道の解析
重宇 poster5	加藤 翠	ゴーストスカラー場を用いたワームホールの安定性解析
重宇 poster6	乾 玲冬	CMB 観測を説明する Quartic Hilltop Inflation モデルの研究
重宇 poster7	桑原 聡一郎	チェレンコフ放射状の重力波探索
重宇 poster8	村越 悠太	アクシオン暗黒物質によるナノヘルツ帯の重力波の痕跡
重宇 poster9	宮元 龍之介	主成分分析による前景放射除去
重宇 poster10	伊元 聖也	初代星の星質量・SFRD と宇宙論的 21-cm 線シグナルの関係
重宇 poster11	平 啓輔	重力レプトジェネシスによる物質の起源の研究及び理論の検証

重字1

大域的磁場を持つ動的宇宙モデルと佐々木多様体

大阪市立大学 理学研究科数物系専攻
末藤 健介

大域的磁場を持つ動的宇宙モデルと佐々木多様体

末藤健介（大阪市立大学大学院 理学研究科）

Abstract

昨年私の研究室の松野・石原が磁場と電流を含む連立系の Einstein 方程式の解析解を構築した。しかしその解は静的解であるのでこの宇宙を記述できているかは明らかではない。そこで本研究はこの解の時間発展を追い、動的な宇宙モデルとしての解を探索した。

1 Introduction

宇宙の様々なスケールで観測される磁場の起源を知ることは、宇宙物理学の最も重要な問題の一つである。強い磁場は一般相対論では重力の源となり、磁場を含む時空の構造を明らかにすることは興味深い課題ですが、Einstein 方程式と Maxwell 方程式の連立系を解くことは容易ではありません。磁場が重力源となる Einstein-Maxwell 系の解として Bertotti-Robinson 解 [2,3] や Melvin 解 [4] が挙げられますがこれらの解では磁場は源のない Maxwell 方程式の解から構成されている。

そこで、佐々木多様体を 3 次元空間として、Einstein-Maxwell-current 系の連立方程式を解いたのが松野・石原解である [1]。しかしここで得られた解は静的解であったのでこれを拡張し、動的な宇宙に拡張するのが本研究の趣旨である。

2 Methods

2.1 setup

[1] では

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a}{4}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \frac{a^2}{4}(d\psi + \cos \theta d\varphi)^2$$

となる計量で時空を記述した。これは S^2 の各点に ψ 方向にファイバーが S^1 として存在し、 S^2 とファイバーバンドルを合わせてトポロジカルな S^3 となっている佐々木多様体と呼ばれる多様体の一つを 3 次元空間とし、そこに時間を組み合わせた時空である。

そこで、この計量のスケール因子に時間依存性を持たせた

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + b^2(t)(d\psi + \cos \theta d\varphi)^2 \quad (1)$$

となる計量で宇宙を考えていく。ここでこの計量から 1-form を

$$\begin{cases} \omega_{(t)} = -dt \\ \omega_{(\theta)} = a(t)d\theta \\ \omega_{(\varphi)} = a(t)\sin\theta d\varphi \\ \omega_{(\psi)} = \eta = b(t)(d\psi + \cos\theta d\varphi) \end{cases} \quad (2)$$

で定義する。これより frame を $e_{(\mu)}{}^\nu = g^{\nu\lambda}\omega_{(\mu)\lambda}$ で定義するとこの e_μ 達は $g(e_{(\mu)}, e_{(\nu)}) = \eta_{\mu\nu}$ を満たし、正規直交基底となる。

以下特に η とこれに対応するベクトル $\xi = 1/b(t)\partial_\psi$ が重要な役割を果たす。

2.2 ゲージ場の導入

ゲージ場を ξ 方向に導入する。これを form で

$$A(t) = c(t)\eta \quad (3)$$

と表現する。これより場の強さ F は

$$F = dA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{d}{dt}(bc)\cos\theta & \frac{d}{dt}(bc) \\ 0 & 0 & -bc\sin\theta & 0 \\ -\frac{d}{dt}(bc)\cos\theta & bc\sin\theta & 0 & 0 \\ -\frac{d}{dt}(bc) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

で表現できるので電場、磁場に対応する form は

$$\tilde{E} = dt \wedge \left(\frac{d}{dt}(bc)(d\psi + \cos\theta d\varphi) \right) = dt \wedge \left(\frac{1}{b} \frac{d}{dt}(bc)\eta \right)$$

$$\tilde{B} = bc \sin \theta d\theta \wedge d\varphi = \frac{bc}{a^2} \omega_\theta \wedge \omega_\varphi$$

これより電場, 磁場は

$$\mathbf{E} = \frac{1}{b} \frac{d}{dt} (bc) \xi, \mathbf{B} = \frac{bc}{a^2} \xi$$

と表現できる. また場の強さが求まったので電流は Maxwell 方程式より

$$J = -g^{\mu\lambda} \nabla^\nu F_{\nu\lambda} \partial_\mu = \left(\ddot{c} + \left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{2\dot{a}}{a} \right) \dot{c} + \left(\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{2\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^4} \right) c \right) \xi \quad (5)$$

と表現できる. これよりゲージ場, 電場, 磁場, 電流全てが ξ 方向を向いていることがわかる. これは $rot \xi \propto \xi$ という特別な性質に由来しておりこれにより系を簡単にでき, またこれが空間に佐々木多様体を導入した理由である.

2.3 荷電粒子

ξ 方向への電流の担い手として正の電荷を持つ粒子と負の電荷を持つ粒子の四元速度を

$$u_+ = u^0 \partial_t + u^3 \xi, u_- = u^0 \partial_t - u^3 \xi$$

とし, 荷電粒子の電荷の大きさを e , 粒子の数密度を n とすると

$$J = en(u_+ - u_-) = 2neu^3 \xi$$

となるので Maxwell 方程式より

$$2neu^3 = \left(\ddot{c} + \left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{2\dot{a}}{a} \right) \dot{c} + \left(\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{2\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^4} \right) c \right) \quad (6)$$

が成り立つ. これは発展方程式の一つとなっている. 運動方程式は

$$u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \frac{e}{m} g^{\mu\nu} F_{\nu\lambda} u^\lambda$$

でありこれを解くと

$$u^3 = \frac{const}{b} - \frac{e}{m} c \quad (7)$$

を得る. さらに u^0 は u の規格化 $u^2 = -1$ より $u^0 = \sqrt{1 + u^3^2}$ で与えられる. このように計算できた理由は ξ が Killing vector として振る舞うからであり, $const$ は ξ 方向の運動量を表している.

2.4 エネルギー・運動量テンソル

荷電粒子は圧力の無視できる dust 流体であるとすると, 流体と電磁場のエネルギー・運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu}^{gas} = mn g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} (u_+^\lambda u_+^\sigma + u_-^\lambda u_-^\sigma) \quad (8)$$

$$T_{\mu\nu}^{em} = g^{\lambda\sigma} F_{\mu\lambda} F_{\nu\sigma} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \quad (9)$$

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{gas} + T_{\mu\nu}^{em} \quad (10)$$

ξ で表現でき, 保存則 $\nabla^\nu T_{\nu\mu} = 0$ から流体の数の保存則

$$nu^0 V = const \quad (11)$$

を得る. ここで V は時刻 t での宇宙の体積を表しており, 計量より $V(t) = 2\pi^2 a^2(t)b(t)$ と計算される.

2.5 Einstein 方程式

計量とエネルギー・運動量テンソルの表式を得たのでこれより Einstein 方程式を考えることができる. 宇宙項有りの Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g = T_{\mu\nu}$$

は frame を用いて対角化すると方程式の数は 4 本となるがそのうちの 2 本は同じ方程式が得られ, Hamiltonian constrain で一本, 時間発展を与える方程式で 2 本の方程式が得られる. これにより必要な方程式がそろった.

3 Results

$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + b^2(t)(d\psi + \cos\theta d\varphi)^2$ で表現される時空に $A(t) = c(t)\eta$ でゲージ場を導入した宇宙の方程式系は

$$\begin{cases} u^3 = \frac{const}{b} - \frac{e}{m}c \\ u^0 = \sqrt{1 + u^3^2} \\ nu^0V = const \end{cases} \quad (12)$$

と Einstein 方程式系の Hamiltonian constraint

$$b^4(1+2c^2) - 4a^2b^2(1+\dot{a}^2) - 8a^3b\dot{a}\dot{b} + 2(c^2\dot{b}^2 + 2bc\dot{b}\dot{c} + b^2(2\Lambda + 4mu^{02}\rho + \dot{c}^2))a^4 = 0$$

を満足し、発展方程式

$$\begin{cases} b^4(1 + 2c^2) + 4a^3b(\dot{a}\dot{b} + b\ddot{a}) + (2c^2\dot{b}^2 - b^2(4\Lambda - 2\dot{c}^2) + 4b(\dot{c}\dot{b} + \dot{c}\ddot{b}))a^4 = 0 \\ b^4(3 + 2c^2) - 4a^2b^2(1 + \dot{a}^2) + 2(c^2\dot{b}^2 + 2bc\dot{b}\dot{c} + b^2(2\Lambda - 4mu^{02}\rho + \dot{c}^2))a^4 - 8a^3b^2\ddot{a} = 0 \\ 2neu^3 = \left(\ddot{c} + \left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{2\dot{a}}{a}\right)\dot{c} + \left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{2\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^4}\right)c\right) \end{cases} \quad (13)$$

によりスケール因子 $a(t), b(t)$ とゲージ場の因子 $c(t)$ の時間発展が決まる。

4 Discussion

一様な時空なので Einstein 方程式が時間に対する常微分方程式となったが解析解を求めるのは容易ではなく系を単純化して解析解を求めることができないか模索していく必要がある。

この方程式系を解き、宇宙初期に磁場がありやがて磁場が薄れ De Sitter 時空の様になるか調べていきたい。

5 Conclusion

松野石原解を時間発展させた系の方程式系を得ることができたが複雑な常微分方程式系となり解析解を求めることは困難となった。今後この厳密解を探していき、現実の宇宙を記述するモデルとして相応しいか検証をしていく必要がある。

Reference

- 松野阜, 石原秀樹 (2020) ,”Solutions to the Einstein-Maxwell-Current System with Sasakian manifolds”
- B. Bertotti(1959), “Uniform electromagnetic field in the theory of general relativity ” , Phys. Rev. 116, 1331
- I. Robinson(1953), “A Solution of the Maxwell-Einstein Equations ”
- M. A. Melvin(1964), “Pure magnetic and electric geons ”

重字2

Universal 10^{20} Hz stochastic gravitational waves from
photon spheres of black holes

神戸大学 理学研究科物理学専攻
斎藤 海秀

未提出

重字3

非線形電磁気の枠組みにおけるブラックホールの準固有振動

神戸大学 理学研究科物理学専攻
野村 皇太

非線形電磁気の枠組みにおけるブラックホールの準固有振動

野村 皇太 (神戸大学大学院理学研究科)

Abstract

近年、コンパクト天体から生じる重力波や電磁波などの複合的観測、及び理論的研究の発展が目覚ましい。その中でも、ブラックホールから伝播する波は、それに固有の振動数を伴った特徴的な減衰振動をすることが知られている。この振動は準固有振動と呼ばれ、これを観測することで、ブラックホールの質量などの情報の取得や重力理論の検証が行えるため、その解析は重要視されている。重力と電磁気を含む理論は、典型的には、Einstein-Hilbert ラグランジアンと、電磁場の強さからなる Maxwell ラグランジアンを足し合わせた Einstein-Maxwell 理論で記述される。この理論で構成される荷電ブラックホールの準固有振動については、過去に Leaver (1990) などによって調べられている。一方で、量子補正など高エネルギー由来の効果を加味すると、ラグランジアンには電磁場の強さ及びその双対からなる高次の補正が含まれると期待される。量子電磁力学からの補正や、時空特異点の解消など、高エネルギー領域におけるブラックホールの性質に迫る方法の一つとして、このような非線形電磁気の枠組みでのブラックホール解が精力的に研究されている。本研究では、この非線形電磁気の枠組みにおける荷電ブラックホールから生じる重力波・電磁波の準固有振動を算出した。

1 Introduction

ブラックホール連星からの重力波観測や影の直接撮像などによって、ブラックホールの存在は実証され、今や精密観測の対象となりつつある。ブラックホールは天体物理の分野において興味深い研究対象であることは間違いないが、それと同時に理論物理学においても重要な地位にある。特に、ブラックホールは「重力」に対する理解を深める機会を与えてくれる。ブラックホールに関する話題で特筆すべきものは、その摂動に対する安定性と準固有振動である。一般相対論においては、単純なクラスのブラックホールは摂動に対して安定で、準固有振動と呼ばれる特徴的な減衰振動をすることが示されている。例えば、球対称真空解である Schwarzschild ブラックホールの安定性解析は (Regge & Wheeler 1957) および (Zerilli 1970) によってなされ、その後 (Zerilli 1974) などによって Einstein-Maxwell 理論における荷電ブラックホールへ解析が拡張された。準固有振動には、ブラックホールの質量などの情報が含まれているため、その解析は重要視されている。

重力と電磁気を含む理論は、典型的には、Einstein-Hilbert ラグランジアンと、電磁場の強さからなる

Maxwell ラグランジアンを足し合わせた Einstein-Maxwell 理論で記述される。この理論で構成される荷電ブラックホールの準固有振動については、過去に (Leaver 1990) などによって調べられている。一方で、量子補正など高エネルギー由来の効果を加味すると、ラグランジアンには電磁場の強さ及びその双対からなる高次の補正が含まれると期待される。例えば、量子効果を取り入れた電磁力学の有効理論として、電磁場の強さ $F_{\mu\nu}$ とその双対 $\tilde{F}_{\mu\nu}$ の高次の項を含んだ Euler-Heisenberg 理論がある。量子電磁力学からの補正や、時空特異点の解消など、高エネルギー領域におけるブラックホールの性質に迫る方法の一つとして、このような非線形電磁気の枠組みでのブラックホール解が精力的に研究されている。本研究では、このように $F_{\mu\nu}$ と $\tilde{F}_{\mu\nu}$ の高次の項の寄与を含む、非線形電磁気の枠組みにおける荷電ブラックホールから生じる重力波・電磁波の準固有振動を算出した。

2 Charged black hole

本研究では一般的な非線形電磁気の枠組みにおける一般相対論を取り扱う。つまり、 $\mathbf{A} = A_\mu dx^\mu$ を電磁場として、作用は電磁場の強さ $\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = d\mathbf{A}$ だけでなくその双対 $\tilde{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} \tilde{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu$ からの寄与を含む。この枠組みでの作用は、一般に次の形で与えられる。

$$S[\mathbf{g}, \mathbf{A}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) - \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \right] \quad (1)$$

ここで R は計量 $\mathbf{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ に関する Ricci スカラー、 Λ は宇宙定数、 G は Newton の重力定数、 g は $g_{\mu\nu}$ の行列式、 \mathcal{L} は次で定義されるスカラー

$$\mathcal{F} := \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2)$$

$$\mathcal{G} := \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{8} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \quad (3)$$

の一般の関数である。

計量 $g_{\mu\nu}$ に関して作用の変分を取ることにより、Einstein 方程式

$$G_\mu{}^\nu = 8\pi G T_\mu{}^\nu \quad (4)$$

を得る。ここで $G_\mu{}^\nu$ は $g_{\mu\nu}$ から計算される Einstein テンソルの成分、 $T_\mu{}^\nu$ は電磁場のエネルギー・運動量テンソルの成分

$$T_\mu{}^\nu = \mathcal{L}_{\mathcal{F}} F_{\mu\lambda} F^{\nu\lambda} + \delta_\mu^\nu \left(\mathcal{L}_{\mathcal{G}} \mathcal{G} - \mathcal{L} - \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) \quad (5)$$

である。ここで $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} := \partial\mathcal{L}/\partial\mathcal{F}$ 、 $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} := \partial\mathcal{L}/\partial\mathcal{G}$ である。同様に、電磁場 A_μ に関して作用の変分を取れば、電磁場の運動方程式

$$\nabla_\mu \left(\mathcal{L}_{\mathcal{F}} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\mathcal{G}} \tilde{F}^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (6)$$

が得られる。ここで ∇_μ は $g_{\mu\nu}$ に関する共変微分を表す。

ここでは、背景時空として球対称な磁場を伴ったブラックホール解を考える。つまり、背景の電磁場の配位 $\bar{\mathbf{F}}$ は、 q を定数として

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} \bar{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = q \sin\theta d\theta \wedge d\phi \quad (7)$$

とする。このとき、スカラー量 (2), (3) の背景での値 $\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}}$ は

$$\bar{\mathcal{F}} = \frac{q^2}{2r^4}, \quad \bar{\mathcal{G}} = 0 \quad (8)$$

となる。定数 q は、

$$\int_{S^2} \bar{\mathbf{F}} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta q = 4\pi q \quad (9)$$

より、この時空における全磁荷に相当する量である。なお、場の強さ (7) をもたらす背景電磁ポテンシャル $\bar{\mathbf{A}}$ は、

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{A}_\mu dx^\mu = q(\pm 1 - \cos\theta) d\phi \quad (10)$$

と取れる。背景の球対称ブラックホール時空を記述する計量 $\bar{\mathbf{g}}$ は Einstein 方程式を使うことで

$$\bar{\mathbf{g}} = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (11)$$

と書かれる。ここで $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ であり、関数 $f(r)$ は

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{2GM_q(r)}{r} \quad (12)$$

と与えられる。ただし M は任意定数 (ブラックホールの質量に相当する量) で、 $M_q(r)$ は

$$M_q(r) := 4\pi \int dr r^2 \mathcal{L} \left(\frac{q^2}{2r^4}, 0 \right) \quad (13)$$

である。

3 Equations of motion for black hole perturbations

ブラックホール時空上の計量と電磁場の摂動のダイナミクスを調べるために、

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad (14)$$

$$F_{\mu\nu} = \bar{F}_{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu} \quad (15)$$

と書く。バーのついた量が Sec. 2 で調べた球対称背景、 $\delta g_{\mu\nu}$ と $\delta F_{\mu\nu}$ がそれぞれ計量と電磁場の摂動である。

背景の球対称性から、摂動を解析する際には、摂動をテンソル球面調和関数の基底で展開し、その動径方向の依存性と角度依存性を分離するのが便利である。その後、摂動をパリティの下での変換性により次のように分類することができる。

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}^- + \delta g_{\mu\nu}^+ \quad (16)$$

$$\delta F_{\mu\nu} = \delta F_{\mu\nu}^- + \delta F_{\mu\nu}^+ \quad (17)$$

ここで $\delta g_{\mu\nu}^-$ と $\delta F_{\mu\nu}^-$ は、 l を球面調和関数の方位量子数のラベルとして、パリティ変換の下で $(-1)^{l+1}$ の因子が現れる項であり、しばしば「パリティ奇」あるいは「軸性」の項と呼ばれる。一方、 $\delta g_{\mu\nu}^+$ と $\delta F_{\mu\nu}^+$ はパリティの下で $(-1)^l$ の因子が付く「パリティ偶」または「極性」の項である。(Regge & Wheeler 1957) に倣って適当なゲージを取ると、パリティ奇の計量の摂動は (t, r, θ, ϕ) 座標での行列として次のように表せる。

$$\delta g_{\mu\nu}^- = \sum_{l,m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -[h_0/\sin\theta] \partial_\phi & h_0 \sin\theta \partial_\theta \\ 0 & 0 & -[h_1/\sin\theta] \partial_\phi & h_1 \sin\theta \partial_\theta \\ \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{lm} \quad (18)$$

ここで $Y_{lm} = Y_{lm}(\theta, \phi)$ は球面調和関数、 h_0, h_1 はモード (l, m) ごとに与えられる (t, r) の関数である。なお、スター \star の成分は対称性から決まる。

パリティ偶の電磁場の摂動は (Zerilli 1974) に倣って次のように表記する。

$$\delta F_{\mu\nu}^+ = \sum_{l,m} \begin{pmatrix} 0 & f_{01}^+ & f_{02}^+ \partial_\theta & f_{02}^+ \partial_\phi \\ \times & 0 & f_{12}^+ \partial_\theta & f_{12}^+ \partial_\phi \\ \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{lm} \quad (19)$$

ここで $f_{01}^+, f_{02}^+, f_{12}^+, f_{23}^+$ はモード (l, m) ごとに与えられる (t, r) の関数である。バツ \times の成分は反対称性から決まる。

摂動展開 (14), (15) を運動方程式 (4), (6) に代入し、摂動に関して線形化することにより、線形摂動の運動方程式を得ることができる。背景磁場はパリティ奇、背景計量はパリティ偶であるため、線形摂動論においては、一方でパリティ奇の計量摂動とパリティ偶の電磁場摂動が混ざり合っ一つの運動方

程式系をなし、他方、パリティ偶の計量摂動とパリティ奇の電磁場摂動が混ざり合っ一つの運動方程式系をなす。ここでは紙面の都合により $l \geq 2$ における「パリティ奇の計量摂動とパリティ偶の電磁場摂動」のタイプの運動方程式 (Nomura et al. 2020) のみを以下に記載する。なお、以下は時間に関して Fourier 変換したものである。つまり、 $\partial_t \rightarrow -i\omega$ の置き換えを施している。

$$\frac{1}{f} \left[r \frac{d}{dr^*} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr^*} (r \mathcal{R}^-) \right) + \omega^2 \mathcal{R}^- \right] - V_{11}^I \mathcal{R}^- - V_{12}^I \mathcal{E} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{1}{f} \left[\sqrt{|\mathcal{L}_{\mathcal{F}}|} \frac{d}{dr^*} \left(\frac{1}{\mathcal{L}_{\mathcal{F}}} \frac{d}{dr^*} \left(\sqrt{|\mathcal{L}_{\mathcal{F}}|} \mathcal{E} \right) \right) + \text{sgn}(\mathcal{L}_{\mathcal{F}}) \omega^2 \mathcal{E} \right] - V_{22}^I \mathcal{E} - V_{21}^I \mathcal{R}^- = 0 \quad (21)$$

ここで $f dr^* = dr$,

$$\mathcal{R}^- := \frac{f h_1}{\sqrt{8\pi G}(-i\omega)r} \quad (22)$$

$$\mathcal{E} := \frac{\sqrt{2} r^2}{l(l+1)\sqrt{(l+2)(l-1)|\mathcal{L}_{\mathcal{F}}|}} \times \left(\mathcal{L}_{\mathcal{F}} - \frac{q^2}{r^4} \mathcal{L}_{GG} \right) f_{01}^+ \quad (23)$$

および

$$V_{11}^I = \frac{(l+2)(l-1)}{r^2} \quad (24)$$

$$V_{12}^I = V_{21}^I = \frac{q\sqrt{16\pi G(l+2)(l-1)|\mathcal{L}_{\mathcal{F}}|}}{r^3} \quad (25)$$

$$V_{22}^I = |\mathcal{L}_{\mathcal{F}}| \left[\frac{l(l+1)}{r^2} \frac{1}{\mathcal{L}_{\mathcal{F}} - (q^2/r^4)\mathcal{L}_{GG}} + \frac{16\pi G q^2}{r^4} \right] \quad (26)$$

である。

上の方程式により摂動 h_1, f_{01}^+ のダイナミクスが決まる。同じタイプに含まれる他の変数 h_0, f_{02}^+, f_{12}^+ の発展も、 h_1 と f_{01}^+ が与えられれば決まる。

4 Effective field theory and quasinormal modes

前節で導いた方程式を使えば、どんな非線形電磁気のラグランジアンに対してもブラックホールの線

形摂動の発展を調べることができるが、その解析は一般に複雑である。それでも、非線形電磁気による主要な補正を調べる目的においては、 \mathcal{F} と \mathcal{G} の 2 次までの項を含む有効ラグランジアンを考えるのが合理的だろう。そこで、以降では次のラグランジアン

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathcal{F} - \alpha \mathcal{F}^2 - \beta \mathcal{G}^2 \quad (27)$$

に集中して考えることにする。ここで、 α と β は次元 -4 のパラメータである。宇宙定数 Λ は簡単のためゼロとする。

上の有効非線形電磁気でのブラックホール時空は (13) から簡単に得られる。ラグランジアン (27) から直ちに

$$\mathcal{L}\left(\frac{q^2}{2r^4}, 0\right) = \frac{q^2}{2r^4} - \frac{\alpha q^4}{4r^8} \quad (28)$$

であるから、計量の中の関数 $f(r)$ は

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\bar{\alpha}Q^2(GM)^4}{10r^6} \quad (29)$$

で与えられる。ここで、

$$Q^2 := 4\pi Gq^2 \quad (30)$$

と定義し、無次元のパラメータ

$$\bar{\alpha} := \frac{\alpha q^2}{(GM)^4} \quad (31)$$

を導入した。同様に

$$\bar{\beta} := \frac{\beta q^2}{(GM)^4} \quad (32)$$

を定義すれば、 $\bar{\alpha}$ と $\bar{\beta}$ は摂動パラメータとなる。「パリティ奇の計量摂動とパリティ偶の電磁場摂動」の系における摂動の運動方程式は、

$$\mathcal{L} = \frac{q^2}{2r^4} - \frac{\alpha q^4}{4r^8} = \frac{Q^2}{8\pi Gr^4} - \frac{\bar{\alpha}Q^2(GM)^4}{16\pi Gr^8} \quad (33)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}} = 1 - \frac{\alpha q^2}{r^4} = 1 - \frac{\bar{\alpha}(GM)^4}{r^4} \quad (34)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}\mathcal{F}} = -2\alpha = -\frac{8\pi G\bar{\alpha}(GM)^4}{Q^2} \quad (35)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}\mathcal{G}} = -2\beta = -\frac{8\pi G\bar{\beta}(GM)^4}{Q^2} \quad (36)$$

を (24)–(26) に代入すれば求められる。

準固有振動は、運動方程式の複素固有振動数を伴った減衰振動を指す。複素固有振動数は離散的に存在し、ブラックホール近傍で摂動が内向きに伝播し、無限遠で外向きに伝播するという境界条件によって選り出される。今考えている系のように、複数種の摂動が couple した場合の準固有振動数を求める方法としては、直接的な数値積分を用いる方法 (Chaverra et al. 2016) や、Leaver が初めて用いた連分数法 (Leaver 1985) を行列値に拡張した方法がある。本研究では、有効的な非線形電磁気の枠組み (27) における荷電ブラックホールから生じる重力波・電磁波の準固有振動を、これらの方法を用いて算出した。将来的には、この理論的予言と観測を結び付けることにより、ブラックホールを実験場として Einstein-Maxwell 理論を超えた物理を探索できるかもしれない。

Reference

- Tullio Regge, & John A. Wheeler, “Stability of a Schwarzschild singularity,” *Phys. Rev.* **108** (1957) 1063
- Frank J. Zerilli, “Effective potential for even parity Regge-Wheeler gravitational perturbation equations,” *Phys. Rev. Lett.* **24** (1970) 737
- Frank J. Zerilli, “Perturbation analysis for gravitational and electromagnetic radiation in a Reissner-Nordstrom geometry,” *Phys. Rev.* **D9** (1974) 860
- E. W. Leaver, “Quasinormal modes of Reissner-Nordstrom black holes,” *Phys. Rev.* **D41** (1990) 2986-2997
- Kimihiko Nomura, Daisuke Yoshida, & Jiro Soda, “Stability of magnetic black holes in general nonlinear electrodynamics,” *Phys. Rev.* **D101** (2020) 124026
- Eliana Chaverra, Juan Carlos Degollado, Claudia Moreno, & Olivier Sarbach, “Black holes in nonlinear electrodynamics: Quasinormal spectra and parity splitting,” *Phys. Rev.* **D93** (2016) 12, 123013
- E. W. Leaver, “An Analytic representation for the quasi normal modes of Kerr black holes,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **402** (1985) 285-298

重字4

連星ブラックホール合体時に放射される重力波を用いた Hawking の面積定理の検証

東京大学 理学系研究科物理学専攻
度會 大貴

連星ブラックホール合体過程で放射される重力波を用いた Hawking の面積定理の検証

度會 大貴 (東京大学大学院 理学系研究科物理学専攻 M1)

Abstract

ブラックホール (以下 BH) を支配する諸力学法則は, 数理解物理学としての一般相対論 (以下 GR) の帰結である. そのうちのひとつ Hawking の面積定理「事象の地平面の面積の和は減少しない」は, 現実の時空で起こる連星 BH(BBH) 合体過程で放射される重力波を観測, そして解析することで検証が可能となる. 本稿では, この検証に必要な理論を確認し, GW150914 を用いてこの目的のためにデータ解析を行った先行研究 [1] の結果をレビューする. 一方で, 一口に BH と言っても, 数理解物理学上の BH と天体 BH を同一視することには飛躍がある. 飛躍が生じる本質的な理由は, 我々がこの時空全体を把握することが原理的に不可能であるにも関わらず, 前者の BH の概念を大域的な定義で与えていることにある. この飛躍を埋める試み [2] についても触れる.

1 Introduction

事象の地平面に基づく BH の力学法則は Bardeen, Carter そして Hawking によって定式化された. これらは BH のダイナミクスの規則と制限を記述するものであり, GR が持つ豊かな数学的な構造の帰結である. そして, その第二法則が Hawking の面積定理であり, 事象の地平面の面積の変化を制限する法則である.

一方で, コンパクト連星合体を源とする重力波は, 動的な強重力場の情報を豊富に含んでいると期待される. これらは, GR をはじめとした重力理論やそれらの帰結を, 客観的に検証する絶好の機会を提供する.

以下では, BBH 合体からの重力波データを用いた面積定理の検証を考える. 2 章では検証に必要な理論の概要, 3 章では先行研究 [1] の結果のレビュー, 4 章では議論と今後の展望を述べる.

2 Theoretical Frameworks

2.1 BH 領域と事象の地平面

Definition. (BH 領域と事象の地平面): BH 領域は, 時空の未来のヌル無限遠と因果関係を持つことができない時空域として定義される. そして, その境界が事象の地平面である.

広く知られている”BH は光ですら脱出できない領域”, ”事象の地平面は BH の表面” という表現は, これらの定義の翻訳である. また, この定義から得られる重要な事実は, 時空全体を構築しなければこれらの概念について語るができないということである. このことについては 4 章で再び触れる.

2.2 Hawking の面積定理

Theorem. (Hawking の面積定理): 物質がヌルエネルギー条件を満たすならば, BH の事象の地平面の面積は時間に対し減少しない.

ヌルエネルギー条件は, エネルギー運動量テンソル T_{ab} と任意のヌルベクトル ξ に対し

$$T_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0 \quad (1)$$

である. 例えば, エネルギー密度 ρ , 圧力 p である完全流体 $T^{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$ に対してこの条件は

$$\rho + p \geq 0 \quad (2)$$

となり, 成立が見込まれる¹. この定理は, BH 合体現象の場合に適用すると「合体後の BH の事象の地平面の面積は, 合体前の 2 つの BH のそれらの和より減少することはない」ということを意味する.

¹ヌルエネルギー条件は, 古典的な過程では基本的に成立すると考えられているが, 例えば Hawking 放射では破られることが知られている.

2.3 事象の地平面の面積

定常 BH に対して事象の地平面の面積の定量的な表現を得よう. 以下で見るように, これは事象の地平面となるヌル超曲面と時間一定面との断面積で与えられる.

ここでは後の応用のために, 質量 M スピン J を持つ BH が作る定常軸対称な重力場 (Kerr 解) を考える. Boyer-Lindquist 座標 (t, r, θ, ϕ) を用いると

$$ds^2 = \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) c^2 dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} c dt d\phi \quad (3)$$

と書ける. ここで a, Δ, Σ は以下で定義される量である.

$$a = \frac{J}{Mc}, \Delta = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \Sigma = r^2 + a^2 - \frac{2GM}{c^2} r \quad (4)$$

そして, 興味のある事象の地平面は

$$r = r_+ = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2} \right)^2 - a^2} \quad (5)$$

を満たすヌル超曲面である (r_+ は $\Sigma = 0$ の解). その面積は, これに $t = \text{一定}$ の条件を加えた 2 次元曲面の表面積として以下のように得られる.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(M, \chi) &= 4\pi(r_+^2 + a^2) \\ &= 8\pi \left(\frac{GM}{c^2} \right)^2 (1 + \sqrt{1 - \chi^2}) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで無次元のスピンパラメータ χ を $\chi = \frac{ac^2}{GM} = \frac{Jc}{GM^2}$ と定義した.

2.4 連星ブラックホール合体の一般論

一般に BBH 合体の一連の振る舞いは, それらの質量やスピンに依らず普遍的であり, 次の三段階から成る. まず, 離れた二つの BH が準定常な円軌道を描くインスパイラル段階. 次は, 二つの BH が安定な軌道を保てなくなり合体する合体段階. 最後は, 合体で生

じた歪みを吐き出し終状態の定常 BH に向かうリングダウン段階である. それらを観測した際の重力波形も一貫した特徴を持ち, GW150914 を例にとると図 1 のとおりである.

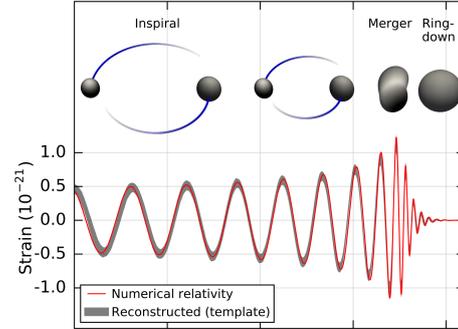


図 1: GW150914 からの strain の推定値と数値相対論でモデリングした値 [3]

波源の性質を推定するには, 観測データと様々な理論波形の相関をとるという手順を踏む². この手続きをより精緻に繰り返し, 最も高い相関を与える理論波形を到来した重力波であると同定することで, 波源の性質を推定しているのである. したがって, 各段階の理論的枠組みと波源のパラメータとの関わりを理解しておくことは必須である. 以下では, 今回特に興味のあるリングダウン段階について詳細を確認する.

リングダウン段階は終状態 BH 時空からの摂動で良く記述される. 特に, この時期の減衰振動する重力波形は, 終状態 BH の質量とスピンのみに依存した準固有振動 (QNMs) で良く説明される³. QNMs の固有振動数の集合は, 無限個存在する離散的な複素数値のセットである. その要素は球面調和関数のラベル (l, m) に加え, その各々に対し無限個のモード数 N で虚部が最も小さいものを 0 とし (基本モードと呼ばれる) 虚部が大きくなる順にラベルされる. 減衰時間が早い高いモードは同定することが難しいため, 実際上は $(l, m) = (2, 2)$ の基本モード (本検証では $N = 1$ のモードも用いる) と観測データの相関を取ることによって終状態の BH の質量とスピンを推定する.

²この手法は Matched filtering と呼ばれる. コンパクト連星合体を源とする重力波のように, 波形が予測可能な場合に有効な手法である.

³QNMs が減衰振動となる直感的な理由は, 無限遠へ逃げていく波や地平面下に落ち込む波が存在するためである.

2.5 検証で想定する状況

まず本検証では, BH 脱毛定理 (No-hair theorem) が成り立つことを仮定する⁴.

Theorem. (BH 脱毛定理): Einstein-Maxwell 系での定常 BH 解は, その質量とスピンと電荷のみで特徴づけられる.

すると, 電氣的に中性と考えられる天体ブラックホールのパラメータは, その質量とスピンのみとなる. これらを踏まえ, 本検証では, 漸近的に定常な BH 時空における事象の地平面の面積の変化を検証する. つまり, 合体過程の至るところで面積定理を検証するわけではない⁵. 素直には, 時空が最も動的になる合体段階でのこの定理の真偽が気になるが, これを議論することは避ける. その理由は, この段階では事象の地平面の面積の定量表現が存在しないためである. したがって, 今回の検証の枠組みにおいて, 合体段階はブラックボックスとして扱われる.

さて, BH 合体過程を含む時空において定常と見せるのは, インスパイラルの初期段階と終状態である. これらの時空領域であれば (6) を用いることができる. インスパイラルの初期段階では, 二つの BH は十分に離れており潮汐変形は無視できる. したがって, 2 つの BH の質量をそれぞれ M_1, M_2 , スピンパラメータを χ_1, χ_2 とすると, 合体前の表面積の和 \mathcal{A}_0 は

$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}(M_1, \chi_1) + \mathcal{A}(M_2, \chi_2) \quad (7)$$

と見積もることができる. 一方で終状態 BH の質量を M_f , 無次元スピンパラメータを χ_f とすると, その表面積 \mathcal{A}_f は

$$\mathcal{A}_f := \mathcal{A}(M_f, \chi_f) \quad (8)$$

となる. Hawking の面積定理が成り立つならば, これらに対して

$$\Delta\mathcal{A} := \mathcal{A}_f - \mathcal{A}_0 \geq 0 \quad (9)$$

となっているはずである. \mathcal{A} は BH の質量とスピンに依存していたことから, この検証は, 合体前において

⁴本来この定理も別途検証されるべきものである. これに関して先行研究 [4] がある.

⁵仮に相離れた状態間での事象の地平面の面積 (の和) が減少することがあれば, 合体過程のどこかに定理が破れている箇所が必ず存在することになるので, この検証は必要条件になっているというわけである.

M_1, M_2, χ_1, χ_2 , 合体後において M_f, χ_f を独立に推定することに帰着される.

また, 本検証は直接的には, 用いられている仮定の検証である. 仮に (9) が成立していないとすると, 例えばヌルエネルギー条件や BH 脱毛定理などが破れている可能性がある.

3 Results

この研究では GW150914 を用いた解析を行っている. 再構築後の波形のピークを境に合体前後に分割し, 各時間領域で解析することで合体前後での独立なパラメータ推定を可能にしている (図 2).

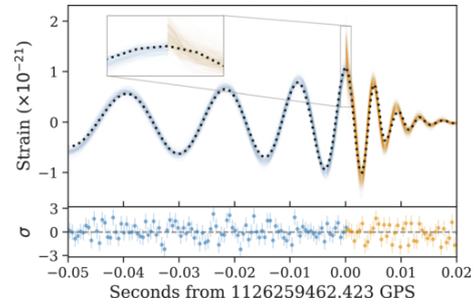


図 2: Hanford で観測された GW150914 の重力波形を再構築したもの. ピークを境に合体前 (青色) と合体後 (オレンジ色) に分割している. 黒い点線は合体過程全体 (IMR) における波形を表す [1].

合体前のパラメータは, ピークまでの波形と最も一致度の高い理論波形 (を用いている) から推定する. 事前確率として, BH の全質量や質量比, スピンの大きさ, 光度体積, 軌道面の傾斜角の余弦に対して一様な分布, スピンの向きに対しては等方的な分布を用いる.

また, 合体後の解析は,

1. ピーク直後から $N = 0, 1$ のモードを用いる.
2. ピークの 3ms 後から $N = 0$ のモードのみを用いる.

の二通りの方法で行う. これらから得られる $\frac{\Delta\mathcal{A}}{\mathcal{A}_0}$ の事後分布は図 3 の通りである. 面積定理が成立する確率は, この事後分布のうち $\frac{\Delta\mathcal{A}}{\mathcal{A}_0} \geq 0$ となっている部分の面積で与えられる. 実際に数値積分を行うことで, 1 では 97%, 2 では 95% の確率であることが分かる.

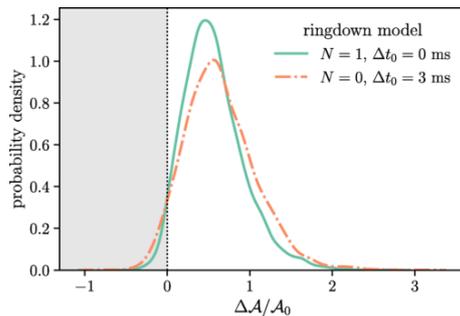


図 3: 1(緑色)と2(オレンジ色)の場合について $\frac{\Delta A}{A_0}$ の事後分布 [1].

2章で述べたとおり, 今回の検証の理論的枠組みでは, 合体段階は対象外である. しかし, パラメータをより正確に (SNR を高めて) 推定するために, この領域を含めた解析を行っている. この解析が, 本検証に差し支えないかは確認すべきことである. まず, インスパイラル段階の解析を, ピーク時から 4ms 手前で打ち切ってもほとんど違いがないことが [1] 中で示されている. また, BH 摂動論が確実に有効となるのは, リングダウンの後期段階と考えられる. したがって, ピーク直後からこのモデルで解析することの有効性は非自明に思われるが, GW150914 と良く似た系の高精度数値シミュレーションの解析結果から, これは正当化されるとしている.

4 Discussion and Prospects

BH 力学の第二法則である Hawking の面積定理を, BBH 合体を源とする重力波を用いて検証する理論的枠組みと先行研究 [1] の結果をレビューした. これによると面積定理は 97% または 95% の確率で成立している. 実はこの結果自体は特別新しいものではない. BBH 合体過程全体でパラメータ推定を行う研究は様々行われており, これらの研究も [1] も GR の成立を前提とした解析であることは共通しているため, 似た結果が得られることは予想がついているからである. [1] で新しいことは, 時間領域に分離しての解析を面積定理の検証の文脈で行ったことである.

一方, 2章で概観した理論的枠組みには, 最も根本的な部分に議論の余地がある. GR の帰結として得られる BH の性質は, 事象の地平面 (2.1 参照) に依存して

いるものが多くある⁶. しかし, 我々は原理的に時空全体を知りえないため, 天体 BH を本格的に扱おうとすると, より局所的な枠組みを必要とする. つまり時空全体に言及せずに, BH を特徴づける概念とそれらに対する BH の力学法則の定式化が望まれる. 成功を収めたものとして, 部分的に定常な BH と動的な BH の表面を特徴づける準局所的な概念である isolated horizon と dynamical horizon がある [2]. 前者は Killing 地平面⁷ の概念から着想を得て, 事象の地平面より制限を弱められた概念である. 後者は Heyward の捕捉領域から着想を得た概念であり, その特徴は空間的となりうることである. これはつまり, 外部からの重力波のフラックスや物質が地平面を介して出入り可能なことを意味し, 確かに BH の進化を表すことが期待できる. そして, これらに対して BH の力学法則は定式化可能である. dynamical horizon の非一意性など現実に応用するうえで重要となる未解決問題もあるようだが, 準局所的で厳密なこの枠組みを BBH 合体に適用し, 動的で強重力な時空域の解析可能性を検討することは今後の興味深い可能性の一つである.

また, BBH 合体からの重力波は天体 BH の進化の情報を豊かに含んでいる. 今回の検証では合体段階は対象外としたが, ここには興味深い物理が潜んでいる可能性が大いにある. この段階の解析には数値相対論を用いる他ないため, GR を完全に批判的に検討することは難しいが, ある仮説の GR からのズレを考えることで, 間接的な検証を行うことができる可能性がある. 今後の重力波検出器の感度を踏まえ, 可能な検証の枠組みを議論しておくことも課題である.

Reference

1. M.Isi et al., Phys.Rev.Lett.127, 011103 (2021)
2. A.Ashtekar & B.Krishnan, Living Reviews in Relativity volume 7:10 (2004)
3. B.Abbott et al., Phys.Rev.Lett.116,061102(2016)
4. M.Isi et al., Phys.Rev.Lett.123, 111102 (2019)

⁶本検証で興味がある BH の力学法則はこの例である. 一方で, 特異点定理は例外である.

⁷漸近平坦な定常 BH 時空では, 事象の地平面と Killing 地平面は一致する (Hawking 1972).

重字5

Analogue black holeにおける Hawking放射

名古屋大学 理学研究科
大澤 悠生

Analogue Black hole における Hawking 放射と entanglement 構造

大澤 悠生 (名古屋大学大学院 理学研究科 QG 研)

Abstract

本研究では曲がった時空中の非線形な分散関係を持つ無質量スカラー場の粒子生成及び mode 間の entanglement 構造の解析を行った。解析の結果分散関係の非線形性により 2 つの mode 間に共有される entanglement の他に、3 つ以上の mode の間に共有される entanglement が存在していることが示された。また線形な分散関係と非線形な分散関係における生成粒子のスペクトルの差異に 3 mode 間 entanglement が関与する可能性が示唆された。

1 Introduction

Hawking は重力崩壊により形成された BH 時空中のスカラー場を解析することにより BH が熱放射 (Hawking 放射) を出していることを示した [1]。Hawking の理論は量子重力理論の足がかりになると考えられているが、熱放射の放射温度が宇宙マイクロ波背景放射の温度よりも遥かに低いいため Hawking 放射の直接的な観測は困難とされている。Unruh により粒子間距離が存在しない理想的な流体中の音波の方程式は acoustic metric と呼ばれる計量を導入すれば曲がった時空中のスカラー場の方程式と同一視できることが指摘された [2]。[2] で Unruh は Schwarzschild 時空に対応する acoustic metric 上で [1] と似た議論を展開し、その時空中でのスカラー場が Hawking 放射を再現することを示した。また流体の粒子間距離の効果を取り入れるため波数に cutoff が現れるような非線形な分散関係にモデルを変更し数値解析を行い、変更された分散関係でも熱放射に近い放射が現れることを数値的に示した。その後、熱放射が現れる周波数領域を解析的に求める試み [3][4]、数値的に求める試み [5] などがなされた。また BEC や ion ring を用いた analogue モデル [6][7] や mode 間 entanglement や場の二点相関関数など analogue BH を解析する新しい物理量の提案などもなされた [8][9]。近年では Analogue BH の放射スペクトルや放射粒子間のエンタングルメントの測定実験 [10][11] も行われた。

しかし非線形項がある分散関係を考える場合には Hawking のシナリオ [1] とは異なった方法で mode 関数を構成がなされており (例えば [12][13] を見よ)、分

散関係の中の非線形項は実験に即したモデルの変更以上に重要な意味を持っている。そこで本研究では非線形項の効果が強くなるような周波数領域も含めて放射粒子のエネルギースペクトルや粒子間の entanglement 構造の解析を行った。本講演集では以下のような順で議論を進める。まず Section2 において Analogue BH について概説し、Section3 で数値計算を紹介する。最後に Section4 において結論及び、今後の課題について述べる。本講演は論文 [17] に基づいている。

2 Analogue Black Hole

本 Section では [2] に基づいて acoustic metric を導入し水流中の音波の方程式に対応する曲がった時空中のスカラー場の理論があることを紹介する。次に analogue BH におけるモードの定義を行う。後半の内容は [13] による。空間に依存する速度 v で流れる外力の働かない等エントロピー流体を考えると流体は

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla(\rho v) = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \left(\frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{2} v \cdot v + h(\rho) \right) = 0 \quad (2)$$

なる方程式により記述される。ただし Φ は $\nabla\Phi = v$ により定義される速度ポテンシャル、 ρ は流体の密度、また $h(\rho)$ は $h(\rho) = \int \frac{dp}{\rho}$ は定義される単位体積あたりの流体のエントルピーである。 p は流体の圧力を表している。ここで $\Phi = \Phi_0 + \phi$, $\rho = \rho_0 + \rho_0\psi$ なる展

開を行い摂動の計算を行う。背景の密度が一様で時間依存しないと仮定すれば、空間 1 次元の場合の摂動一次の式 (音波の方程式) は

$$(\partial_t + \partial_x v)(\partial_t + v \partial_x) \phi - c^2 \partial_x^2 \phi = 0 \quad (3)$$

と表せる。ただし $c^2 = \partial h(\rho_0)/\partial \rho$ は音波の速度を表している。一方この方程式は $ds^2 = c^2 dt^2 - (dx - v dt)^2$ なる計量の時空中の無質量スカラー場の方程式と同じ形である。このような計量を acoustic metric と呼ぶ。 $v(x) = -\sqrt{x_s/x}$ ととると acoustic metric は Schwarzschild 半径 x_s の 1+1 次元 BH を表す Painlevé 計量となる。BH の文脈では $-c = v(x_0)$ を満たすような x_0 は horizon と呼ばれる。Hawking 放射のスペクトルに現れるのは $v(x)$ の horizon 上における一階微分の値 (BH の表面重力に対応する) のみであり、 $v(x)$ の詳細な形にはよらないことがわかっていいる。 $v(x_0) = -c$ なる x_0 (sonic horizon) があるような速度関数を持つような流体は、Analogue BH と呼ばれる。

以降では簡単のため $c = 1, \hbar = 1$ として、 $v(x) = -1 + D \tanh(\kappa x/D)$ と表される場合を考える。このとき $x = 0$ が horizon になっており、 $|x| \gg 1$ で $v(x) = \text{const.}$ とみなせる。 $|x| \gg 1$ なる漸近領域で式 (3) を時間と空間で Fourier 変換すると

$$(\omega - vk)^2 = k^2 \quad (4)$$

なる分散関係を得る。ただし k は波数、 ω は周波数である。分散関係に

$$(\omega - vk)^2 = k^2 - \frac{k^4}{k_0^2} \quad (5)$$

なる変更を行うと波数の最大値は k_0 となり、 $1/k_0$ より短いスケールは記述できなくなるため、流体中の原子間距離の効果を取り入れることが可能になる。この式を逆 Fourier 変換することで

$$(\partial_t + \partial_x v)(\partial_t + v \partial_x) \phi = c^2 \left(\partial_x^2 + \frac{\partial_x^4}{k_0^2} \right) \phi \quad (6)$$

なる波動方程式を得る。以降はこの波動方程式の解析を行うことにする。 ω を決めるとき、それぞれの漸近領域では式 (5) の解 k を用いれば漸近領域で mode 関数 $\exp(-i\omega t + ikx)$ は波動方程式の解となる。式

(5) の解を図的に表すと図 1 のようになる。 $v > -1$ となる時 (horizon の外側に対応する漸近領域) では実数解が 4 つ、 $v < -1$ となる時 (horizon の内側に対応する漸近領域) では実数解は 2 つになり、残りの 2 つの解は虚数解となる。分散関係の虚数解は指数関数的に成長もしくは減衰する mode に対応するが指数関数的に増大する mode は物理的ではないとして除外することにする。 $v < -1$ の漸近領域における式 (5) の実数解を小さい順に k_1^-, k_2^- 、減衰 mode に対応する解を k_{im} 、 $v < -1$ の漸近領域における解を小さい順に $k_1^+, k_2^+, k_3^+, k_4^+$ と呼ぶことにする。 mode

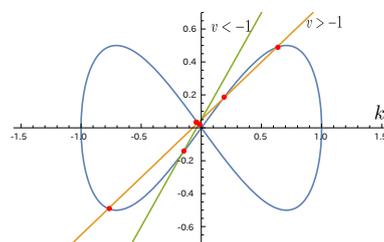


図 1: 分散関係の図示:交点の x 座標が分散関係の解となる波数を表す。

間の Klien-Gordon 内積を調べると、 k_1^-, k_1^+ に対応する mode のノルムが負となっており、 k_1^-, k_1^+ は反粒子 mode になっていることがわかる。各 mode 関数の群速度を調べると $\{k_1^-, k_2^-, k_3^+\}$ に対応する mode 関数が horizon から外に出ていく向き、他の 3 つの mode が horizon に入っていく向きとなっており、それぞれの mode を out mode, in mode と呼ぶことにする。horizon に向かって入射する波束はすべて in mode の mode 関数を使って表すことができ、horizon から出ていく波束はすべて out mode の mode 関数を用いて表される。故に、in mode と out mode の間の関係調べることにより、analogue model における粒子生成や mode 間 entanglement を解析することが可能となる。 $x \ll -1$ における mode 関数を式 (6) で $x \gg 1$ まで発展させた時 $x \gg 1$ の mode 関数で展開することができ、mode 関数間の関係を調べることができる。更に mode 関数間の関係式を生成消滅演算子の間の関係式に焼き直すことにより、以下のような Bogolyubov 変換を得る。ただし \hat{a}_3^+ などは k_3^+ の mode 関数に対応する生成消滅演算子である。また反粒子 mode に対応する消滅演算子は生成消滅演算子

に置き換えてある。

$$\begin{aligned}\hat{a}_3^+ &= \alpha_{11}\hat{a}_4^+ + \alpha_{12}(\hat{a}_1^+)^\dagger + \alpha_{13}\hat{a}_2^+ \\ \hat{a}_1^- &= \alpha_{21}(\hat{a}_4^+)^\dagger + \alpha_{22}\hat{a}_1^+ + \alpha_{13}(\hat{a}_2^+)^\dagger \\ \hat{a}_2^- &= \alpha_{31}\hat{a}_4^+ + \alpha_{32}(\hat{a}_1^+)^\dagger + \alpha_{33}\hat{a}_2^+\end{aligned}\quad (7)$$

この時 horizon 外部に放射される粒子数密度は $|\alpha_{12}|^2$ により表される。

3 Numerical Calculation

数値的に微分方程式 (6) を解き、式 (7) 中の Bogolyubov 係数の決定を行い、その Bogolyubov 係数から放射粒子のスペクトル、out mode 間の negativity, residual of entanglement の解析を行った。negativity は $N = (\|\rho^{PT}\| - 1)/2$ に定義される量であり、 $N > 0$ のときに系は entangle している。ここで $\|A\| = \text{Tr}\sqrt{A^\dagger A}$ であり、 ρ^{PT} は密度行列を部分転置した行列を表している [14][15]。log negativity は $E_N = \log(2N + 1)$ により定義されこの量が正である時、系は entangle している。また residual of entanglement は $\tau_i = E_{N_{i;jk}} - E_{N_{i;j}} - E_{N_{i;k}}$ により定義されており、 $\tau_i > 0$ のとき i の関与する entanglement は 2 体間の entanglement に分割できない entanglement を含む [16]。 i, j, k は mode を指定する index であり $\{i, j, k\}$ は互いに異なるように取る。 $E_{N_{i;jk}}$ は系を i と $\{j, k\}$ に分割したときの 2 つの系の間の log negativity である。また $E_{N_{i;j}}$ は k 系を traceout した時の i, j 系間の log negativity を表す。

簡略化のため以降は k_3^+, k_1^-, k_2^- をそれぞれ 1, 2, 3 と書くことにする。数値計算では $D = 0.7, \kappa = 7$ とし $k_0 = 2, 15$ においてそれぞれ解析を行った。粒子の放射スペクトルは図 2 のようになる。波数に cutoff を入れた影響で周波数にも cutoff 周波数 ω_{cutoff} が現れている。 $k_0 = 15, \omega \ll \omega_{\text{cutoff}}$ のときには線形な分散関係の場合と一致している。一方 $k_0 = 2$ のときは $\omega \ll \omega_{\text{cutoff}}$ のときには熱放射になっているがその温度は線形な分散関係の場合と異なっている。3 体間の log negativity 及び residual of entanglement は図 3 及び図 4 である。horizon の外側への放射スペクトルに関するものは $E_{N_{1;23}}$ 及び τ_1 である。 $E_{N_{1;23}}$ の $\omega \ll \omega_{\text{cutoff}}$ の振る舞いは $k_0 = 2, k_0 = 15$ の間

で差異はない。一方 $\omega \sim \omega_{\text{cutoff}}$ での値は $k_0 = 2$ の場合のほうが大きい。residual of entanglement は $k_0 = 2, k_0 = 15$ の場合ともに $\omega \ll \omega_{\text{cutoff}}$ では $\tau_1 \ll E_{N_{1;23}}$ であるが、一方 $\omega \sim \omega_{\text{cutoff}}$ では $E_{N_{1;23}}$ のうち τ_1 が占める割合は増えている。

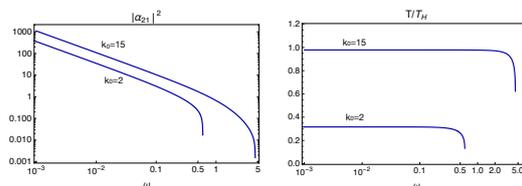


図 2: 放射スペクトル; 右は分散関係が線形となる場合の Hawking 温度と放射の温度の比を取ったもの

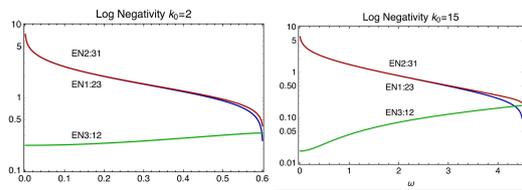


図 3: 3 体の log negativity

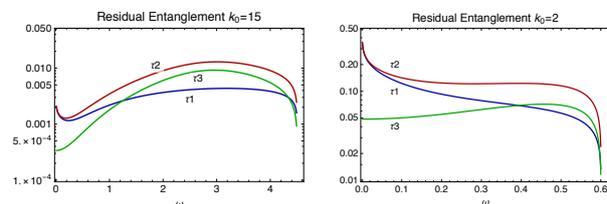


図 4: residual of entanglement

4 Discussion

数値計算の結果 $\omega \ll \omega_{\text{cutoff}}$ の場合には放射は熱的になり、さらに $k_0 > \kappa$ の場合には放射の温度は線形な分散関係の場合の温度に近づくことが示された。一方で $k_0 < \kappa$ となるような場合には線形な分散関係と放射の温度がずれることがわかった。 $\{1;3\}$ の間に mode 間 entanglement は存在しないことは示すことができる。ゆえに $\{1;23\}$ なる mode 間 entanglement を考えた時、この entanglement は $\{1;2\}$ 間で共有される

entanglement と 3 体間で共有される entanglement の合計となっている。entanglement の観点からスペクトルを見ると、2 体間で entanglement を共有するほうが 3 体間で entanglement を共有するよりも {1:23} の entanglement は大きくなるため、 $\omega \ll \omega_{\text{cutoff}}$ では {1:23} の entanglement は最大値に近づき熱的なスペクトルが現れており、一方で $\omega \sim \omega_{\text{cutoff}}$ では 3 体間 entanglement の割合が増えたため {1:23} の entanglement は最大化されなくなり熱的なスペクトルが現れなくなったと考えられる。 $k_0 = 2$ のとき放射の温度が下がっているのは cutoff の効果により horizon の外側に放出できるエネルギーの総量に制限がついてしまったからだと考えられるが、この部分をより明確にすることは今後の課題である。

- [12] S.J.Robertson 2012, J. Phys. B At.Mol. Opt. Phys. 45, (2012) 163001.
- [13] S. Corley, T. Jacobson 1996, Phys. Rev.D 54, (1996) 1568–1586.
- [14] A.Peres 1996, Phys. Rev. Lett. 77, (1996) 1413–1415.
- [15] P. Horodecki 1997, Phys. Lett. A 232, (1997) 333–339
- [16] G. Adesso and F. Illuminati 2006, New J. Phys. 8, (2006) 15.
- [17] Y.Nambu, Y.Osawa 2021, Phys. Rev. D 103, 125007.

Acknowledgement

本講演は南部保貞准教授との研究に基づいたものです。南部保貞准教授には研究内容についてのみならず、物理学や研究に対する姿勢なども日々学ばせていただいています。日頃の議論及びご指導に感謝申し上げます。

Reference

- [1] S.W.Hawking 1975, Commun. Math. Phys. 43, (1975) 199–220.
- [2] W.G.Unruh 1995, Phys. Rev. D 51, (1995) 2827–2838.
- [3] W. Unruh, R. Schützhold 2005, Phys. Rev. D 71, (2005) 024028.
- [4] R. Brout, S. Massar, R. Parentani, & P. Spindel 1995, Phys. Rev. D 52, (1995) 4559–4568.
- [5] Jean MacHer, Reanud Parentani 2009, Phys. Rev.D 79, (2009) 124008.
- [6] L.J.Garay, J.R.Anglin, J.I.Cirac, & P.Zoller 2000, Phys.Rev.Lett.(2000) 85(22) 4643-4647
- [7] B.Horstmann, B.Reznik, S.Fagnocchi, & J.I.Cirac 2010, Phys. Rev. Lett., 104, 250403, (2010)
- [8] X. Busch, R. Parentani 2014, Phys. Rev. D 89, (2014) 105024
- [9] Jeff Steinhauer 2015, Phys. Rev. 92, 024043 (2015)
- [10] Jeff Steinhauer 2016, Nature 540, 959-965 (2016)
- [11] Juan Ramón Muñoz de Nova, Katrine Golubkov, Victor I. Kolobov & Jeff Steinhauer 2019, Nature 569, 688–691 (2019)

重字6

超伝導体から見るブラックホール像

名古屋大学 理学研究科素粒子宇宙物理学専攻
郭 優佳

超伝導体から見るブラックホール像

郭 優佳 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

本研究では、3+1 次元 漸近 AdS-Schwarzschild 時空中の Einstein-Maxwell 理論においてゲージ場が作る像を計算する。この理論は AdS/CFT 対応において、超伝導体の QFT の重力双対であると考えられている。本研究で構築した像は photon ring 半径と一致しており、超伝導体の QFT の背景にある時空の性質を反映する。また、超伝導体の 2 次相転移に相当する像の変化が見られた。

1 はじめに

AdS/CFT 対応とは、「漸近 AdS 時空の重力理論」と「AdS 境界上の QFT」が等価であるという仮説である。重力理論における場の運動は、運動方程式と AdS 境界上の境界条件によって決まる。ここで、AdS 境界における場の値 (境界条件) を外場とする QFT を考える。外場に対するカレントは、AdS 境界における場の漸近解の展開係数 (傾きなど) に比例することが愚直な計算から示せる。QFT の外場に対応する場の境界値を source、カレントに対応する場の展開係数を response と呼ぶ。

AdS/CFT 対応のモデルの 1 つに、「3+1 次元 漸近 AdS-Schwarzschild 時空 (Sch-AdS₄) 中の Einstein-Maxwell 理論」と「超伝導体の QFT」の対応が挙げられる。この重力双対はホログラフィック超伝導体と呼ばれ、超伝導体理論の新たな側面として物性分野でも注目されている [1]。しかし、ホログラフィック超伝導体は電流が発散する振る舞いを見せるものの、実在する超伝導物質を記述しているかどうかは不明である。先行研究では、QFT の物理量から photon ring を構築する手法が提案された [2]。本研究ではこれをホログラフィック超伝導体に応用し、超伝導体の観測量から photon ring を構築する手法を考える [3]。これにより、実在する超伝導体の背景に重力理論があるかどうかを検証できると期待する。本研究は村田佳樹氏、辻村潤氏との共同研究である。

構成は以下のとおりである。2 章では、Sch-AdS₄ 時空中の Einstein-Maxwell 理論とその静的解、本研究のセットアップについて説明する。3 章では、ゲージ場の線形摂動解を考える。4 章で像の構築方法を説

明し、5 章でその結果を示す。最後にまとめをする。

2 Sch-AdS₄ における Einstein-Maxwell 理論

まず、Sch-AdS₄ 計量は以下で与えられる。

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left[-F(r), \frac{dr^2}{F(r)}, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right] \quad (1)$$

$$F(r) = 1 + \frac{r^2}{L^2} - \frac{r_h}{r} \left(1 + \frac{r_h^2}{L^2} \right) \quad (2)$$

ただし r_h は horizon 半径。複素スカラー場を Ψ 、ゲージ場を A_μ とし、重力場 $g_{\mu\nu}$ を背景場として扱うとする。この時、Sch-AdS₄ における Einstein-Maxwell 理論のラグランジアン密度は以下で与えられる。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \mathcal{D}_\mu \Psi (\mathcal{D}^\mu \Psi)^* + \frac{2|\Psi|^2}{L^2} \quad (3)$$

ただし $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は電磁場テンソル、 $\mathcal{D}_\mu \equiv \nabla_\mu - iA_\mu$ はゲージ共変微分である。以下では $L = 1$ とする。

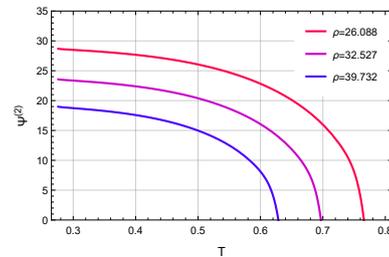


Figure 1: $|\Psi|^2$ の Hawking 温度依存性

ゲージ場とスカラー場の運動方程式は

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \Psi + 2\Psi = 0 \quad (4)$$

$$\nabla_\nu F^{\nu\mu} = J^\mu \quad (5)$$

と書ける。ただし $J^\mu \equiv i(\Psi^* \mathcal{D}^\mu \Psi - \Psi (\mathcal{D}^\mu \Psi)^*)$ 。

2.1 静的解

(4),(5) を満たす静的解を構築しよう。 $\Psi = \Psi(r)$ 、 $A_\mu = \Phi(r)\delta_\mu^t$ を運動方程式へ代入すると

$$\begin{aligned} \Psi(r)'' + \left(\frac{F(r)'}{F(r)} + \frac{2}{r} \right) \Psi(r)' \\ + \frac{\Phi(r)^2}{F(r)^2} \Psi(r) + \frac{2}{F(r)} \Psi(r) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Phi(r)'' + \frac{2}{r} \Phi(r)' - \frac{2\Psi(r)^2}{F(r)} \Phi(r) = 0 \quad (7)$$

を得る。無限遠方での漸近解は

$$\Psi(r \rightarrow \infty) = \frac{\Psi^{(1)}}{r} + \frac{\Psi^{(2)}}{r^2} + \dots, \quad (8)$$

$$\Phi(r \rightarrow \infty) = \mu - \frac{\rho}{r} + \dots \quad (9)$$

の形で与えられる。境界条件として

$$\Psi(r_h) = \epsilon, \quad \Psi^{(1)} = 0, \quad (10)$$

$$\Phi(r_h) = 0, \quad \Phi'(r_h) = \frac{q}{r_h^2} \quad (11)$$

を課す。これより r_h, ϵ, q の3つのパラメータ系列解を得る。ここで (6) を r_h 付近で展開すると $\Psi(r_h) = -(3/2)r_h \Psi'(r_h)$ の拘束条件を得るため、解は2つのパラメータ系列になる。今回は r_h, ϵ の2つのパラメータを指定して数値解を構築する。

図1に、 $\Psi^{(2)}$ の Hawking 温度依存性をプロットした。転移温度 T_c 以上でブラックホール周りの静的スカラー場が凝縮する様子が見られる。さらに T_c 以下の場合に時間に依存しないゲージ場の摂動を計算すると、AdS 境界上の電流が発散することが知られている [1]。これより、スカラーヘアの有 ($\epsilon > 0$)・無 ($\epsilon = 0$) が超伝導相・常伝導相に対応すると考えられており、Sch-AdS₄ Einstein-Maxwell 理論がホログラフィック超伝導体と呼ばれる所以である。

以下では、超伝導相・常伝導相それぞれに対応する系の光子球の像を構築していく。具体的なセットアップを図2に示した。手順は以下のとおりである。

(A) スカラーヘアがある場合/無い場合の Sch-AdS₄ を背景時空として用意する。(図2の左側)

(B) AdS 境界上の南極に単振動する局所的な光源を source として置き、そこから伝播するゲージ場を摂動計算、ゲージ場の response を求める。

(C) AdS 境界上の $\theta = \theta_{\text{obs}}$ に観測点を設け、光源から伝播する電磁場をレンズを通して観測する。

(B) で求めた response を観測量と定義し、レンズ公式を適応して像を構築する。(図2の右側)

手順(A)のために、まずパラメータ r_h, ϵ を指定する。 $\epsilon > 0/\epsilon = 0$ の場合に式 (6)(7) を解いて静的解を作り、これを背景場とする。次の章で手順(B)について説明する。

3 線形摂動解

この章では手順(B)の通り、ゲージ場の線形摂動を計算する。その際、南極の光源に対応する境界条件を課す。

スカラー場 Ψ の摂動を $\delta\Psi$ 、ゲージ場 A_μ の摂動を ΔA_μ とする。式 (4)(5) より、線形摂動方程式は

$$\mathcal{D}^2 \delta\Psi + \frac{2}{L^2} \delta\Psi = 2i\delta A^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi + i(\nabla_\mu \delta A^\mu) \Psi \quad (12)$$

$$\nabla_\nu \delta F^{\nu\mu} = \delta J^\mu \quad (13)$$

である。ただし、 $\delta J^\mu \equiv i(\delta\Psi^* \mathcal{D}^\mu \Psi - \delta\Psi (\mathcal{D}^\mu \Psi)^* + \Psi^* \mathcal{D}^\mu \delta\Psi - \Psi (\mathcal{D}^\mu \delta\Psi)^*) + 2\Psi^2 \delta A^\mu$ 。

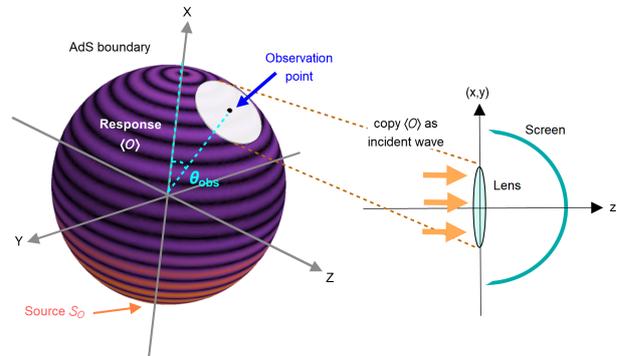


Figure 2: Caption

次に摂動場をスカラー球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ とベクトル球面調和関数 $(Y_{lm}(\theta, \varphi))_i$ でモード展開する。ベクトル球面調和関数は

$$(Y_{lm}(\theta, \varphi))_i = \epsilon_{ij} \hat{D}^j Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (14)$$

で定義されていて、 $i, j, \dots = \{\theta, \phi\}$ は単位球面 S^2 上の座標、 \hat{D}_i は単位球面 S^2 上の共変微分を表す。また、後で単振動・軸対称な境界条件を課すため、摂動場の時間依存性は $e^{-i\omega t}$ 、また φ 依存性はないものとする。さらにゲージ条件として、 $\hat{D}^i \delta A_i = 0$ を課す。これより、各摂動場は以下のように展開できる。

$$\delta \Psi = e^{-i\omega t} \sum_l c_l \psi^l(t, r) Y_{l0}(\theta), \quad (15)$$

$$\delta A_\mu = e^{-i\omega t} \sum_l c_l \left[\delta_\mu^a a_a^l(r) Y_{l0}(\theta) + \delta_\mu^i \alpha^l(r) (Y_{l0}(\theta))_i \right] \quad (16)$$

ただし c_l は重ね合わせの係数、 $a, b, \dots = \{t, r\}$ 。今回はページ数の都合上、ベクトル球面調和関数で展開できるベクトルモード摂動のみ紹介する。

3.1 ベクトルモードの摂動解

非自明なベクトルモードの摂動は

$$\delta A_i = e^{-i\omega t} \sum_{l=1}^{\infty} c_l \alpha^l(r) (Y_{l0}(\theta))_i \quad (17)$$

のみである。式 (13) より、 α^l の従う方程式は

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} - \left(\frac{\lambda_l}{r^2} + 2\Psi^2 \right) F(r_*) + \omega^2 \right] \alpha^l(r_*) = 0 \quad (18)$$

で与えられる。ただし $\lambda_l \equiv l(l+1)$ 、 Ψ は 2 章で求めたスカラー場の静的解である。 $r_* \equiv \int_{-\infty}^r 1/F(r) dr$ は亀座標を表し、 $r = r_h \leftrightarrow r_* = -\infty, r = \infty \leftrightarrow r_* = 0$ に対応する。また境界条件として、ingoing 条件 $d\alpha^l/dr_*|_{r=r_h} = -i\omega\alpha^l|_{r=r_h}$ と、規格化条件 $\alpha^l|_{r=\infty} = 1$ を課す。ここで c_l を

$$\sum_l c_l Y_{l0}(\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left[-\frac{(\pi - \theta)^2}{2\sigma^2} \right] \equiv g(\theta) \quad (19)$$

を満たすように決める。これにより境界値 $\delta A_i|_{r=\infty}$ は、 $\theta = \pi$ に局在した Gaussian が振動数 ω で振動し

ていることになる。以上より、式 (18) を α^l について数的に解き、(17) へ代入して線形摂動解を得る。

式 (18) より、解の漸近形は

$$\alpha^l(r \rightarrow \infty) = 1 + \frac{\alpha^{l(1)}}{r} + \dots \quad (20)$$

と展開できる。漸近解の展開係数を用いて、response は以下で与えられる。

$$\langle J_i^V(t, \theta) \rangle = e^{-i\omega t} \sum_{l=1}^{\infty} c_l \alpha^{l(1)} (Y_{l0}(\theta))_i \quad (21)$$

4 像の構築

この章では手順 (C) に従い、前章で計算された response から像を構築する。

まず response から作った適当な実スカラー量を観測量として定義する：

$$\mathcal{O}^V(\theta) \equiv \text{Im} \left[\frac{e^{i\omega t}}{\lambda_1} \epsilon^{ij} \hat{D}_j \langle J_i^V(t, \theta) \rangle \right] \quad (22)$$

$$= \text{Im} \left[\sum_{l=1}^{\infty} c_l \alpha^{l(1)} Y_{l0}(\theta) \right] \quad (23)$$

ここで、電気抵抗に共役な量として虚部を選んだことに注意しよう。外部電場は

$$E_i = \text{Re} [-\delta F_{ti}] \propto \sin \omega t \quad (24)$$

と与えられ、これは $\text{Im} [\langle J_i^V(t, \theta) \rangle]$ と同位相である。これより response の虚部がジュール熱に寄与するため、これが電気抵抗に共役な電流である。(response の実部、虚部は $t \rightarrow t + 2\pi/\omega$ と時間を再定義すれば入れ替わるので、虚部であること自体に意味はない。)

次に $\mathcal{O}^V(\theta)$ をレンズを通して観測したときに見える像について考えよう。具体的には、AdS 境界上の $\theta = \theta_{\text{obs}}, \phi = 0$ の観測点に小さなパッチを取り、その上の $\mathcal{O}^V(\theta)$ を測定する。さらに 3 次元ユークリッド空間内に仮想的な観測系をおく。この観測系には半径 d のレンズと焦点距離 f の半球面スクリーンが設置されている (図 2 の右側)。 $\mathcal{O}^V(\theta)$ の測定値をレンズへ入射する平面波として観測系にコピーしよう。レンズによって屈折した波の振幅は、 $d \ll f$ の仮定の下で Fourier-Fresnel 公式によって与えられる：

$$\mathcal{I}^V(\vec{x}_s) = \int_{|\vec{x}| \leq d} \mathcal{O}^V(\vec{x}(\theta, \varphi)) e^{i\omega \vec{x} \cdot \vec{x}_s / f} \quad (25)$$

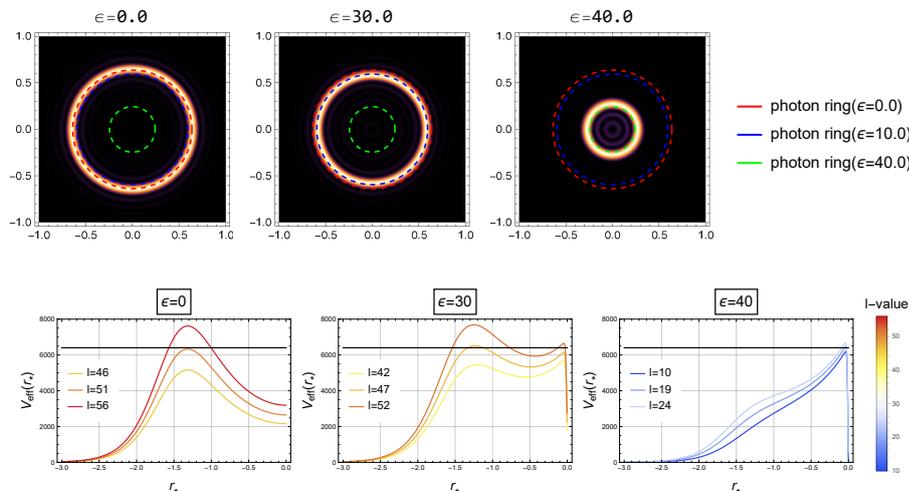


Figure 3: ベクトルモード摂動の像。赤、青、緑の点線は $\epsilon = 0.0, 30.0, 40.0$ の場合の photon ring 半径。

Figure 4: $\epsilon = 0.0, 30.0, 40.0$ の場合の有効ポテンシャル。黒い線は $\omega = 80$ を表す。

ただし、 \vec{x} は AdS 時空内の S^2 のパッチ上の座標 (θ, ϕ) を、観測系の平面レンズ上へ射影したときのデカルト座標で、 \vec{x}_s は半球面スクリーン上に張ったデカルト座標。これより、 $I^V(\vec{x}_s)$ をプロットすれば光源からの光がレンズを通して作った像を構築できる。

5 結果

$I^V(\vec{x}_s)$ のノルムを図 3 にプロットした。パラメータは $r_h = 0.3, \epsilon = \{0, 35, 41\}$ と設定した。その他、 $\omega = 80, d = 0.5, \sigma = 0.01, \theta_{\text{obs}} = 0^\circ$ とした。

像はリング状になるが、これは系の軸対称性から自明である。注目すべきは、リングの半径と geodesic 近似から計算される photon ring の半径が一致することである。これより $I^V(\vec{x}_s)$ の像は photon ring に対応しており、時空の性質を捉えていることが分かる。

像の ϵ 依存性に着目する。 $\epsilon = 0$ の常伝導相の場合には、スカラーヘアのない Sch-AdS₄ 時空の photon ring が反映されている。 $\epsilon > 0$ の超伝導相では、 ϵ を大きくするにつれてリング半径は徐々に小さくなる。このリング半径の変化は超伝導体の 2 次相転移を反映している。重力理論としてこの転移を理解するには、有効ポテンシャル (図 4) を考えるのが良い。式 (18) より、ゲージ場の有効ポテンシャルは

$$V_{\text{eff}}(r_*; l, \epsilon) = \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + 2\Psi^2 \right) F(r_*) \quad (26)$$

で与えられる。方位量子数 l の大きさは像の大きさと対応している。また、電磁場のエネルギー ω が有

効ポテンシャルの極大をかすめて跳ね返される運動は、ブラックホール周りを $n (\gg 1)$ 周する光路、 $n+1$ 周する光路... など、密な多数の光路に対応するため、この場合の l モードが像へ最も寄与すると考えられる。これより、スカラーヘアが大きくなると有効ポテンシャルを底上げし、小さい l モードが像へ寄与するため像が小さくなることが分かる。さらに $\epsilon \gtrsim 35$ まで大きくすると、急激に像が小さくなる振る舞いが見られる。これは有効ポテンシャルの極大値が、重力ポテンシャルの頂点からスカラーヘアのポテンシャルの頂点へ遷移するためである。

6 まとめ

本研究は、Sch-AdS₄ 時空中の Einstein-Maxwell 理論におけるゲージ場の photon ring を計算した。背景にスカラーヘアがある場合とない場合について、ゲージ場のベクトルモード摂動を計算し、レンズを通して見える像を構築した。ベクトルモードの像はスカラーヘアの有無に応じた変化が表れ、超伝導体の 2 次相転移を反映していると考えられる。

Reference

1. S. Hartnoll, C. Herzog and G. Horowitz, *Phys.Rev.Lett.*, 101, 1-4, 2008
2. K. Hashimoto, S. Kinoshita and K. Murata, *Phys. Rev. D*, 101(6):66018, 2020
3. Y. Kaku, K. Murata and J. Tsujimura, arXiv:2106.00304 2021

重字7

Complementarity と Firewall

京都大学 理学研究科物理学宇宙物理学専攻
脇 隆浩

Complementarity と Firewall

脇 隆浩 (京都大学大学院 理学研究科)

Abstract

以下の仮定を満たす理論は存在するだろうか。1. BH の形成・蒸発過程は遠くの観測者から見ると標準的な量子力学で記述される。特に Unitary 性を仮定する。2. 大きな BH の stretched horizon の外側は、semi-classical な QFT で記述できる。3. 遠方の観測者 (以下 Bob) には状態空間の次元は Bekenstein-Hawking エントロピーの指数で与えられる。4. 自由落下する観測者 (以下 Alice) は event horizon で何も特別なことを観測しない。1 と 4 は一見すると以下の思考実験により矛盾している。Alice が量子情報を持って event horizon に飛び込む状況を考える。4 によりその量子情報は event horizon で破壊されない。また 1 によりその情報は Hawking radiation によって Bob に返却される。つまり Alice と Bob が同じ量子情報を持ち量子クローニング禁止定理に反するようになる。しかし、単一の観測者が矛盾を確認できない場合は矛盾してもよいとする仮説 (Complementarity) を採用すればこの矛盾は回避できる

ところが、仮定の矛盾を単一の観測者が見てしまうという主張が AMPS らによってなされた。この主張の趣旨は 123 を仮定すると Alice は高エネルギーのモード (Firewall) に horizon 近傍で出会い、4 に矛盾するというものである。

本稿では論文 (Susskind et al. 1993)(Polchinski et al. 2013) に基づき、Complementarity と Firewall についてレビューする。

1 Introduction

一般相対論に現れるブラックホールは一度中に入った物体は外に出ることのできない対象である。しかし、半古典的な重力理論を使い、量子効果を加味することで、ブラックホールから熱的なスペクトルを持った粒子が飛び出てくることを Hawking は示した。Hawking はさらに議論を進め、ブラックホールの形成蒸発過程において、情報が失われると結論した (Hawking 1976)。これが「ブラックホール情報パラドックス」といわれるものである。つまりユニタリ性は失われる。

これに対する一つの解答が Susskind 達によって提唱された Complementarity という仮説である。これは一人の観測者が理論の矛盾を見ない限りは、理論は無矛盾であるとする仮説である。この仮説においてユニタリ性と等価原理の両方が許容される。

しかし、Polchinski 達は Complementarity は十分でない、つまり単一の観測者が理論の矛盾を見ないことを主張する「AMPS パラドックス」を提唱

した。この主張の趣旨は自由落下する観測者は高エネルギーのモード (Firewall) に horizon 近傍で出会い、等価原理を破棄しなければならぬというものである。また同じ結論を量子もつれのモノガミー性を用いることでも導くことができる。

本稿ではまず、ブラックホール情報パラドックスについてレビューをする。次に Page curve を後の議論で必要であるので導入する。最後に本題である Complementarity と Firewall についてレビューする。

2 ブラックホール情報パラドックス

ブラックホールの蒸発はホライズンよりわずかに外側で対生成が起こり、負のエネルギーを持った粒子がブラックホールに落ち、正のエネルギーを持った粒子が遠方に飛び去る (Hawking 放射) ことで起こると考えられる。しかし古典的なブラックホールでは物質はブラックホールのホライズンにはないため、粒子はその物質の情報をブラックホールの外側に持ち去

ることができない。そのため、情報を取り返すためには、イベントホライズンよりわずかに外側に stretched horizon と呼ばれる量子的な情報が刻まれた構造を用意する必要がある。stretched horizon は遠方の観測者にとって実体としてふるまうが、等価原理より自由落下する観測者はそれを見ないことを要請する。そうすることで情報が返ってくるとしよう。

しかしこれは単純に考えると、量子クローニングが起こっているように見える。以下の論理でそれがわかる。まず量子ビットを持った観測者（アリス）がイベントホライズンの中に飛び込む。情報はホーキング放射に乗って遠方の観測者（ボブ）に帰ってくる。これら二人の観測者は同一の同時刻面に乗せることができ、量子クローニングが起こってしまう。その解決策が後述する Complementarity である。

3 Page curve

少し話は逸れるが、Page curve についてレビューする (Page 1993)。ホーキング放射により時間がたつにつれて、ホライズンの面積は小さくなっていく。ベッケンシュタインエントロピーはホライズンの面積に比例する。そして、これを指数の肩に乗せたものはブラックホールの状態空間の次元であるとする。したがって、ブラックホールの状態空間の次元は放射に伴ってどんどん減っていく。そしてその自由度はホーキング放射に移っていると考えられる。そうして Hawking 放射を記述する状態空間の次元は増えていく。

Page は System が典型的な状態であることを仮定して、放射のエンタングルメントエントロピーを計算した。(全体で純粋であるのでブラックホールのエンタングルメントエントロピーも同じ値になる) そうすると、状態空間の次元が一致するとき、エンタングルメントエントロピーは最大になり、蒸発しきったとき 0 になることがわかる。エンタングルメントエントロピーが 0 になるというのは系が純粋状態になっていることを意味している。エンタングルメントエントロピーが最大になる時刻のことを Page time といい、ブラックホールの蒸発時間の半分程度になる (図 1 参照)。

Page time 以前の radiation (early time radiation) と以後の radiation (late time radiation) ではもつれているパートナーの自由度の所在は異なる。early time radiation はブラックホールともつれている。対して、late time radiation は early time radiation ともつれることによってエンタングルメントエントロピーを減少させている。一般に混合状態にある量子状態に対して、そのパートナーとなる自由度を用意することで純粋状態に近づけることを purify と呼ぶ。つまり、今回のケースでは late time radiation は early time radiation を purify している。

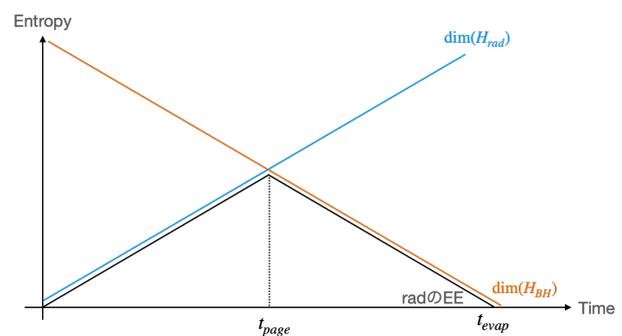


図 1: Page curve と呼ばれるエンタングルメントエントロピーの時間変化を視覚化した曲線である

4 Complementarity

以下の四つの仮定すべてを満たす理論は存在できるだろうか。

1. Unitarity : System の時間発展はユニタリ演算子で記述できる。
2. 大きいブラックホールの stretched horizon の外は半古典的な重力理論で記述される。
3. $e^{S_{Bekenstein}} \simeq \dim(H_{BH})$ が成り立つ。
4. No drama: 自由落下する Observer は何も感じない。

前に見た通り、そのような理論はナイーブには、量子クローニングを引き起こしてしまう。そこで単一の観測者が物理法則の矛盾を見ない限りは大丈夫で

あるとしよう (Complementarity)。そうすると上記の四つすべてを満たす理論はいくつかの思考実験において整合している。そのうちの一つの思考実験を見よう (Susskind 1993)。

一人 (Bob) はある時刻までホライズンの十分遠方に留まり、一人 (Alice) は量子ビットをもって early time のホライズンに自由落下する状況を考える。Bob は Alice がもっていた量子ビットが Hawking 輻射に乗って帰ってくるまで待つ。radiation が purify されるのは page time 程度であるから、Bob が量子ビットを手に入れるのは少なくとも page time たった後である。先ほどした思考実験とここまでは同じであるが、まだ単一の観測者が矛盾、この場合は特に cloning を見ていないので大丈夫である。

しかし、Bob が輻射を受け取った後、horizon に飛び込む状況は危ういように見える。Alice が Bob にむけて自分が持っている量子 bit の情報を飛ばすことで、Bob は同じ状態の量子 bit を二つ持つことになり量子クローニングに成功するからである。ところが、Alice が Bob に向けて情報を発信できる時間は計算すると $M \exp(-M^2)$ 程度であるので、その通信の周波数は最低でもその逆数程度必要であり、プランクエネルギーを優に超える。この通信の時空への反作用により、ボブへの通信は妨げられると考えられる。よってクローニングは起こらないと考えられる (図 2 参照)。

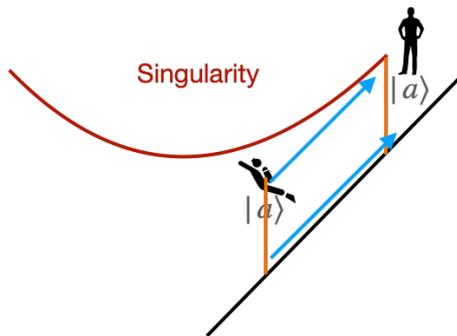


図 2: クルスカル時空のペンローズダイアグラムの一部である。オレンジの線が Alice と Bob の軌跡であるが、その間に Alice は Bob に信号を送らなければならない。しかし、オレンジの線の固有時間はプランク時間より短い。

5 Firewall

Complementarity を採用することで上記の思考実験においては物理法則は矛盾を回避している。しかし、より精密に考えると、回避できることがわかる。以下の思考実験を考えよう。

5.1 一つ目の導出

まず観測者は early time radiation を一つ受け取る。先ほど述べた通り、ある early time radiation とある late time radiation はエンタングルメントしている。このことから、観測者はその early time radiation からある late time radiation を予測することができる。これは early time radiation が late time radiation によって purify されるという描像に基づくため、ユニタリ性を暗に仮定している。その late time radiation の遠方での周波数はブラックホールの温度程度であるはずである。その周波数がホライズン付近ではどのようなであったのかは半古典的な重力理論を使って、逆向きに時間発展させればわかる。そして観測者はそれが激しく blue shift することを予測する。つまり、観測者はホライズン付近で高いエネルギーの輻射 (Firewall) に出会うと予測する。しかし、観測者が自由落下してホライズンに飛び込むとすると、高いエネルギーの粒子に出会うことは no drama の仮定に反する。したがって単一の観測者が仮定の矛盾を見てしまう (図 3 参照)。

5.2 二つ目の導出

同様の結果が異なる論理で導ける。まず領域をブラックホール A 、ホライズンの近く B ($2M < r < 3M$)、それ以外 R という風に分割する。early time においては放射とブラックホールが強くもつれているため、 A と B は強くもつれている。また Minkowski 時空の真空状態において、分割した二つの領域は強くもつれている。大きいブラックホールにおいてはイベントホライズンはほとんど平坦であり、Minkowski 時空と同じ様な構造をしてほしいのでこれは自然である (図 4 参照)。

では late time においてはどうか。late time radiation と early time radiation は先述の通り強くもつれている。つまり、領域 B と R は強くもつれている。したがってモノガミー性より、 B と A はもつれていない。これは Minkowski 時空における真空の構造と大きく異なる。よって、何らかの励起状態 (Firewall) にあると考えられる。

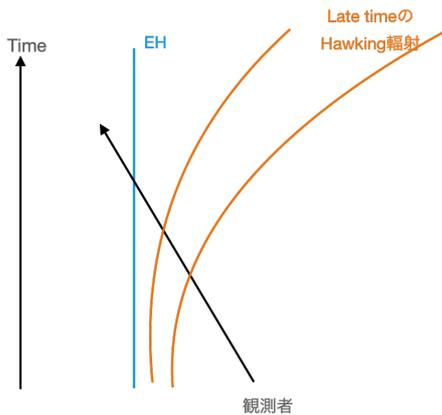


図 3: エディントンフィンケルシュタイン図に観測者が予測する late time radiation の波束の運動を記した。

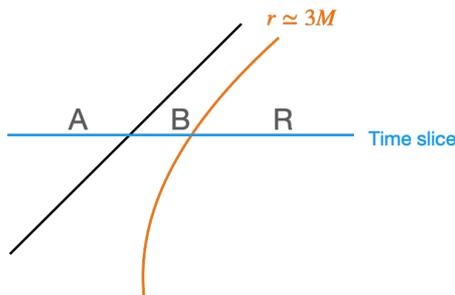


図 4: ペンローズダイアグラムの一部である。黒い線はイベントホライズンである。領域を 3 つに分割し、それらの間のエンタングルメントに着目する。

6 結論

本稿では、Hawking 輻射が情報を取り出すことがどのように物理法則への修正を要求するか見た。具体的にはその仮説として Complementarity とそれを

否定する仮説である Firewall についてレビューした。Firewall は等価原理の破れを含むため、情報パラドックスの満足な回答になっているとは言えず、さらなる進展が期待される。

Reference

- Hawking, S. W, Phys. Rev. D, 14, 2460 (1976).
- L. Susskind, L. Thorlacius, and J. Ugrum, arXiv:9306069v2 (1993).
- A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski, and J. Sully, arXiv:1207.3123v4 (2013)
- Don N. Page arXiv:gr-qc/9305007
- L. Susskind, L. Thorlacius arXiv:hep-th/9308100 (1993)

重字8

ブラックホール熱力学と高階微分重力理論

京都大学 理学研究科物理学宇宙物理学専攻
鳥羽 修平

ブラックホール熱力学と高階微分重力理論

鳥羽 修平 (京都大学大学院 基礎物理学研究所)

Abstract

本稿では [1] をレビューする。今まで一般相対性理論を拡張した理論として修正重力理論が精力的に考えられてきた。今回はその新たなアプローチとして、熱力学的な観点から修正重力理論を導くことを試みる。この背景には Einstein 方程式が熱力学的な関係式から状態方程式として導くことができる [2] という事実があり、本稿ではそれに倣って状態方程式として修正重力理論の方程式を導けることを見る。

1 Introduction

一般相対性理論は多くの実験事実と一致する結果を導いているが、宇宙の加速膨張の起源等については説明仕切れていない。そこで、Einstein 方程式を導く Einstein-Hilbert 作用は計量の最低次の微分項しか持たないが、良い性質を保ちつつ高階微分項を含ませることでこれを拡張した修正重力理論を考えることができる。一方、修正重力理論を熱力学的な要請から求めるという考え方がある。その考え方に至るまでには以下のような背景がある。

まず一般相対性理論において、ブラックホール (BH) に対し熱力学に類似した法則が成り立つ。そのうちの一つに、BH のエントロピー S 、温度 T 、エネルギー Q の関係を表す Clausius の関係式

$$\delta Q = T\delta S \quad (1)$$

がある。BH のエントロピーと温度は BH の境界であるイベントホライズンに関する量で表される。さらにこの関係は一般相対性理論において定義される他の種類のホライズンでも成立する。

それとは逆に、エントロピーと温度の式、そして (1) を仮定して Einstein 方程式を導くことができる [2]。この導出は丁度熱力学における状態方程式の導出と類似しているため、Einstein 方程式を状態方程式と考えることができる。また、この議論は重力理論の背後により基本的な理論として熱力学が存在する可能性を示唆する。

以上を踏まえ、本稿ではこの宇宙を表す重力理論は熱力学的な性質を満たすという立場を取り、熱力学から状態方程式として高階微分を含む重力場の方

程式を導くことを試みる。そしてその結果として導かれた状態方程式から具体的に Lovelock 重力理論等が導かれることを見る。

2 準備

この節では、計算のために必要な概念の定義をする。

2.1 Local Causal Horizon

Σ_p を時空点 p を通る測地線で生成される任意の小さな spacelike $D-2$ 次元面とする。 Σ_p 上の各点において、 Σ_p に垂直なヌルベクトルが独立に 2 つ存在し、それらを k^a, l^a ($k_a l^a = -1$) と置く。これらが接する測地線を Σ_p の全ての点で考えると、それらの測地線から 2 つの超曲面が生成される。その一方 (今回は k^a の接する測地線で生成される超曲面) のうち過去の部分を Local Causal Horizon (LCH) と定義する。

2.2 Null Normal Coordinates

Σ_p 上の座標をまず定義する。点 p 上で $D-2$ 個の正規直交ベクトル $\{e_A^a\}_{A=1}^{D-2}$ を選ぶ。 Σ_p は $\{e_A^a\}$ が張る空間上のベクトルが接する測地線により生成される。その測地線上の点 q と点 p のアフィンパラメータ単位の距離を s 、点 p での単位接ベクトルを v^a とし、 $x^A e_A^a = s v^a$ とし $D-2$ 次元の座標 x^A を定める。同様に、 k^a, l^a に接する測地線のアフィンパラメータ単位で残りの 2 次元分の座標 (U, V) を定め

る. ここで, k^a に対応するのが V , l^a に対応するのが U とする.

以上により, 点 p の近傍点 r の Null Normal Coordinates(NNC) が $x_r^\alpha = (U, V, x_q^A)$ が定められる. この座標を用いると, LCH は $U = 0$ かつ $V \leq 0$ の領域となる.

尚, NNC は k^a の自由度を用いて, 点 p において局所慣性系になるように出来る. 以下はそのような NNC を取っていることとする.

2.3 Horizon sciles

出発点は Clausius の関係式

$$\delta Q = T\delta S \quad (2)$$

である. ここで, δQ は LCH に流入する熱, $T = \hbar/2\pi$ (通常 BH 熱力学では表面重力を κ として $T = \hbar\kappa/2\pi$ であるが, ここでは $\kappa = 1$ と規格化しているとする), δS は LCH 上でのエントロピーの変化であるから, ある時間でのエネルギーとエントロピーを計算するための LCH 上の spacelike な断面を考える必要がある. しかし, ここでは点 p の十分近傍を考えるので, $V = (\text{定数})$ 面同士の変化ではなく, 図 1 のような Σ, Σ_0 上での差を考えることにする.

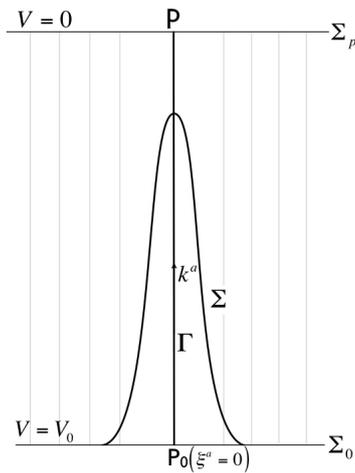


図 1: 計算に用いるホライズンの断面 (R. Guedens, et al. 2012)

ここで, 図 1 の点 p_0 は後に分岐点 (Killing ベクトルがゼロベクトルとなる点) とする点であり, Γ は点

p を通る LCH の generator である. これを central horizon generator と呼ぶ.

2.4 局所 Killing ベクトル

熱とエントロピーを計算するために Killing ベクトルを考える必要がある. しかし曲がった時空では全ての点で正確に Killing 方程式を満たすようなベクトルは一般には存在しない. ゆえに, 点 p で正確に Killing ベクトルであり, 点 p の周りで近似的に Killing ベクトルであるようなベクトルとして局所 Killing ベクトルを考えたい. そのために, Σ, Σ_0 を十分小さく取れば central horizon generator Γ 上からの寄与が支配的だと考え, Γ 上で以下の 3 つの条件を課す.

$$\xi^\alpha|_\Gamma = \tilde{V}\delta_V^\alpha + \mathcal{O}(\tilde{V}^2) \quad (3)$$

$$\nabla_{(\alpha}\xi_{\beta)}|_\Gamma = \mathcal{O}(\tilde{V}^2) \quad (4)$$

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta\xi_\gamma|_\Gamma = (R^\delta{}_{\alpha\beta\gamma}\xi_\delta)|_\Gamma + \mathcal{O}(\tilde{V}^2) \quad (5)$$

ここに $\tilde{V} = V - V_0$ である. 以下, 式 (3),(5) は Γ 上で $\mathcal{O}(\tilde{V}^2) = 0$ となることを示す. アフィン接ベクトル v^a を持つ測地線上でベクトル場 ζ^a が Killing 恒等式を満たすとすると, その両辺に $v^a v^b$ を掛けて縮約を取ること

$$v^a\nabla_a(v^b\nabla_b\zeta_c) = R_{dabc}\zeta^d v^a v^b \quad (6)$$

が成り立つ. これは二階の線形常微分方程式であるから, ζ^a と $v^b\nabla_b\zeta^a$ の初期値が分かれば解が一意に定まる. 測地線の任意のアフィンパラメータを s とすると, s の二階 v^a 方向微分が 0 であるので, sv^a は解である. 故に, 1 つの点で $\zeta^a = sv^a$, $v^b\nabla_b\zeta^a = v^a$ が成立すれば測地線上で常に $\zeta^a = sv^a$ な事が分かる. ここで, $\xi^a = \tilde{V}k^a$ を考えると, 点 p_0 で $\xi^a = 0 \cdot k^a$, $k^b\nabla_b\xi^a = k^a$ (\because これは表面重力の定義式となるノンアフィンな測地線方程式を \tilde{V} で割ったものであるから) が成り立つので, 測地線 Γ 上で $\zeta^a = \tilde{V}k^a$ は式 (6) の解となる.

以上により, 式 (3)(4)(5) は

$$\xi^\alpha|_\Gamma = \tilde{V}\delta_V^\alpha \quad (7)$$

$$\nabla_{(\alpha}\xi_{\beta)} = \mathcal{O}(x^2) \quad (8)$$

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta\xi_\gamma|_\Gamma = (R^\delta{}_{\alpha\beta\gamma}\xi_\delta)|_\Gamma \quad (9)$$

となる．局所 Killing ベクトルはこれを満たすものとする．

3 状態方程式の導出

3.1 仮定

状態方程式の導出にあたってする 3 つの仮定をする．

1. Clausius の関係式 (1) が, $p_0 \rightarrow p$ の極限で, 図 1 の Σ, Σ_0 で囲まれた領域 H 上で成立する．ただし, $T = \hbar/2\pi$ とする．
2. エントロピーが Σ 上の $D - 2$ 次元積分で表される．
3. エントロピーが局所 Killing ベクトルとその微分に対し線形である．

1. は点 p の近傍で Clausius の関係式が成り立つことから要請される仮定, 2. はエントロピーが BH 熱力学において面積に比例することからの類推, 3. はこの仮定を満たすエントロピーの一般式 (15) の形が, エントロピーを Neother チャージとして導く Wald エントロピーと同じ形であることや, 熱の流れが局所 Killing ベクトルで書かれる事からの類推と考える事ができる．

3.2 Clausius の関係式

仮定 2. より, Σ 上のエントロピーは以下のように書ける．

$$S = \int_{\Sigma} s^{ab} N_{ab} dA \quad (10)$$

ここに s^{ab} はエントロピー密度で反対称テンソル, N_{ab} は Σ の binormal テンソルである．よって, Stokes の定理を用いれば,

$$T\delta S = -\frac{\hbar}{\pi} \int_H \nabla_b s^{ab} k_a dV dA \quad (11)$$

となる．熱に関しては, 熱の流れが $-T_{ab}\xi^b$ と表せるため,

$$\delta Q = \int_H T^{ab} \xi_b k_a dV dA \quad (12)$$

と表せる．仮定 1. より式 (11)(12) の被積分関数は $\mathcal{O}(x)$ で一致するので,

$$-\frac{\hbar}{\pi} \nabla_b s^{ab} k_a = T^{ab} \xi_b k_a + \mathcal{O}(x^2) \quad (13)$$

が成立する．これは全ての点 p とそこからのヌル方向 (Γ 上) に課せられる．

3.3 エントロピー密度

仮定 3. より

$$s^{ab} = \frac{2\pi}{\hbar} Q^{ab} \quad (14)$$

$$Q^{ab} = W^{abc} \xi_c + P^{abcd} \nabla_c \xi_d \quad (15)$$

と書ける．ただし, W, P の前 2 つの添字は反対称である．二階微分以上の項は Killing 恒等式より消える． P^{abcd} の cd に関しての対称成分の $\nabla_b Q^{ab}$ への寄与は式 (8)(9) により, 小さな Σ を考えれば $\mathcal{O}(x^2)$ である．故に P^{abcd} の cd に関しての反対称成分を X^{abcd} と置くと,

$$\begin{aligned} \nabla_b Q^{ab} &= (\nabla_r W^{arb} + X^{arst} R_{rst}^b) \xi_b \\ &\quad + X^{arst} (\nabla_r \nabla_s \xi_t - R_{rst}^b \xi_b) \\ &\quad + (W^{ast} + \nabla_r X^{arst}) \nabla_s \xi_t \end{aligned} \quad (16)$$

となる．右辺一行目は ξ が $\mathcal{O}(x)$ なので $\mathcal{O}(x)$ で, 2 行目は小さな Σ 上では 0 である．3 行目は s, t の対称成分は式 (8) より $\mathcal{O}(x^2)$ で, 反対称成分は $\mathcal{O}(1)$ である．一方, 式 (13) の右辺は $\mathcal{O}(x)$ なので, $W^{a[st]} + \nabla_r X^{arst}$ の 0 次の項, すなわち点 p での値は 0 となる．この議論は全ての点で行う事ができる．それぞれの点の議論で取る座標系 (NNC) が異なるが, 0 テンソルの座標変換は 0 テンソルであるので, 結局全ての点で

$$W^{a[st]} + \nabla_r X^{arst} = 0 \quad (17)$$

が要請される．これと W, X の前 2 つの添字が反対称な事から,

$$W^{arb} = \nabla_s (X^{sarb} + X^{sbra} + X^{srba}) \quad (18)$$

と分かる．よって, 式 (16) 右辺の 2, 3 行目は無視できて,

$$\nabla_b Q^{ab} = (\nabla_r W^{arb} + X^{arst} R_{rst}^b) \xi_b \quad (19)$$

と書ける．

3.4 状態方程式

式 (18) を式 (16) に代入したものを式 (13) に代入すると,

$$R^a{}_{rst}X^{b)rst} + 2\nabla_r\nabla_sX^{(a|s|b)r} + \Phi g^{ab} = -\frac{1}{2}T^{ab} \quad (20)$$

が導かれる. これが状態方程式である. これにエネルギー運動量保存則 $\nabla_b T^{ab} = 0$ を課せば,

$$\nabla^a\Phi = -\nabla_b\left(R^a{}_{rst}X^{b)rst} + 2\nabla_r\nabla_sX^{(a|s|b)r}\right) \quad (21)$$

により Φ が決定される. これが満たされる時, 式 (20) の左辺は発散が 0 の 2 階テンソルである. 作用 $I_g[g]$ に対し $\delta I_g/\delta g_{ab}$ は計量とその微分で表される発散が 0 の 2 階テンソルで, またそのようなテンソルは全てこの形で表せる事が知られているので, 故に状態方程式は作用 $I_g + I_{matter}$ より導かれる運動方程式になっている.

3.5 例

1. $L(R)$ 理論

$$X^{abcd} = \frac{f}{2}(g^{ac}g^{bd} - g^{ad}g^{bc}) \quad (22)$$

($f = f(R, R_{ij}, R_{ijkl})$) として式 (21) を計算すると,

$$\nabla^a\Phi = -\frac{1}{2}f\nabla^aR \quad (23)$$

となるため f は R の関数と分かる. ある関数 $L(R)$ により $f = -dL/dR$ と書くと, $\Phi = L/2$ と書けるため, 式 (20) を計算すると

$$L'(R)R^{ab} - \nabla^a\nabla^bL'(R) + \left(\square L'(R) - \frac{L(R)}{2}\right)g^{ab} = \frac{1}{2}T^{ab} \quad (24)$$

が導かれる. この方程式はラグランジアン $L(R) + L_{matter}$ から導かれる運動方程式と一致している.

2. Lovelock 重力

X^{abcd} が $g^{\mu\nu}$ の 2 階微分以下を含みかつ $\nabla_a X^{abcd} = 0$ とし, 式 (21) を課せば, 式 (20)

の左辺は対称で, 計量の 2 階以下の微分のみで構成され, 発散が 0 となる. これは Lovelock の定理の仮定そのものであるので, 状態方程式は Lovelock 重力のものになる.

4 Conclusion

本稿では, エントロピーに局所キリングベクトルの選択に対する依存性を導入するという代償を払うことで, 状態方程式を高階に拡張することに成功した. しかしこの依存性はエントロピーの差に主的に現れるものであるので, 今回の導出が熱力学的に重要な意味を持つかは明らかでなく, 物理的な解釈は曖昧である. 今回取ったステップの他に, 熱力学的エントロピーに対する定数分の任意性やエンタングルメントエントロピーからの寄与などの微妙な点を更に考慮に入れることでより良い定式化ができるのかもしれない. もしくは, 重力場方程式への高次曲率項の寄与は, 局所的な熱力学レベルでは現れないということもあるかもしれない.

今後も熱力学と重力理論の間にある関係性の解明が期待される.

Acknowledgement

質問や議論に何度も付き合ってくださいました基礎物理学研究所と天体核研究室の先輩の皆様にも多大なる感謝を申し上げます.

Reference

- [1] R. Guedens & T. Jacobson & S. Sarkar, Horizon entropy and higher curvature equations of state, Phys. Rev. D 85 (2012) 064017, [1112.6215].
- [2] T. Jacobson, Thermodynamics of space-time: The Einstein equation of state, Phys. Rev. Lett.75 (1995) 1260-1263, [gr-qc/9504004].

重字9

潮汐変形現象に対する理論的解析: 一般相対論及びその
の拡張理論の観点から

名古屋大学 理学研究科素粒子宇宙物理学専攻
沼尻 光太

潮汐変形現象に対する理論的解析: 一般相対論及びその拡張理論の観点から

沼尻 光太 (名古屋大学大学院 理学研究科 QG 研究室)

Abstract

本発表では、観測による重力理論の決定を念頭に、中性子星の潮汐変形現象における修正重力理論の効果について議論する。まず一般相対論における潮汐変形についてレビューを行い、‘星が歪む度合い’(潮汐変形率)を決定する観測可能なパラメータである Tidal Love number (TLN) を導入する。そして重力理論として $f(R)$ 重力理論を採用した際に、(Jordan frame の下で) 潮汐変形および TLN に現れる影響について検証する。

1 イントロダクション

修正重力理論は、一般相対性理論 (GR) に新たな物理的自由度を追加する等を行い理論を拡張するものであり、ダークエネルギーやインフレーションといった宇宙論的問題の解決や、量子重力理論への橋渡しを期待されている。今回扱う $f(R)$ 重力理論もこの一種であり、特に宇宙論的制限をクリア出来る可能性があるとして議論されている ([1] 他)。現在は強重力領域など他のエネルギースケールからくる制限を満たす関数 $f(R)$ の模索が課題となっている。

一方、観測サイドでは近年 LIGO, Virgo, KAGRA といった重力波観測器による、強重力天体の観測がスタートしている ([2] 他)。なかでも (連星合体重力波などで捉えられる) 中性子星は、その物理量が強く重力理論に依存し、なおかつこの物理量の情報は重力波の振幅や位相から読み取れる [3]。このことから中性子星は強重力領域の重力理論に対するプローブとして注目されている。

本発表では中性子星の潮汐変形現象について、一般相対論 (GR) 及び $f(R)$ 重力の観点から検証する。なお本集録では紙面の都合から、レビューパートを中心に説明する。

2 $f(R)$ 重力理論

本章は [4] に基づく。修正重力理論の一種である $f(R)$ 重力理論は、GR における Einstein-Hilbert ac-

tion

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R.$$

において、Ricci scalar R をその関数 $f(R)$ に拡張することで得られる:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (1)$$

なお今回、重力場の独立変数は metric $g_{\mu\nu}$ のみであるとする metric formalism に基づくものとする¹。この場合、物質場の作用 $+S_M(g_{\mu\nu}, \psi)$ を加えた上で、metric に対する変分を行うことで以下の重力場の運動方程式 (EOM) を得る:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2)$$

ここで

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

なお、正確には EOM (2) を得る際には、metric の微分があることから surface term の取り扱いを慎重に行う必要があるが²、ここではその説明は割愛する。EOM (2) は $f(R) = R$ で Einstein 方程式に帰着する。

重要な事実として、 $f(R)$ 重力は通常の GR が持つ 2 物理的自由度に加えて scalar 1 自由度を加えたも

¹これに対し、metric および connection がそれぞれ独立であるとするのが Palatini formalism である。

²GR では Gibbons-York-Hawking term と呼ばれる全微分項を足しておくことで処理できるが、 $f(R)$ 重力ではそのような一般的な手法は知られていない。

のとなっていることが知られている。実際、(1) は次と等価であることが知られている。

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R - V(\phi)] + S_M(g_{\mu\nu}, \psi),$$

$$\phi = f'(R), \quad V(\phi) = R(\phi)\phi - f(R(\phi)),$$

これは scalar-tensor 理論 (重力の独立変数が metric + scalar 場である理論) の 1 種である Brans-Dicke 理論³ の action であり、これから $f(R)$ 重力における物理的自由度は $2 + 1$ であることが分かる。このことは、共形変換

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = f'(R)g_{\mu\nu} \equiv \phi g_{\mu\nu},$$

および再定義

$$d\tilde{\phi} = \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \frac{d\phi}{\phi},$$

を実行し、いわゆる Einstein frame に移れば

$$S' = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{R}}{2\kappa} - \frac{1}{2} \partial^\alpha \tilde{\phi} \partial_\alpha \tilde{\phi} - U(\tilde{\phi}) \right]$$

$$+ S_M \left(e^{-\sqrt{2\kappa/3}\tilde{\phi}} \tilde{g}_{\mu\nu}, \psi \right),$$

$$\phi \equiv f'(R) = e^{\sqrt{2\kappa/3}\tilde{\phi}}, \quad U(\tilde{\phi}) = \frac{Rf'(R) - f(R)}{2\kappa (f'(R))^2},$$

となり、より明白である。この追加された scalar 自由度を以て late-time expansion や H_0 tension といった問題を解決しようという試みがなされている [1, 5]。また NS の質量半径関係に与える影響についても議論されている [6, 7]。

3 GR における潮汐変形

次に [8] に基づき、GR における潮汐変形現象についてレビューする。球対称な静水圧平衡解に対し、無限遠方のソースに由来する重力場 (tidal field) が加わる場合を考える。なお潮汐変形は十分に静的であるとする。よって背景解は星内部で

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{ab} dx^a dx^b + r^2 \Omega_{AB} d\theta^A d\theta^B,$$

$$g_{ab} = \text{diag} \left(-e^{2\psi(r)}, \left(1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1} \right),$$

³正確には Jordan frame における Brans-Dicke parameter $\omega_0 = 0$ の Brans-Dicke theory

$(a, b = (t, r), A, B = (\theta, \phi))$ Ω_{AB} は S^2 の metric である。以下 $\mathcal{F}^{-1} = g_{rr}$ とする。Energy-momentum は流体の速度ベクトル u_α を用いて

$$T_{\alpha\beta} = pg_{\alpha\beta} + (p + \rho)u_\alpha u_\beta,$$

と表される。よって方程式は TOV 方程式

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad \frac{d\psi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r^2 \mathcal{F}},$$

となり、保存則は

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{d\psi}{dr}, \quad (3)$$

となる。実はこの保存則は静水圧平衡式

$$\nabla_\alpha p = -(\rho + p)u^\beta \nabla_\beta u_\alpha, \quad (4)$$

に対応している。そして、星の外部は Schwarzschild 解に接続するものとする。

次に tidal field を定義しよう。これは無限遠方のソースが作る曲率を使って次のように定義する⁴。

$$E_{\alpha\beta} = R_{\alpha\gamma\beta\delta} u^\gamma u^\delta, \quad (5)$$

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\gamma\mu\nu} R^{\mu\nu}{}_{\beta\delta} u^\gamma u^\delta. \quad (6)$$

次に背景解に対する線形摂動を定義し、この摂動に対する方程式を導出しよう。metric の摂動を次のように定義する:

$$\bar{g}_{ab} = g_{ab} + p_{ab}, \quad \bar{g}_{aB} = p_{aB},$$

$$\bar{g}_{AB} = r^2 \Omega_{AB} + p_{AB},$$

$$\bar{g}^{ab} = g^{ab} - p^{ab}, \quad \bar{g}^{aB} = -p^{aB}/r^2,$$

$$\bar{g}^{AB} = \Omega^{AB}/r^2 - p^{AB}/r^4.$$

また energy-momentum tensor の摂動を

$$\delta T_{\alpha\beta} = (\delta\rho + \delta p)u_\alpha u_\beta + (\rho + p)(\delta u_\alpha u_\beta + u_\alpha \delta u_\beta)$$

$$+ \delta p g_{\alpha\beta} + p p_{\alpha\beta}, \quad (7)$$

とする。そしてこれらを scalar, vector, tensor har-

⁴上を gravito-electric field, 下を gravito-magnetic - と呼ぶ。

monics で展開し、Regge-Wheeler gauge を取ると、

$$\begin{aligned} p_{ab} &= \sum_{\ell m} h_{ab}^{\ell m}(r) Y^{\ell m}, \quad p_{aB} = \sum_{\ell m} h_a^{\ell m}(r) X_B^{\ell m}, \\ p_{AB} &= \sum_{\ell m} r^2 K^{\ell m}(r) \Omega_{AB} Y^{\ell m}, \\ \delta T_{ab} &= \sum_{\ell m} Q_{ab}^{\ell m} Y^{\ell m}, \quad \delta T_{aB} = \sum_{\ell m} P_a^{\ell m} X_B^{\ell m}, \\ \delta T_{AB} &= \sum_{\ell m} Q_b^{\ell m} \Omega_{AB} Y^{\ell m}. \end{aligned}$$

($Y^{\ell m}$: scalar harmonics, $X_B^{\ell m}$: pseudo-vector harmonics) 以上を用いて、星内外で線形摂動 Einstein 方程式をパリティ別に解こう。

まず外部解のうち、偶パリティ部分に対する独立な方程式は

$$r^2 \mathcal{F} (h_{tt}^{\ell m})'' + 2(r-3M) (h_{tt}^{\ell m})' - \ell(\ell+1) h_{tt}^{\ell m} = 0,$$

(M は星の質量, ' は r 微分) のみであり、他の成分は 0 もしくは $h_{tt}^{\ell m}$ の関数である。この解は (5) の球面調和展開係数 $\mathcal{E}_{\ell m}$ を用いて

$$\begin{aligned} h_{tt}^{\ell m} &= -\frac{2}{\ell(\ell-1)} e_1^{\ell} r^{\ell} \mathcal{E}_{\ell m}, \\ e_1^{\ell} &= \mathcal{F}^2 A_1^{\ell}(r) + 2k_{\ell}^{\text{el}} \left(\frac{R}{r}\right)^{2\ell+1} \mathcal{F}^2 B_1^{\ell}(r), \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} A_1^{\ell} &= H(2-\ell, -\ell; -2\ell; 2M/r), \\ B_1^{\ell} &= H(\ell+1, \ell+3; 2\ell+2; 2M/r) \end{aligned}$$

は超幾何関数である。 k_{ℓ}^{el} が electric tidal Love number (TLN) という定数で tidal field に対する星の重力場の歪みを決定する比例係数であり、重力波から読み取ることのできる観測量である [3]。これを決定することが本章の計算の目的である。

奇パリティ部分も同様で、独立な方程式は

$$r^2 (h_t^{\ell m})'' - \mathcal{F}^{-1}[\ell(\ell+1) - 4M/r] h_t^{\ell m} = 0,$$

でありこの解は

$$\begin{aligned} h_t^{\ell m} &= \frac{2}{3(\ell-1)} b_1^{\ell} r^{\ell+1} \mathcal{B}_{\ell m}, \\ b_1^{\ell} &= A_3^{\ell} - \frac{\ell+1}{\ell} 2k_{\ell}^{\text{mag}} \left(\frac{R}{r}\right)^{2\ell+1} B_3^{\ell}, \\ A_3^{\ell} &= H(-\ell+1, -\ell-2; -2\ell; 2M/r), \\ B_3^{\ell} &= H(\ell-1, \ell+2; 2\ell+2; 2M/r). \end{aligned}$$

$\mathcal{B}_{\ell m}$ は (6) を pseudo-vector harmonocs で展開した際の係数関数であり、 k_{ℓ}^{mag} が magnetic tidal Love number である。

最後に内部解に対する摂動を計算し、表面での接続を考えることで、各 TLN を導く。まず、(7) を metric の摂動で書くことを考える。摂動された速度場 $\bar{u}^{\alpha} = u^{\alpha} + \delta u^{\alpha}$ が timelike Killing vector に比例すること⁵、normalization が不変であることから、

$$\delta u_{\alpha} = e^{-\psi} \left(\frac{1}{2} p_{tt}, p_{tr}, p_{t\theta}, p_{t\phi} \right).$$

また、密度・圧力摂動を

$$\begin{aligned} \delta \rho &= -\rho' r F, \quad \delta p = -p' r F, \\ F &= \delta r / r, \end{aligned}$$

で定義し、(4) に対する摂動

$$(\rho+p)\delta a_{\alpha} + (\delta\rho + \delta p)a_{\alpha} + \partial_{\alpha}\delta p = 0,$$

($a_{\beta} = u^{\alpha} \nabla_{\alpha} u_{\beta}$) に代入し、(3) を用いると、上式の角度成分は

$$\partial_A F = -\frac{\delta a_A}{r\psi'}.$$

δa_{α} は具体的に計算でき、以上より、 F の球面調和展開係数 $F^{\ell m}$ は

$$F^{\ell m} = \frac{1}{2} \frac{e^{-2\psi}}{r\psi'} h_{tt}^{\ell m}, \quad (8)$$

となることが分かる。それでは内部偶パリティ解を構成しよう。energy-momentum の摂動 (7) の偶パリティ部分は

$$\begin{aligned} Q_{tt} &= -e^{2\psi} r \rho' F^{\ell m} - \rho h_{tt}^{\ell m}, \\ Q_{tr} &= \rho h_{tr}^{\ell m}, \\ Q_{rr} &= -\mathcal{F}^{-1} r p' F^{\ell m} + p h_{rr}^{\ell m}, \\ Q_b &= -r^3 p' F^{\ell m} + r^2 p K^{\ell m}. \end{aligned}$$

(8) を代入すると、master 方程式

$$\begin{aligned} r^2 (h_{tt}^{\ell m})'' + r A_1(r) (h_{tt}^{\ell m})' - A_2(r) h_{tt}^{\ell m} &= 0, \\ A_1 &= 2\mathcal{F}^{-1} \left[1 - \frac{3m}{r} - 2\pi r^2 (\rho + 3p) \right], \\ A_2 &= \mathcal{F}^{-1} \left[\ell(\ell+1) - 4\pi r^2 (\rho + p) \left(3 + \frac{d\rho}{dp} \right) \right], \end{aligned}$$

⁵ これは系が静的であることから要請される。

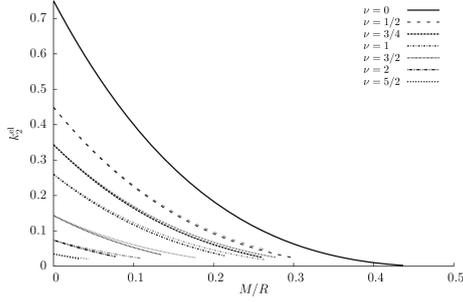


図 1: electric TLN [8]

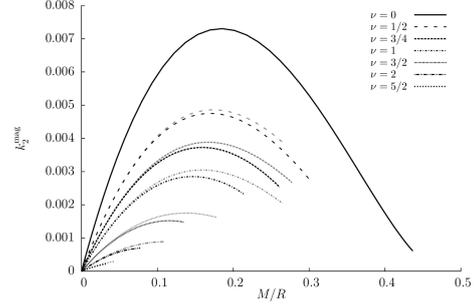


図 2: magnetic TLN [8]

を得る。他成分は $h_{tt}^{\ell m}$ の関数、または 0 である。ここで

$$\eta_\ell(r) = \frac{r (h_{tt}^{\ell m})'}{h_{tt}^{\ell m}},$$

を導入し、master 方程式を書き換えると

$$r\eta'_\ell + \eta_\ell(\eta_\ell - 1) + \mathcal{A}_1\eta_\ell - \mathcal{A}_2 = 0,$$

となる。これを状態方程式 (EOS) とともに数値的に解くことで内部解を得ることができる。

同様の手順により、奇パリティ成分についても master 方程式

$$r\kappa'_\ell + \kappa_\ell(\kappa_\ell - 1) - \mathcal{G}_1\kappa_\ell - \mathcal{G}_2 = 0,$$

$$\kappa_\ell(r) = \frac{r (h_t^{\ell m})'}{h_t^{\ell m}},$$

$$\mathcal{G}_1 = 4\pi r^2 \mathcal{F}^{-1}(\rho + p),$$

$$\mathcal{G}_2 = \mathcal{F}^{-1} \left[\ell(\ell + 1) - \frac{4m}{r} + 8\pi r^2(\rho + p) \right],$$

が求められる。

そして、 $\eta_\ell(r), \kappa_\ell(r)$ が星の表面 $r = R$ で連続であることを要請すると、TLN が決定される:

$$k_\ell^{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{R (A_1^\ell)' - [\eta_\ell(R) - \ell - 4M/(R - 2M)] A_1^\ell}{[\eta_\ell(R) + \ell + 1 - 4M/(R - 2M)] B_1^\ell - R (B_1^\ell)'},$$

$$k_\ell^{\text{mag}} = \frac{\ell}{2(\ell + 1)} \frac{R (A_3^\ell)' - [\kappa_\ell(R) - \ell - 1] A_3^\ell}{R (B_3^\ell)' - [\kappa_\ell(R) + \ell] B_3^\ell}.$$

以上を用いれば、TLN を数値的に求めることができる。これを energy-polytrope 型 EOS

$$p = K\rho^{1+1/\nu}$$

及び mass-polytrope 型 EOS

$$p = K\rho_m^{1+1/\nu}, \quad \rho = \rho_m + \nu p,$$

について計算したものが図 1, 2 である。

4 $f(R)$ 重力における潮汐変形

発表者は前章の計算を $f(R)$ 重力の場合で計算している。この際一般相対論との大きな違いは、Einstein-Hilbert action にはない scalar 自由度がある点である。この自由度は effective には重力を強める作用があることから TLN にも変化が生じるものと思われる。この点を踏まえて、発表では特に TLN に着目して議論したいと考えている。

Reference

- [1] Salvatore Capozziello. Curvature quintessence. *Int. J. Mod. Phys. D*, Vol. 11, pp. 483–492, 2002.
- [2] B. P. Abbott, et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 119, No. 16, p. 161101, 2017.
- [3] Eanna E. Flanagan and Tanja Hinderer. Constraining neutron star tidal Love numbers with gravitational wave detectors. *Phys. Rev. D*, Vol. 77, p. 021502, 2008.
- [4] Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni. $f(R)$ Theories Of Gravity. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 82, pp. 451–497, 2010.
- [5] Sergei D. Odintsov, Diego Sáez-Chillón Gómez, and German S. Sharov. Analyzing the H_0 tension in $F(R)$ gravity models. *Nucl. Phys. B*, Vol. 966, p. 115377, 2021.
- [6] Salvatore Capozziello, Mariafelicia De Laurentis, Ruben Farinelli, and Sergei D. Odintsov. Mass-radius relation for neutron stars in $f(R)$ gravity. *Phys. Rev. D*, Vol. 93, No. 2, p. 023501, 2016.
- [7] Pasquale Feola, Xisco Jimenez Forteza, Salvatore Capozziello, Roberto Cianci, and Stefano Vignolo. Mass-radius relation for neutron stars in $f(R) = R + \alpha R^2$ gravity: A comparison between purely metric and torsion formulations. *Phys. Rev. D*, Vol. 101, No. 4, p. 044037, 2020.
- [8] P. Landry. Tidal deformations of compact bodies in general relativity. 2014.

重字 10

宇宙論と非局所場理論

東京工業大学 理学院物理学系

宮下 優一

宇宙論と非局所場理論

宮下 優一 (東京工業大学 宇宙論研究室)

Abstract

一般相対性理論 (GR) は現代物理における重力の基礎理論として今日受け入れられている。その一方で、紫外 (UV) 領域で予言能力が完全に失われるという open problem もまた存在する。この問題に対し、GR を UV 領域で拡張することで解決を図るのが修正重力理論である。この試みとして、GR の Einstein-Hilbert 作用に無限階の微分項を加えることで理論の修正を図る、非局所場理論がある。この理論では無限階の微分項を考えることによって、高階微分項を取り入れつつ、unitarity を失うことなく理論を拡張することが可能となる。本稿では、Galilean shift symmetry を持つ Galileon 場を非局所場へ拡張する。まず、理論の作用を非局所的にする form factor として指数関数型のものを考える。この理論の propagator が tree-level で ghost-free になることを確認したのち、form factor を反復的に拡張する手続きを与える。更に、この拡張された form factor を重力理論へ適用し、Minkowski 時空周りの線形化重力が持つ propagator が ghost-free となる理論を構成する。最後に、この一般化された重力理論及びその線形化重力から具体的な状況下で重力ポテンシャルを計算し、原点におけるポテンシャルの特異性が解消されていることを確認する。

1 Introduction

Einstein による一般相対性理論 (GR) は多くの観測実験でその予言能力を実証されてきた。最近の例では 2016 年の LIGO/Virgo による重力波の実証が挙げられる。これらの観測事実から、GR は今日広く受け入れられている。その一方で、GR には紫外 (UV) 領域で予言能力が完全に失われるという open problem が存在する。古典論的には、black hole 特異点や宇宙論的な特異点の問題が、量子論的にはくりこみ不可能であるという問題が生じる。そのため、GR は UV 領域で修正されなければならない。その GR の拡張理論として考えられたのが、Stelle による Stelle's gravity である。これは GR を記述する Einstein-Hilbert 作用に 2 次の曲率項を加えた理論である。その具体的な作用は以下で与えられる。

$$S_{\text{Quad}} = \int \frac{d^4x}{16\pi G} \sqrt{-g} [R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}^2] \quad (1)$$

このような高次の微分項は、effective field theory の観点から導入される。この重力理論はくりこみ可能な理論となっていることが確認されている [1, 2]。その一方で、Stelle's gravity は摂動の最低次 (tree-level) で unitarity が破れてしまうことも明らかになった。

これを見るため、この理論の propagator を求める。係数 α, β から定まる $m_0 = \sqrt{3\alpha + \beta}, m_2 = \sqrt{-\beta/2}$ を用いると、propagator は

$$\Pi(p) = \Pi_{\text{GR}}(p) + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{P}^0}{p^2 + m_0^2} - \frac{\mathcal{P}^2}{p^2 + m_2^2} \quad (2)$$

となる。第一項 Π_{GR} は GR の propagator であり、第二項と第三項が新しく現れる。これらに現れる $\mathcal{P}^{(0)}, \mathcal{P}^{(2)}$ は夫々 spin-0, spin-2 のスピン射影演算子であり、第二項と第三項は massive spin-0 と massive spin-2 の自由度に対応した propagator となる。このとき第三項にはマイナスの符号が付いている。一般にこのような自由度は理論の unitarity を破ってしまう、ghost と呼ばれる自由度に相当する。

場の理論において、unitarity は光学定理で記述される。この定理では、S 行列 $S = \mathbb{1} + iT$ が条件

$$S^\dagger S = \mathbb{1} \iff 2 \text{Im} T = T^\dagger T \quad (3)$$

を満たす、と主張する。これは散乱行列の nontrivial part である T 行列の虚部が非負である事を示している。tree-level において、nontrivial part は propagator Π に相当する。従って、この条件は $\text{Im} \Pi \geq 0$ という条件になる。先程出てきた ghost 自由度の prop-

agator で確認すると、 $i\varepsilon$ -prescription を明示して

$$\text{Im} \left\{ \frac{1}{p^2 - i\varepsilon} \right\} = -\pi\delta^{(4)}(p^2) \leq 0 \quad (4)$$

となる (ただし簡単のため massless にした)。理論の unitarity は確率保存則に対応しているため、光学定理の破れは理論の予言性に支障をきたしてしまう。そのため、理論を拡張していくうえで、このような ghost 自由度を回避することが望まれる。

この ghost 自由度を回避しつつ、高階微分を理論の作用に取り入れる方法として注目されているのが **非局所場理論** である。非局所場理論の例として、以下のような scalar 場の Lagrangian が挙げられる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \phi e^{-\gamma(\square/M_s^2)} \square \phi - V(\phi) \quad (5)$$

このとき、関数 γ は整関数 (entire function) とする。この理論の propagator は kinetic term から

$$\Pi(p) = \frac{e^{-\gamma(-p^2/M_s^2)}}{p^2} \quad (6)$$

と計算できるが、整関数の指数関数は零点を持たないため、この propagator は通常の scalar 場と同様、非負の虚部を持つ。そのため、この理論は (少なくとも tree-level では) 光学定理を満たすことが分かる。ここで、Lagrangian に挿入した $e^{-\gamma(\square/M_s^2)}$ の factor を展開すると、Lagrangian は無限階の微分を持つ事がわかる。通常の scalar 場の作用は、各点で定義される場、ひいては Lagrangian を空間全体で足し上げる (=積分) ことで得られる。これは Lagrangian が各点の近傍、**局所的**な領域で定められている事に基づく。これに対し、(5) は無限階の微分によって、局所的でない、**非局所的**な関数形となる。これが”非局所場”理論と呼ばれる所以である。この様な非局所場理論は様々なシナリオで登場する。一例として、string field theory や p -adic string が挙げられる [3]。

2 Galiean shift symmetry

2.1 Nonlocal generalization

Galilean shift symmetry $\phi \rightarrow \phi + b_\mu x^\mu + a$ を非局所場に拡張する。以下の Lagrangian を考える。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \phi F(\square) \square \phi - V(\phi) \quad (7)$$

このとき、微分演算子の form factor F として

$$F(\square) = -M_s^2 \frac{e^{-\square/M_s^2} - 1}{\square} \quad (8)$$

をとる。この理論は Galiean shift symmetry が拡張された、 $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \psi_k(x) (k \in \mathbb{Z})$ となる対称性を持つ。この $\psi_k(x)$ は以下で定義される関数である。

$$\psi_k(x) = \frac{2B}{\sqrt{k}} \sinh \left(\frac{\sqrt{k}}{2B} b_\mu x^\mu \right) + a e^{-(\sqrt{k}/2B) b_\mu x^\mu} \quad (9)$$

これは $k = 0$ の場合として、元の Galilean shift symmetry を持つ。このときの propagator は

$$\Pi(p) = \frac{1}{M_s^2} \frac{1}{e^{p^2/M_s^2} - 1} \quad (10)$$

と計算でき、これは非負の虚部を持つ。よって tree-level の unitarity が確認できる [4]。

この理論が実際に UV 発散を回避できる事を具体例で確認する。Lagrangian が cubic term をもつ

$$\begin{aligned} S = & -\frac{M_s^2}{2} \int d^4x \phi \left(e^{-\square/M_s^2} - 1 \right) \phi \\ & - \lambda \frac{M_s^3}{2} \int d^4x \left(e^{\square/M_s^2} - 1 \right) \phi \frac{\left(e^{\square/M_s^2} - 1 \right)}{\square} \partial_\mu \phi \\ & \times \frac{\left(e^{\square/M_s^2} - 1 \right)}{\square} \partial^\mu \phi \end{aligned} \quad (11)$$

をとってくる。ここから 1-loop self-energy が計算できて、diagram は図 1 のようになる。

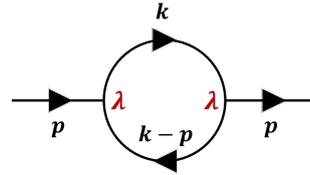


図 1: 1-loop self-energy $\Sigma^{(1)}(p)$ 。 λ は cubic term の結合定数、 k は loop を走る運動量を表す。

diagram から $\Sigma^{(1)}(p)$ を読み取ると、

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1)}(p) = & \lambda^2 M_s^2 \left(e^{-p^2/M_s^2} - 1 \right)^2 \\ & \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\left(e^{-k^2/M_s^2} - 1 \right)^2 \left(e^{-(p-k)^2/M_s^2} - 1 \right)^2}{\left(e^{k^2/M_s^2} - 1 \right) \left(e^{(p-k)^2/M_s^2} - 1 \right)} \\ & \times \left(\frac{k \cdot (p-k)}{k^2(p-k)^2} + \frac{k \cdot p}{k^2 p^2} + \frac{p \cdot (p-k)}{p^2(p-k)^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

と計算できる。ここで UV 側 $k^2 \gg M_s^2$ における loop 積分のふるまいを取り出すと、

$$\Sigma^{(1)}(p) \rightarrow \lambda^2 M_s^2 \left(e^{-p^2/M_s^2} - 1 \right)^2 \times e^{-p^2/M_s^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-2k^2/M_s^2}}{k^2} \quad (13)$$

となる。局所的な理論の場合 ($M_s \rightarrow \infty$) では、被積分関数が $D = -2$ の次数を持つため、UV 発散を起こした。これに対し、(13) では指数関数による suppression が強く効くため、UV 側での発散が回避される。即ち、理論に導入した場の非局所性によって、loop の UV 発散がそもそも起こらない理論となっている。この性質は、非局所場理論を考える元々の motivation に関係する。場の理論では物質の基本単位を無限小の点粒子とする描像で記述されており、この無限小の大きさが UV 発散に繋がっている。これを回避するべく、場の理論の枠組みの中で発散の起こさない理論として非局所場理論が研究されてきた、という背景がある。

2.2 further extentions

この非局所的な scalar 場の理論は form factor について更に一般化することが出来る [5]。非負整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ をとり、次の Lagrangian を考える。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \phi f^{(n)}(\square) \square \phi - V(\phi) \quad (14)$$

ただし、簡単のため nonlocal scale を $M_s \rightarrow 1$ としている。form factor $f^{(n)}(\square)$ については、 $f^{(0)}(z) = e^z$ として、以下の漸化式で反復的に定義する。

$$f^{(n)}(z) = n \frac{f^{(n-1)}(z) - 1}{z} \quad (15)$$

これを漸化式として解くと、以下の表式が得られる。

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{z^n} \left(e^z - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k}{k!} \right) \quad (16)$$

この $n = 1$ の場合が先程の form factor $F(\square)$ に相当する。この具体的な表式を用いると、 $f(z) > 0 (z \in \mathbb{R})$ であることが示せる。ここで、理論の propagator は

$$\Pi(p) = \frac{1}{f^{(n)}(p^2) p^2} \quad (17)$$

となる。これは先程の $f^{(n)} > 0$ から非負の虚部を持ち、tree-level の ghost-freeness を持つ事がわかる。

3 重力理論への応用

次に、拡張された form factor を重力理論へ適用することを考える。2 次の曲率項と form factor を含む、一般的な Lagrangian は以下の形に書き下せる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} \left\{ R + \frac{1}{2} [R F_1(\square) R + R^{\mu\nu} F_2(\square) R_{\mu\nu}] \right\} \quad (18)$$

ここから Minkowski 時空 $\eta_{\mu\nu}$ 周りの線形化重力を $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$ で導出すると、作用 $S^{(2)}$ は

$$S^{(2)} = \frac{1}{4} \int d^4 x \left\{ \frac{1}{2} h_{\mu\nu} f(\square) h^{\mu\nu} - h_{\sigma\mu} f(\square) \partial_\sigma \partial_\nu h^{\mu\nu} + h g(\square) \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} h g(\square) \square h + \frac{1}{2} h^{\lambda\sigma} \frac{f(\square) - g(\square)}{\square} \partial_\lambda \partial_\sigma \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} \right\} \quad (19)$$

と計算できる。このとき便利のため form factor を

$$f(\square) = 1 + \frac{1}{2} F_2(\square) \square \quad (20)$$

$$g(\square) = 1 - 2F_1(\square) \square - \frac{1}{2} F_2(\square) \square \quad (21)$$

で再定義している。この理論の propagator は

$$\Pi(p) = \frac{p^2}{f(p^2)p^2} + \frac{p^0}{(f(p^2) - 3g(p^2))p^2} \quad (22)$$

と計算できる。unitarity のため、この propagator が ghost-free となるように form factor を選ぶ必要がある。そこで、 $f = g = (f^{(n)}(\square) - 1)/\square$ とすると

$$S = \int \frac{d^4 x}{16\pi G} \sqrt{-g} \left\{ R + G_{\mu\nu} \frac{f^{(n)} - 1}{\square} R^{\mu\nu} \right\} \quad (23)$$

$$\Pi = \frac{1}{f^{(n)}(p)} \Pi_{\text{GR}}(p) \quad (24)$$

と作用を決定できる。GR の EH 作用は $F_1 = F_2 = 0 \iff f = g = 1$ の場合に相当する。

最後に、この理論から重力ポテンシャルのふるまいを見ていく。まず、線形化重力における場 $h_{\mu\nu}$ が持つ場の方程式は、Einstein 方程式から

$$f^{(n)}(\square) (\square h_{\mu\nu} - \partial_\sigma \partial_\nu h_\mu^\sigma - \partial_\sigma \partial_\mu h_\nu^\sigma + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma h^{\rho\sigma} + \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \square h) = -2\kappa T_{\mu\nu} \quad (25)$$

となる。これを具体的に解くため、ポテンシャル Φ, Ψ を用いた Newtonian gauge と球対称座標をとる。

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi) dt^2 + (1 + 2\Psi) dr^2 \quad (26)$$

また、方程式に現れる source term として、mass m の static point-like source をとる。

$$T_{\mu\nu} = m\delta_{\mu}^0\delta_{\nu}^0\delta^{(3)}(\mathbf{r}) \quad (27)$$

GR では、この source term は Newton potential 型の重力ポテンシャル $\Phi \sim 1/r$ を生成する。この設定下で、form factor $f^{(n)}$ に対する重力ポテンシャル $\Phi^{(n)}$ の従う Poisson 方程式は以下の形に修正される。

$$f^{(n)}(\nabla^2)\nabla^2\Phi^{(n)}(r) = 4\pi Gm\delta^{(3)}(\mathbf{r}) \quad (28)$$

このとき、form factor を挿入したことによる修正は左辺の nonlocal form factor として現れている。これは IR 側で Newton 重力を再現するといった境界条件から、積分形で解を書き下すことが出来る。

$$\Phi^{(n)} = -\frac{2Gm}{\pi r} \int_0^\infty dk \frac{e^{-k^2} k^{2n-1}}{n! - n\Gamma(n, k^2)} \sin(kr) \quad (29)$$

いま form factor をラベルする n についての極限 $f^{(n)} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ から、解 $\Phi^{(n)}$ は n の増加に従って GR の場合の解に近づくことが分かる。この解を具体的に数値計算すると、図 2 のようになる。

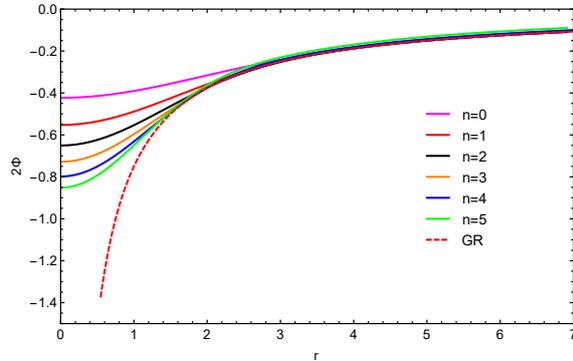


図 2: $\Phi^{(n)}$ と GR の重力ポテンシャルの比較

図 2 を見ると、解 $\Phi^{(n)}(r)$ には GR の場合に見られるような、原点における特異性が存在しない事が確認できる。すなわち、今回構成した作用の線形化重力は原点において singularity-free となっている。

4 Conclusion

Galilean shift symmetry を非局所場の対称性へ拡張した後、更に form factor に関して反復的に拡張

していく手続きを構成した。この拡張された理論に対し tree-level での unitarity を確認した。また、この form factor を重力理論へ適用し、線形化重力における singularity-freeness を確認した。今後の展望として、loop-level における unitarity と full な重力理論における singularity-freeness の確認が必要である。また、一般化された form factor による理論を差別化するための枠組みが求められる。

Acknowledgements

本研究のみならず、常日頃から議論に付き合っ頂き、ご教示くださる東京工業大学宇宙論研究室の皆様、そして現在のコロナ禍において発表の機会を与えてくださった天文・天体物理若手夏の学校運営スタッフの皆様はこの場を借りて深く感謝致します。

Reference

- [1] K. S. Stelle, *Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity*, *Phys. Rev. D* **16** (1977) 953–969.
- [2] K. S. Stelle, *Classical Gravity with Higher Derivatives*, *Gen. Rel. Grav.* **9** (1978) 353–371.
- [3] N. Moeller and B. Zwiebach, *Dynamics with infinitely many time derivatives and rolling tachyons*, *JHEP* **10** (2002) 034, [arXiv:hep-th/0207107](https://arxiv.org/abs/hep-th/0207107).
- [4] L. Buoninfante, G. Lambiase, and M. Yamaguchi, *Nonlocal generalization of Galilean theories and gravity*, *Phys. Rev. D* **100** (2019) 026019, [arXiv:1812.10105 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1812.10105).
- [5] L. Buoninfante, G. Lambiase, Y. Miyashita, W. Takebe, and M. Yamaguchi, *Generalized ghost-free propagators in nonlocal field theories*, *Phys. Rev. D* **101** (2020) 084019, [arXiv:2001.07830 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2001.07830).

重字 11

2次元ブラックホール時空中の偽の真空崩壊

神戸大学 理学研究科物理学専攻
宮地 大河

2次元ブラックホール時空中の偽の真空崩壊

宮地 大河 (神戸大学大学院理学研究科物理学専攻)

Abstract

スカラー場のポテンシャルに縮退していない2つの安定点がある場合を考える。スカラー場の値がエネルギーの高い方の安定点にある状態は偽の真空、低い方の安定点にある状態は真の真空と呼ばれている。スカラー場が偽の真空にある時、量子的な効果によって、スカラー場が偽の真空から真の真空へ遷移する。この遷移現象は偽の真空崩壊と呼ばれている。特に、ブラックホールがある場合、この偽の真空崩壊の確率が大きくなるのが指摘されている。本発表では、ブラックホールから離れた位置で偽の真空崩壊が起こる確率を、背景時空を固定した上で計算した我々の研究を紹介する。ただし簡単のため、背景時空は2次元 Schwarzschild 時空を考えている。数値計算の結果、ブラックホールから離れている場合でも偽の真空崩壊が起こる確率は大きくなるのがわかった。ブラックホールのホライズンでこの確率は最も大きくなり、無限遠では平坦時空の場合と一致する。

1 Introduction

現在、標準模型の多くのパラメータについて測定値が得られている。これらのパラメータの中央値を用いてヒッグス場の有効ポテンシャルを計算すると、図1のような2つの異なる極小点を持つポテンシャルが得られる [1]。エネルギーの高い方の極小点は偽の真空、低い方は真の真空と呼ばれており、偽の真空が現在のヒッグス真空に対応している。ヒッグス場が偽の真空にある時、量子的な効果によって偽の真空から真の真空への遷移が起きる。この遷移は偽の真空崩壊と呼ばれている。したがって、現在のヒッグス真空は不安定であると言える。

偽の真空崩壊が起こると、偽の真空状態にある空間の中で真の真空状態の領域が局所的に出現し、その後膨張する。この真の真空の領域はバブルと呼ばれる。

Minkowski 時空の場合、偽の真空の寿命が宇宙年齢をはるかに超えるため、この不安定性は問題にならない [1]。ところが近年、ブラックホールの存在によって偽の真空の寿命が宇宙年齢を下回ることが指摘された [2]。これは標準模型に対してヒッグス場の不安定性を解消するような修正が必要であることを示唆している。

しかし、先行研究 [2] における偽の真空の寿命の計算には2つの疑問点がある。まず、真空崩壊に伴って

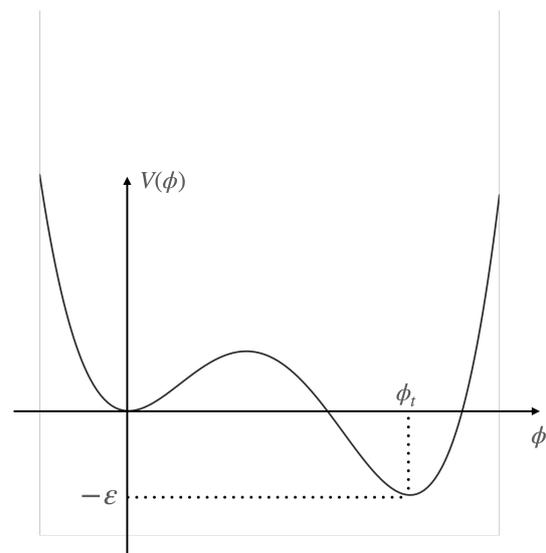


図 1: 偽の真空を持つヒッグス場のポテンシャル

ブラックホールが消失する過程の確率が最も高いことである。このような量子重力的な効果が、今興味のある電弱スケール以降のエネルギースケールで効いてくるとは考えにくい。また、仮にブラックホールが消失しない過程を考えた場合でも、ブラックホールを内包するような環状のバブルが出現している (図 2 左)。Minkowski 時空の場合は球状のバブルが最も出現しやすい。したがって、ブラックホール時空の場合でも、このような環状のバブルが現れる確率は

低いと考えられる。

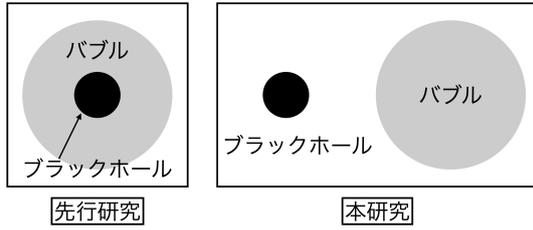


図 2: 先行研究 [2] と我々の研究 [3] の違い

以上の 2 点を踏まえて、本研究 [3] では背景時空を固定した上で、図 2 右のようにブラックホールから離れた位置で偽の真空崩壊が起こる確率を計算した。ただし、4 次元時空の場合は出現する確率が最も高いバブルの形状が分からないため (図 3)、2 次元 Schwarzschild 時空の場合を考えた。今の場合、時空の並進対称性が破れているため、Minkowski 時空の場合と同じ手法 [4] で真空の寿命を計算することができない。そこで、我々はバブルのダイナミクスを記述するような有効作用を導出して、解くべき方程式を単純化した。この手法の下で数値計算した結果、ブラックホールから離れている場合でも、偽の真空崩壊が起こる確率はブラックホールによって大きくなるのが分かった。ブラックホールホライゾンで確率は最も大きくなり、無限遠では平坦時空の場合と一致する。

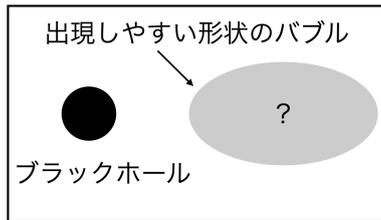


図 3: 4 次元時空の場合、出現しやすい形状のバブルが分からない。

2 Methods

2 次元 Schwarzschild 時空中の実スカラー場を考える。計量は

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)}, \quad f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 G は重力定数、 M はブラックホールの質量である。系の作用は実スカラー場と重力の最小結合で与える。

$$S = \int d^2x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (2)$$

ここでポテンシャル $V(\phi)$ は図 1 のように、 $\phi = 0, \phi_t$ に極小点を持ち、

$$V(0) = 0, V(\phi_t) = -\varepsilon \quad (3)$$

とする。この時、エネルギー的に準安定な $\phi = 0$ の点は偽の真空、エネルギー的に安定な $\phi = \phi_t$ の点は真の真空と呼ばれている。Minkowski 時空の場合 [4] から類推して、偽の真空から真の真空へスカラー場の値が遷移する確率 Γ は次のように評価できると仮定する。

$$\Gamma = A \exp(S_E[\phi_b]) \quad (4)$$

係数 A の計算についてはここでは扱わない。ここで S_E は Euclid 作用で次のように与えられる。

$$S_E = \int d\tau dr \sqrt{g_E} \left[\frac{1}{2} g_E^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) \right] \quad (5)$$

ここで τ は実時間 t を Wick 回転

$$t = -i\tau \quad (6)$$

することで得られる虚時間である。 g_E は計量 (1) にこの Wick 回転をすることで得られる Euclid 計量である。次に ϕ_b は Euclid 作用から得られる運動方程式

$$\frac{\delta S_E}{\delta \phi} = 0 \quad (7)$$

と境界条件

$$\phi|_{\tau=\pm\infty} = 0 \quad (8)$$

$$\phi|_{|\vec{x}|=+\infty} = 0 \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (10)$$

を満たす古典解である。この古典解はバウンスと呼ばれている。Minkowski 時空の場合、 $O(4)$ 対称性の下でこの運動方程式と境界条件を満たす解が存在していることが知られている。また、後で述べる薄壁近似のもとで $S_E[\phi_b]$ を閉じた形で得られる [4]。しか

し、Schwarzschild 時空の場合、空間並進対称性が破れているため解を得ることが難しい。そこで、[5, 6] の手法をブラックホール時空の場合に拡張して、バブルのダイナミクスを記述する有効作用を導出する。導出の詳細は [3] を参照していただくことにし、ここでは導出した有効作用

$$S_{eff} = \int dt \left[\varepsilon(Q(t) - P(t)) - \sigma \sum_{R=P,Q} \sqrt{f(R) - f(R)^{-1} \dot{R}^2} \right] \quad (11)$$

の物理的意味を見ていく。これは実時間の作用であることに注意。ここで、 P, Q は偽の真空と真の真空の境界（バブルの壁）の位置である。また、 ε は偽の真空と真の真空のエネルギー密度の差（図 1）、 σ は

$$\sigma = \int_0^{\phi_t} d\phi \sqrt{2V(\phi)} \quad (12)$$

で与えられるバブルの壁の表面張力である。この有効作用からハミルトニアンを導出し、さらに物理的意味を見やすくするために Minkowski 極限 $f(R) \rightarrow 0$ を取ると、

$$H = -\varepsilon(Q - P) + \sum_{R=P,Q} \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \dot{R}^2}} \quad (13)$$

となる。第 1 項はバブルの内部エネルギー、第 2 項はバブル表面のエネルギーに Lorentz 因子を掛けたものになっている。したがって、有効作用 (11) は確かにバブルのダイナミクスを記述している。

次に、Wick 回転 $t = -i\tau$ で Euclid 化した有効作用から、Hamilton 運動方程式を導出し、バウンスに対応する境界条件

$$\pi_R(t = \tau = 0) = 0, \quad H(t = \tau = 0) = 0 \quad (14)$$

を課して解く。ここで、 π_R は位置 P, Q の共役運動量である。また、 $P(t = \tau = 0)$ はバブルとブラックホールの距離を表すフリーパラメータとして残している。今、運動方程式は常微分方程式になっているので、数値計算で容易に解くことができる。後は得られた解をユークリッド化した有効作用に代入することで、偽の真空崩壊の確率 (4) の指数 $S_E[\phi_b]$ を得られる。

3 Results

数値計算で得られた $S_E[\phi_b]$ をプロットしたのが図 4 である。グラフより、偽の真空崩壊が起こる確率はブラックホールから離れている場合でも大きくなる事が分かる。また、確率はブラックホールホライズンで最大となり、無限遠では Minkowski 時空の場合と一致する。特に、後者の結果は Schwarzschild 時空の漸近平坦性と整合的である。

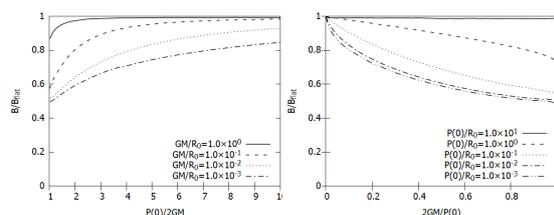


図 4: バウンス解を代入した Euclid 作用 $B = S_E[\phi_b]$ のグラフ。左図はブラックホールとバブルの距離 $P(0)$ に対する依存性、右図はブラックホールの質量 M に対する依存性をプロットしている。縦軸は Minkowski 時空の場合の Euclid 作用 B_{flat} で規格化している。

4 Discussion

今回は 2 次元時空で計算したが、最終的には 4 次元時空の場合で偽の真空崩壊の確率を計算したい。そこで、図 (5) のような円環状のバブルが出現する確率を、4 次元時空の場合で前章と同様の方法を用いて計算した。Introduction でも述べたように、このような円環状のバブルが出現する確率は低いと考えられるが、ブラックホールが確率へ及ぼす影響の傾向を見る上では十分と考えられる。計算の結果、この場合でもブラックホールの存在によって偽の真空崩壊が起こる確率は大きくなった図 6。したがって、最も出現しやすい形状のバブル（図 3）の場合でも同様の結果が得られると期待できる。

5 Conclusion

本研究ではブラックホールから離れた位置で偽の真空崩壊が起こる確率を、2 次元 Schwarzschild 時空を背景時空として計算した。数値計算の結果、ブ

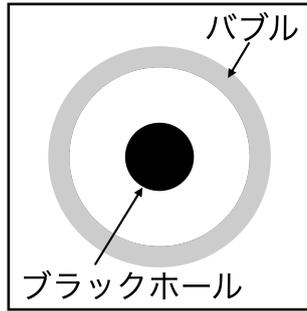


図 5: 円環状のバブル

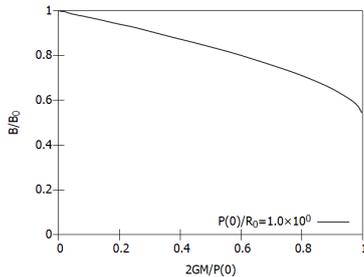


図 6: 円環状のバブルにおける $B = S_E[\phi_b]$ のブラックホール質量への依存性。縦軸は Minkowski 時空の場合の Euclid 作用 B_0 で規格化している。

ブラックホールから離れている場合でも偽の真空崩壊が起こる確率は大きくなるのが分かった。確率はブラックホールホライゾンで最大となり、無限遠方では Minkowski 時空の場合と一致する。4次元時空の場合でも同様の結果になることが期待される。

Acknowledgement

コロナ禍の中、天文・天体物理若手夏の学校を企画・運営して下さった全てのスタッフの皆様により感謝申し上げます。

Reference

- [1] S. Chigusa, T. Moroi, and Y. Shoji, “Decay Rate of Electroweak Vacuum in the Standard Model and Beyond,” *Phys. Rev. D* **97** no. 11, (2018) 116012, [arXiv:1803.03902 \[hep-ph\]](#).
- [2] R. Gregory, I. G. Moss, and B. Withers, “Black holes as bubble nucleation sites,” *JHEP* **03** (2014) 081, [arXiv:1401.0017 \[hep-th\]](#).

- [3] T. Miyachi and J. Soda, “False vacuum decay in a two-dimensional black hole spacetime,” *Phys. Rev. D* **103** no. 8, (2021) 085009, [arXiv:2102.02462 \[gr-qc\]](#).
- [4] S. R. Coleman, “The Fate of the False Vacuum. 1. Semiclassical Theory,” *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2929–2936.
- [5] E. Keski-Vakkuri and P. Kraus, “Tunneling in a time dependent setting,” *Phys. Rev. D* **54** (1996) 7407–7420, [arXiv:hep-th/9604151](#).
- [6] L. Darmé, J. Jaeckel, and M. Lewicki, “Towards the fate of the oscillating false vacuum,” *Phys. Rev. D* **96** no. 5, (2017) 056001, [arXiv:1704.06445 \[hep-ph\]](#).

重字12

回転ブラックホール時空における真空崩壊

名古屋大学 理学研究科素粒子宇宙物理学専攻
齋藤 大生

回転ブラックホール時空中における真空崩壊

齋藤 大生 (名古屋大学理学研究科 QG 研 M2)

Abstract

真空崩壊とは局所安定な状態からより安定な状態への場の遷移を意味する。この研究ではトンネル効果によるその様な遷移、特に 3 次元回転 ブラックホール (BH) 時空中における真空崩壊に着目し解析をした。解析は thin shell 近似の下で Israel junction condition を用いて計算した。その結果、BH の質量が極めて小さくない限り、その存在は真空崩壊を妨げることが分かった。一方、角運動量が増大すると真空崩壊確率は増加した。

1 Introduction

真空崩壊は古典的に安定な状態 (偽真空) からより低エネルギーの状態 (真真空) への場の遷移である。この遷移は例えば量子トンネル効果によって引き起こされる。この遷移を偽真空の場を持つ時空中で考えると、トンネル効果により確率的に真真空を持つ領域 (真空泡) が発生するという描像が考えられる。生じた真空泡が膨張し時空は真真空の場で埋め尽くされ得る。この現象は Coleman らによって 40 年以上前から考えられている [1, 2]。一方、重力と他の場との結合は普遍的なものであり真空崩壊においてもその寄与を考えることは重要である。[3] や [4] ではブラックホール (BH) 時空中の真空崩壊が考えられた。その結果、4 次元 Schwarzschild BH の存在が真空崩壊の確率を引き上げることが分かった (触媒効果)。転移の中には質量や horizon 面積の減少を伴うものも見られた。これは量子重力的な効果に対応するため、基礎物理の側面から関心を集めている。BH が引き起こす真空崩壊の解析は応用研究の側面からも重要である。2012 年に Higgs 粒子が発見された [5, 6] が、現在の宇宙は Higgs ポテンシャルの偽真空にあるという可能性がある。平坦時空中ではこの偽真空の寿命は宇宙年齢より長いと見積もられている [7] が、宇宙に存在する BH により寿命は短くなる [8]。その見積もりから宇宙にある BH の個数や質量を制限する研究も近年なされている。

一方、BH の触媒効果は研究の余地を残している。基礎物理の側面としてはその物理的意味がしばしば議論となっている。応用の観点から言えば、触媒と

なる BH が静的球対称なものに限られていることが指摘される。実際の BH は角運動量を持つため、先行研究の結果を現実の宇宙や素粒子現象に適用するには不十分である。私はこの双方の側面の発展を目指し、BH が角運動量を持っている場合の崩壊の様子を調べることを考えた。4 次元の回転 BH 時空中でいくつかの対称性を持つものとしては定常軸対称な Kerr 時空が存在するが、非球対称性により先行研究と同様の手法で解析することは困難となる。[9] という先行研究はあるが、これもいくつかの仮定の元で解析したものとなっている。そこでこの講演では角運動量を持つトイモデルとして、3 次元 AdS 中の BH 解である BTZ 時空中での真空崩壊を考える。BTZ は定常かつ球対称な回転 BH 時空中であり、[4] と同様の手法で解析できる。

2 Motion of the Bubble Shell

BTZ 時空は (2 + 1) 次元の漸近 AdS 時空中である。AdS 時空というのは負の宇宙項を持つ極大対称時空を指す。BTZ 時空の計量は

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 \left(d\varphi - \frac{4J}{r^2} dt \right)^2 \quad (1)$$

$$f(r) = -8M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{16J^2}{r^2} \quad (2)$$

と書ける。ここで M と J はそれぞれ BH の質量と角運動量、 l は AdS length で宇宙項と $l^{-2} = -\Lambda$ の関係にある。[1] によると、トンネル効果による真空崩

壊の確率は Euclid 化した時空での作用や運動方程式により決定される。そこで本研究も以後、 $t = -it_E$ と時間を変換した Euclid 時空に関して議論する。

この研究で考える真空崩壊では、真空泡が薄いことを仮定する (thin shell 近似)。また崩壊の前後とも上記の BTZ spacetime で与えられる場合を想定する。その場合時空の球対称性から、転移で生じる真空泡の境界が球面 $r = R(t)$ であると仮定できる。この面上で Israel junction condition [10] を課すことで Euclid 時空での運動方程式を見る。shell の外側にある転移前の時空に関して +、内側の (転移後の) 時空については - と書くことでその物理量をラベルする。ここで junction condition は 1st junction condition

$$[h_{ab}]_{\pm} = 0 \quad (3)$$

と 2nd junction condition

$$[K_{ab}]_{\pm} = -8\pi (S_{ab} - h_{ab}S) \quad (4)$$

からなる。ここで h_{ab} と K_{ab} 、 S_{ab} はそれぞれ shell の induced metric および外的曲率、shell 上の energy-momentum tensor であり、本研究では tension σ のみを持つと仮定した。またここで簡略化のため記号 $[A]_{\pm} \equiv A_+ - A_-$ を定義した。

shell 上の観測者の proper time を τ とし 2nd junction condition を課すと、 (τ, ϕ) から転移前後で角運動量が保存することが分かる。 (ϕ, ϕ) 成分から shell の運動は

$$-\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \bar{\sigma}^2 R^2 - \bar{f} + \frac{(f_+ - f_-)^2}{16\bar{\sigma}^2 R^2} \equiv 2V(R) \quad (5)$$

という 1 次元ポテンシャル問題の形になることが分かる。ここで $\bar{\sigma} = 4\pi\sigma$, $\bar{A} = \frac{A_+ + A_-}{2}$ という記号を定義した。

$V(R)$ は下図 1 の様になる。shell は Euclid 時空で $V(R) < 0$ の領域を振動し、 $\dot{R} = 0$ の点でトンネリングを起こし発生する。 $\dot{R} = 0$ の解が 1 つの時、shell は転移後も静止する。これを static shell と呼ぶ。

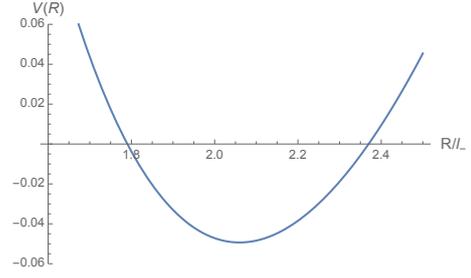


図 1: Euclid 時空でのポテンシャルの例。

3 Euclidean Action and Decay Rate

単位時間・単位体積あたりの真空崩壊率 Γ は

$$\Gamma \propto e^{-\mathcal{B}/\hbar} \quad (6)$$

で与えられる。ここで $\mathcal{B} \equiv S_E - S_{E0}$ であり、shell のある系の Euclidean action S_E と偽真空の Euclidean action S_{E0} の差である。計算すると

$$\mathcal{B} = \frac{\pi}{2}(r_{\mathcal{H}_+} - r_{\mathcal{H}_-}) - 2 \oint d\tau \left[\left(M_+ - \frac{4J^2}{R^2} \right) \frac{dt_{E+}}{d\tau} - \left(M_- - \frac{4J^2}{R^2} \right) \frac{dt_{E-}}{d\tau} \right] \quad (7)$$

を得る。積分は Euclid 時空の shell の運動周期に渡って行う。ここで $r_{\mathcal{H}_{\pm}}$ は転移前後の BH の horizon 半径である。horizon 半径は方程式 $f_E(r) = 0$ の解で与えられ、

$$r_{\mathcal{H}_{\pm}} = \sqrt{4M_{\pm}l_{\pm}^2 + 4l_{\pm}\sqrt{M_{\pm}^2l_{\pm}^2 - J^2}} \quad (8)$$

と書ける。この講演では宇宙項、BH 質量、角運動量といった種々のパラメーターによる \mathcal{B} の変化を計算することで真空崩壊の確率を評価する。比較対象として、同じ宇宙項を持つ AdS 時空間の遷移に関する作用の差 \mathcal{B}_{CDL} を計算し、その比を評価する。 $\mathcal{B}/\mathcal{B}_{CDL} < 1$ であれば、BH のある時空の方が真空崩壊の確率が高いと言える。

4 Results

前 section で計算した B の結果を与える。特に角運動量に着目するが、規格化された量として spin $\tilde{a}_+ \equiv J/(M_+l_+)$ を定義する。これは 1 を上限とする値である。また、結果を表す際に無次元パラメーター $L_+ = l_+/l_-$ と $s = \sigma l_-$ を定義した。

4.1 $\tilde{a}_+ = 0$ case

まずは角運動量をゼロとし、転移後の質量を変えた時の B の変化を考える。ポテンシャルの M_- 依存性は図 2 のようになる。 M_- を減少させていくと $V(R) = 0$ を満たす 2 点間の距離が縮まり、また軸の位置が左にずれていく。

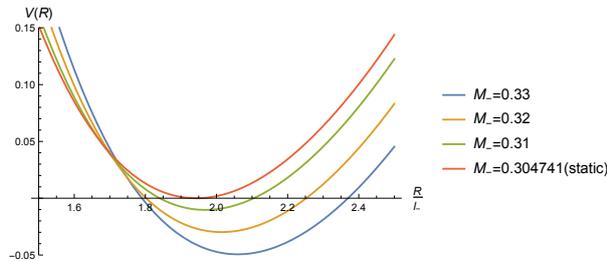


図 2: ポテンシャルの M_- 依存性

B/B_{CDL} の M_- 依存性は図 3 の様になった。 $B/B_{CDL} > 1$ であることが見て取れる。また、 M_- の左端は static shell に対応し、そこで shell が生じる確率が最大となることがわかる。

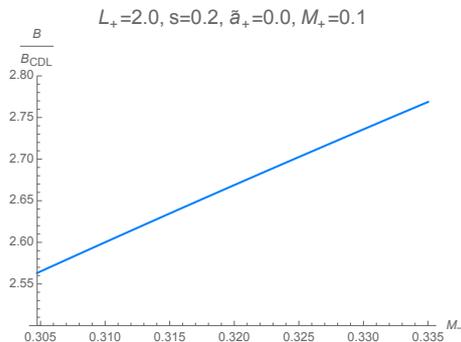


図 3: B の M_+ 依存性 ($\tilde{a}_+ = 0$)

そこで、宇宙項と shell の tension を固定し、static shell を与える B/B_{CDL} を計算すると図 4 の様になった。崩壊率は M_- に対して単調減少し、 M_- が小さい領域では $B/B_{CDL} < 1$ となることが分かる。

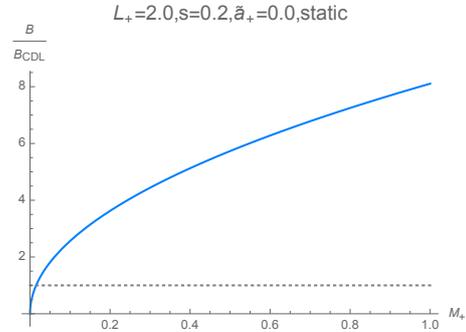


図 4: static shell を与える B の M_+ 依存性

4.2 $\tilde{a}_+ \neq 0$ case

角運動量を有限とした結果を与える。図 5 を見ると、やはり $B/B_{CDL} > 1$ で static shell が生じる確率が最大となることがわかる。

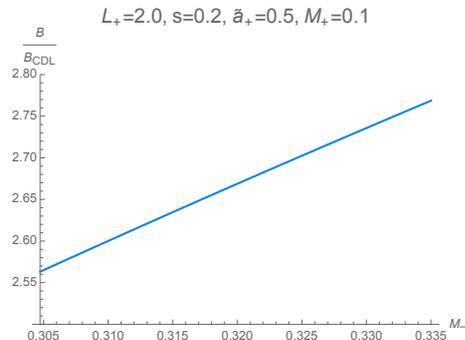
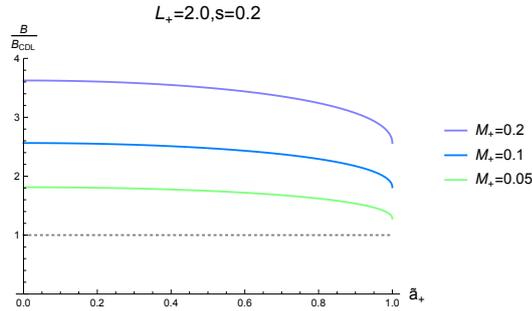


図 5: B の M_+ 依存性 ($\tilde{a}_+ \neq 0$)

そこで、宇宙項と shell の tension を固定し、static shell を与える B/B_{CDL} の角運動量依存性を計算すると図 6 の様になった。崩壊率は \tilde{a}_+ に対して単調増加することことが分かる。

図 6: static shell を与える B の角運動量依存性

5 Discussion and Conclusion

B/B_{CDL} の値は 1 を上回ることが多くなった。これは BH の存在が真空崩壊を妨げることを意味し、[4, 11] といった先行研究の結果と異なる。この違いが 3 次元の特殊性なのか BTZ 時空固有のものなのかは分かっていない。 \tilde{a}_+ や M_+ を固定し M_- を変化させたいずれの場合も、 M_- を下げるほど decay rate は上がり、static shell の形成が支配的となった。これは [4] や [11] の結果と同一である

\tilde{a}_+ が有限の場合であっても static shell が最も生じやすい結果となった。決まった M_+ に関する static shell を考え \tilde{a}_+ を増していくと崩壊率は単調に増加した。このことから、BTZ 時空において角運動量の存在は真空崩壊を促す効果を持つと考えられる。一方、Kerr 時空に関する先行研究 [9] の結果では角運動量の増加に伴って崩壊率は単調に減少していた。[9] は shell の形状を仮定し、非等方応力を与えるという前提の上で計算していた。そこでより詳細な比較のために Kerr においても tension のみを energy-momentum の成分として持つ shell が生じる描像のもと shell の形状を方程式を解いて決定し、角運動量の存在が崩壊率にどう影響するかを見ることが今後の課題である。次元依存性という側面では、5 次元 Myers-Perry 時空などの高次元 BH 時空での解析も将来の研究課題に挙げられる。

Acknowledgement

本講演は柳哲文講師との研究に基づいたものです。日頃の議論、ご指導に対し感謝申し上げます。

Reference

- [1] Sidney R. Coleman. The Fate of the False Vacuum. 1. Semiclassical Theory. *Phys. Rev. D*, 15:2929–2936, 1977. [Erratum: *Phys.Rev.D* 16, 1248 (1977)].
- [2] Curtis G. Callan, Jr. and Sidney R. Coleman. The Fate of the False Vacuum. 2. First Quantum Corrections. *Phys. Rev. D*, 16:1762–1768, 1977.
- [3] W. A. Hiscock. CAN BLACK HOLES NUCLEATE VACUUM PHASE TRANSITIONS? *Phys. Rev. D*, 35:1161–1170, 1987.
- [4] Ruth Gregory, Ian G. Moss, and Benjamin Withers. Black holes as bubble nucleation sites. *JHEP*, 03:081, 2014.
- [5] Georges Aad et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett. B*, 716:1–29, 2012.
- [6] Serguei Chatrchyan et al. Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC. *Phys. Lett. B*, 716:30–61, 2012.
- [7] So Chigusa, Takeo Moroi, and Yutaro Shoji. Decay Rate of Electroweak Vacuum in the Standard Model and Beyond. *Phys. Rev. D*, 97(11):116012, 2018.
- [8] Philipp Burda, Ruth Gregory, and Ian Moss. Gravity and the stability of the Higgs vacuum. *Phys. Rev. Lett.*, 115:071303, 2015.
- [9] Naritaka Oshita, Kazushige Ueda, and Masahide Yamaguchi. Vacuum decays around spinning black holes. *JHEP*, 01:015, 2020. [Erratum: *JHEP* 10, 122 (2020)].
- [10] W. Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cim. B*, 44S10:1, 1966. [Erratum: *Nuovo Cim.B* 48, 463 (1967)].
- [11] Philipp Burda, Ruth Gregory, and Ian Moss. Vacuum metastability with black holes. *JHEP*, 08:114, 2015.

重字 13

Stable cosmology in generalized massive gravity

立教大学 理学研究科物理学専攻
高寺 俊希

未提出

重字 14

ひも模型と揺らぎのスペクトル解析

九州大学 理学府物理学専攻
七條 友哉

ひも模型と揺らぎのスペクトル解析 -光学機械振動子の量子制御に向けて-

七條 友哉 (九州大学大学院 理学府 物理学専攻)

Abstract

自然界には 4 つの力が存在し、電磁気力、強い力および弱い力は量子力学に従うが、重力が量子力学に従っていることが検証されていない。もし重力が量子的であるならば、重力の量子力学的重ね合わせ状態が観測できるはずである。重力は他の力に比べ非常に弱い力であり、重力の効果を大きくするために物体を巨視化してしまうと環境との相互作用により、物体を量子力学的状態に保つことが難しくなる。光学機械振動子は、重力波の検出にも応用されている、光共振器と振動子とを組み合わせた力学系で、[1] では重力の量子性の検証に向けて、7mg の振動子についてエネルギー散逸を大きく低減することに成功している。これにより、従来の限界より 5 桁も重い巨視的振動子の量子制御が可能にするものである。この研究では、光共振器の片側の鏡を固定し、もう片側の鏡をひもでつるした振動子とする光学機械振動子の理論模型を構築し、その量子制御に向けた理論解析を行った。ひもの影響を考えていない文献 [2] の解析を応用し、本研究ではひもの影響を含めて鏡の振動子の揺らぎを考える。初めに、ひもを考慮した光学機械振動子の模型を導入し、ひもの熱的な揺らぎが、ひもの端についた鏡振動子の揺らぎにどう影響するのか明らかにする。鏡の揺らぎを考えるために、[2] の研究を応用し、定常状態における鏡振動子の揺らぎの 2 乗期待値を計算し、揺らぎの振幅のスペクトル解析を行った。また、鏡の揺らぎがひもの影響を考えることでどのように変化したかについて議論する。

1 Introduction

自然界に存在する 4 つの力の内、重力のみが量子力学に従うことが示されていない。重力の理論である一般相対性理論と量子力学の統合が、プランクスケールという極微のスケールで起こるのではないかと考えられている。このような小さな世界の現象を探るには、実験のエネルギースケールを大きくするか、高精度の実験を行うかの二つの方法がある。プランクスケールを見るためには LHC(大型ハドロン衝突器) より 15 桁以上の大きさの加速器が必要となり現実的ではない。そのため、高精度の実験を追求していく。

プランクスケールで起きる観測できない事象が卓上実験で観測できる現象に影響を及ぼすのではないかと考え、アスペルマイヤーらは実験を行っている。アスペルマイヤーらの実験はファインマンが 1957 年に思考実験として提唱したものに基づいており、もし重力が量子現象であるなら、同時に 2 つの場所に

存在する重ね合わせになった粒子は 2 つの異なる重力場を生み出すだろうとファインマンは主張した。もしも時空の重ね合わせが壊れずに保たれ、試験質量が重ね合わせになった重力場と実際に相互作用したら、それは重力の重ね合わせが試験質量と「量子もつれ」を生み出し、重力の量子性の証拠となるだろう。

重力は非常に小さな力であるため、物体を巨視化する必要がある。一方で、物体を巨視化してしまうと逆に量子揺らぎを作ることが困難になってしまう。量子制御が可能なほど小さくかつ、重力源として使える程度に大きな物体として中間なミリグラム程度の振動子に着目した。

重力波干渉計において振動子の量子制御がすでに行われているため、同じように振動子を用いることができるだろうと考え用いている。一般に重力波干渉計の振動子はひもによって吊るされており、端についている鏡が 4kg と非常に重く、ひもの熱的な揺らぎが効かないと考え、ひもから受ける影響を無視し

て考える。しかし、端についている鏡の質量が 7mg という小さいものだと、ひもの熱的な揺らぎが無視できないのではないかと考えた。そのため、ひもの揺らぎまで含めた理論が必要となる。

2 Methods

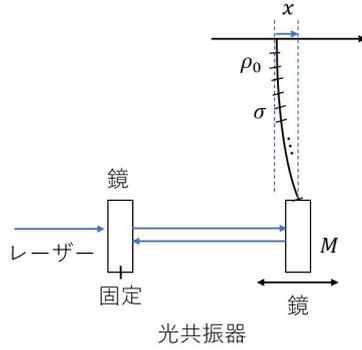


図 1: 説明

図 1 に示すように二つの鏡を用意する。左側の鏡を動かさないように固定し、質量 M の右側の鏡は天井から吊り下げられている。左右の鏡内部に光子を閉じ込めることを考える (光共振器)。光子が鏡にぶつかる際に、光子の運動量の一部を鏡が受け取ることで右側の鏡が振動する。また、光子は鏡で完全に反射するわけではなく、一部は鏡を透過するが、左の鏡の外からレーザーを当てることにより、減少していく光子を補うものとする。右側の鏡について、天井からひもで吊るされており、ひも自身も振動することを考える。簡単のためひもの運動は 1 次元の運動をし、鏡と同じ軸上を動くものとする。また、ひも上に座標 σ を取り、座標 σ におけるひもの位置を $X(t, \sigma)$ と置いておく。このとき鏡の位置を $x(t) = X(t, \sigma = l)$ とする。また、ひもの線密度を ρ_0 、長さを l 、ひもにかかる張力を $T(\sigma)$ で表す。ここで、ひもと鏡を一体として考えると、線密度は

$$\rho(\sigma) = \rho_0 + M\delta(\sigma - l)$$

で表すことができる。このとき系全体のハミルトニアンは次のように表せる。(以降では自然単位系を取

り、 $\hbar = 1$ とする。)

$$H = \int_0^l d\sigma \left[\frac{1}{2\rho(\sigma)} \Pi^2 + \frac{T(\sigma)}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 - G_0 a^\dagger a X(\sigma) \delta(\sigma - l) \right] + \omega_c a^\dagger a + iE(a^\dagger e^{-i\omega_0 t} - a e^{i\omega_0 t}) \quad (1)$$

ただし、 Π はひもの位置 X に対して共役な運動量とする。また、交換関係は $[X(\sigma), \Pi(\sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma')$ を満たす。ハミルトニアンについて、第 1 項はひもとひもの端点についた鏡の運動エネルギーの和であり、第 2 項はポテンシャルに相当する ($T(\sigma)$ はひもの張力)。第 3 項は鏡と光子のカップリングを表しており、 $G_0 = \frac{\omega_c}{L} \sqrt{\frac{1}{M\omega_m}}$ は鏡と光子の結合定数である (ω_c : 光子の周波数、 L 鏡間の距離、 ω_m : 調和振動子の周波数)。第 4 項は光子のエネルギーを表しており、 a は $[a, a^\dagger] = 1$ を満たす消滅演算子である。最後の項は周波数 ω_0 のレーザーによって駆動される入力を記述し、 E は入力レーザーの出力 $|P|$ に関連しており、 $|E| = \sqrt{2P\kappa/\omega_0}$ である (κ は光子の散逸率)。

運動方程式は

$$\begin{aligned} \ddot{X}(\sigma) &= \frac{T}{\rho_0} \frac{\partial^2 X(\sigma)}{\partial \sigma^2} \\ M\ddot{x} &= -T \frac{\partial X}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=l} - \eta \dot{x} + G_0 a^\dagger a + \xi \\ \dot{a} &= -(\kappa + i(\omega_c - \omega_0))a + iG_0 a x + E + \sqrt{2\kappa} a^{in} \end{aligned}$$

鏡の運動方程式には、鏡の速度に比例する抵抗力 (比例係数 η) とブラウン運動による確率的な力 ξ (時間平均すると 0) を導入した。揺動力 ξ は次の揺動散逸関係を満たすと仮定する。

$$\begin{aligned} \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= \eta \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')}\omega \\ &\quad \left[\coth \left(\frac{\omega}{2k_B T} \right) + 1 \right] \end{aligned}$$

ここで、 k_B はボルツマン定数、 T は環境の温度である。鏡内の光子の振幅は、散逸率 κ で減少し、真空輻射入力ノイズ $a^{in}(t)$ により受ける影響を取り入れた。ここで、 $a^{in}(t)$ の相関関数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \langle a^{in}(t)a^{in,\dagger}(t') \rangle &= [N(\omega_c) + 1]\delta(t - t') \\ \langle a^{in,\dagger}(t)a^{in}(t') \rangle &= N(\omega_c)\delta(t - t') \end{aligned}$$

$N(\omega_c) = (\exp\{\omega_c/k_B T\} - 1)^{-1}$ は平衡状態の平均熱的光子の数である。光の周波数では $\omega_c/k_B T \gg 1$ より $N(\omega_c) \approx 0$ となる。

次に、 $X = \bar{X} + \delta X, x = \bar{x} + \delta x, a = \alpha + \delta a$ の摂動を考える。(ただし、 \bar{X}, \bar{x}, α はそれぞれの定常状態を表す。) まず、定常解は次のように表される。

$$\bar{X} = \frac{G_0 |\alpha|^2}{T} \sigma$$

$$\alpha = \frac{E}{\kappa + i(\omega_c - \omega_0 - \frac{G_0 |\alpha|^2}{T} l)}$$

次に、1 次摂動の運動方程式は次のように与えられる。 ($|\bar{\alpha}| \gg 1$)

$$\delta \ddot{X} = \frac{T}{\rho_0} \frac{\partial^2 \delta X}{\partial \sigma^2} \quad (2)$$

$$M \delta \ddot{x} = -T \frac{\partial \delta X}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=l} - \eta \delta \dot{x} + G \delta A + \xi \quad (3)$$

$$\delta \dot{A} = -\kappa \delta A + \Delta \delta B + \sqrt{2\kappa} X^{in} \quad (4)$$

$$\delta \dot{B} = -\kappa \delta B - \Delta \delta A + G \delta x + \sqrt{2\kappa} Y^{in} \quad (5)$$

ここで、直交するキャビティ場を $\delta A \equiv (\delta a + \delta a^\dagger)/\sqrt{2}, \delta B \equiv (\delta a - \delta a^\dagger)/i\sqrt{2}$ とし、対応するエルミート入力雑音演算子を $\delta A^{in} \equiv (\delta a^{in} + \delta a^{in,\dagger})/\sqrt{2}, \delta B^{in} \equiv (\delta a^{in} - \delta a^{in,\dagger})/i\sqrt{2}$ と定義した。また、振動子と光の有効なカップリングは次のように表される。

$$G = \sqrt{2} G_0 \alpha$$

鏡の位置の分散 $\langle \delta x^2 \rangle$ は式 (2)~(5) を周波数空間で解き、対応する揺らぎのスペクトルを積分することで得ることができる。

$$\langle \delta x^2 \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} S_x^\Delta(\omega) \quad (6)$$

$$S_x^\Delta(\omega) = |\chi_{\text{eff}}^\Delta(\omega)|^2 [S_{th}(\omega) + S_{rp}(\omega, \Delta)] \quad (7)$$

$$S_{th}(\omega) = \eta \omega \coth\left(\frac{\omega}{2k_B T}\right) \quad (8)$$

$$S_{rp}(\omega, \Delta) = \frac{G^2 \kappa [\Delta^2 + \kappa^2 + \omega^2]}{[\kappa^2 + (\omega - \Delta)^2][\kappa^2 + (\omega + \Delta)^2]} \quad (9)$$

$$\chi_{\text{eff}}^\Delta(\omega) = \frac{1}{M} [-\omega^2 - i\omega \frac{\eta}{M} - \frac{G^2 \Delta}{M\{\kappa - i\omega\}^2 + \Delta^2}] + \frac{T}{M} \sqrt{\frac{\rho_0}{T}} \omega \cot\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{T}} \omega l\right) \quad (10)$$

ここで、 $S_{th}(\omega)$ は熱的な雑音のスペクトル、 $S_{rp}(\omega, \Delta)$ は輻射圧雑音のスペクトル、そして、 $\chi_{\text{eff}}^\Delta(\omega)$ は輻射圧によって修正された振動子の有効感受率である。

また、ひもの影響を考えない場合については式 (16) の 4 項目について $\sqrt{\frac{\rho_0}{T}} \omega l \ll 1$ の範囲では、 $\cot\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{T}} \omega l\right) \approx \sqrt{\frac{T}{\rho_0}} \frac{1}{\omega l}$ の近似が成り立ち、 $\frac{T}{M} \sqrt{\frac{\rho_0}{T}} \omega \cot\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{T}} \omega l\right) \approx \frac{T}{Ml} = \frac{g}{l} \equiv \omega_m^2$ となり、 ω_m はひもの影響を考えない際の振り子の周波数である (g は重力加速度)。この極限では、鏡の位置の分散 $\langle \delta x^2 \rangle_p$ は、次のようになる

$$\langle \delta x^2 \rangle_p = \int \frac{d\omega}{2\pi} S_{xp}^\Delta(\omega) \quad (11)$$

$$S_{xp}^\Delta(\omega) = |\chi_{\text{effp}}^\Delta(\omega)|^2 [S_{th}(\omega) + S_{rp}(\omega, \Delta)] \quad (12)$$

$$S_{th}(\omega) = \eta \omega \coth\left(\frac{\omega}{2k_B T}\right) \quad (13)$$

$$S_{rp}(\omega, \Delta) = \frac{G^2 \kappa [\Delta^2 + \kappa^2 + \omega^2]}{[\kappa^2 + (\omega - \Delta)^2][\kappa^2 + (\omega + \Delta)^2]} \quad (14)$$

$$\chi_{\text{effp}}^\Delta(\omega) = \frac{1}{M} [-\omega^2 - i\omega \frac{\eta}{M} - \frac{G^2 \Delta}{M\{\kappa - i\omega\}^2 + \Delta^2}] + \omega_m^2 \quad (15)$$

3 Results & Discussion

パラメータの値については、[3] の実験を参考にし、次に示す。

$$M = 7 \times 10^{-6} \text{ kg}, \quad T = 7 \times 10^{-6} \times 9.8 \text{ kg m/s}^2,$$

$$\eta = 4.83 \times 10^{-5} \text{ Hz} \cdot \text{kg}, \quad \kappa = 2\pi \times 8.2 \times 10^5 \text{ Hz},$$

$$-\Delta = 0.0292\kappa, |G| = 2\pi \times 4.5 \times 10^2 (\text{kg Hz})^{\frac{1}{2}},$$

$$\rho_0 = 2650 \times \pi \times (0.5 \times 10^{-6})^2 \text{ kg/m}, \quad l = 0.01 \text{ m},$$

$$k_B T / \hbar = 10^{11} \text{ Hz}, \omega_m = 31.3 \text{ Hz}$$

以上のパラメータを用いて、鏡の変位の揺らぎの 2 乗期待値 $\langle \delta x \rangle$ を周波数 ω の関数として書くと、図 2 のようになる。図 2 より、光子と鏡のカップリングがある場合には、鏡の揺らぎの周波数が大きい方にシフトすることが分かった。また、 $\sqrt{\frac{\rho_0}{T}} \omega l \ll 1$ の範囲において、 $\langle \delta x^2 \rangle, \langle \delta x^2 \rangle_p$ を比較したものを図 3 に示す。今回用いたパラメータの範囲ではひもの揺らぎによる影響が鏡の揺らぎには大きく影響しないことが分かった。

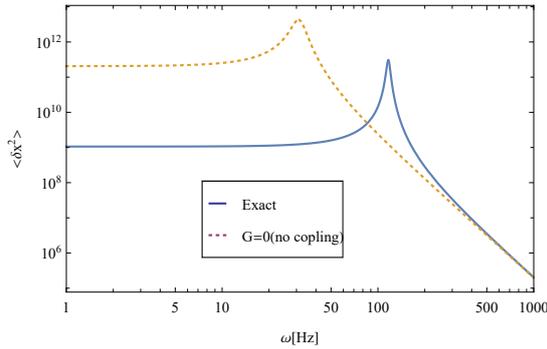


図 2: $T_0 = 300\text{K}$ の際、鏡の変位の揺らぎの 2 乗期待値 $\langle \delta x \rangle$ のスペクトル解析。G=0 の時は、光子が鏡と相互作用せず、鏡は光子からの輻射圧を受けない。

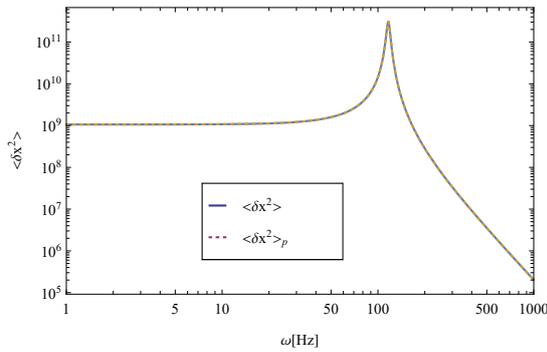


図 3: $T_0 = 300\text{K}$ の際、鏡の変位の揺らぎの 2 乗期待値 $\langle \delta x \rangle$ のスペクトル解析。 $\langle \delta x^2 \rangle_p$ はひもの影響がなく、鏡が振り子運動を行う際の揺らぎである。

4 Conclusion

式 (2)~(5) にてひも模型の量子ランジュバン方程式を導き、式 (6)~(10) にてひも模型における定常状態の揺らぎのスペクトルを計算した。今回用いたパラメータではひも模型による影響が無視できることが分かった。

今後の課題としては、今回は周波数が低い領域の実験のパラメータを取り扱ったため、周波数が高い領域の実験のパラメータを用いてひもの影響が見られるのかを確認する必要がある。このひも模型をより実験に近い状況である beam model に拡張する必要がある。また、量子制御のために平均二乗誤差を最小化する Wiener filter と呼ばれるフィルタを導入

ことも必要である。

Reference

1. Seth B. Cataño-Lopez , Jordy G. Santiago-Condori, Keiichi Edamatsu, & Nobuyuki Matsumoto, Phys. Rev. Lett. 124, 221102 (2020)
2. C. Genes, D. Vitali, P. Tombesi, S. Gigan, & M. Aspelmeyer, Phys. Rev. A 77, 033804 (2008), arXiv:0705.1728
3. Nobuyuki Matsumoto & Naoki Yamamoto, arXiv:2008.10848 (2021)

重字 15

光学振動子系における非ガウス状態の量子もつれ

九州大学 理学府物理学専攻
三木 大輔

光学振動子系における非ガウス状態の量子もつれ

三木 大輔 (九州大学大学院 理学府)

Abstract

重力が量子力学に従うかを検証するために、重力により生じる量子もつれに着目したモデルがいくつか提案されている。これらのモデルでは、2つの物体を重ね合わせに用意する必要があるが、系の状態は量子もつれの一般的な評価が難しい非ガウス状態になっている。私たちは非ガウス性を特徴づけるキュムラントをもとに、非ガウス状態の量子もつれの判定法を構築する。また、この判定法を光学振動子系に適用することにより、非ガウス性由来の量子もつれを検出できることを示す。一方、非ガウス性が大きくなると、この判定法では量子もつれを検出することが難しくなることも説明する。

1 Introduction

重力を記述する一般相対性理論と量子力学の統一のために、様々な研究が盛んに行われてきたが、確立した理論は存在しない。これは重力の量子的な振る舞いを検証する実験の欠如が要因となっている。その一方で、重力が量子力学に従うことが自明ではないとの指摘もあり [1]、量子力学の原理から重力の量子性に関する議論も行われている。特に近年の量子技術の発展を契機として、重ね合わせの原理の観点から重力の量子性を説明する実験モデルが提案されている [2, 3]。このモデルでは、2つの重ね合わせにある物体間にニュートン重力によって生成される量子もつれに着目する。ここで、量子もつれは量子力学で知られる非局所的な相関であり、量子情報理論から古典的には生成できないことが知られている。従って、重力による量子もつれの生成は重力が量子力学に従っていることを意味する。

巨視的な重ね合わせを実現し、重力の量子性を検証するためのモデルとして、光学振動子系が注目されている [4, 5]。このモデルでは、質量を持つ鏡がキャビティ内の光子と相互作用することにより重ね合わせ状態となる。この時、鏡の状態は波動関数がガウス型でない非ガウス状態となっている。ガウス状態の量子もつれはよく研究されており、共分散行列により特徴づけられるが、非ガウス状態の量子もつれを正確に捕らえることは非常に難しい。その一方で、光学振動子系に限らず、重力による量子もつれから量子性を検証するためには、2つの物体をそれぞれ重

ね合わせ状態にする必要があり、その状態は非ガウス状態になっている。そのため、非ガウス状態の量子もつれは重力の量子性の検証において、重要な役割を持つ。

本研究 [7] では、非ガウス性を特徴づけるキュムラントに着目し、非ガウス状態に対しても適用できる量子もつれの条件を導出する。また、この条件を光学振動子系に適用し、2つの重力相互作用する鏡間の量子もつれの評価を行う。この時、共分散行列では捕らえることのできない量子もつれをキュムラントに基づく条件では検出できることを示す。さらに、この条件では非ガウス性が大きくなると、量子もつれの検出が難しいことも議論する。

2 Methods

2.1 量子もつれの評価法

この節では、キュムラントに基づく量子もつれの評価法について説明する。一般の状態に対する量子もつれの評価法として、PPT 条件が知られている [6]。これは状態を表す密度行列 ρ に対して

$$\text{Tr}[\rho^{pt} \hat{f}^\dagger \hat{f}] \geq 0, \quad (1)$$

を破るような演算子 \hat{f} が存在するならば、量子もつれが存在するという条件である。ここで、 ρ^{pt} は密度行列について一方の系のみ転置した行列を表す。

ここでは、正準演算子 $\hat{r} = (\hat{q}_a, \hat{p}_a, \hat{q}_b, \hat{p}_b)$ で表される系 A と系 B について考える。これらの正準演

算子は

$$[\hat{r}, \hat{r}^T] = i\Omega, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

の交換関係を満たす。ここで、キュムラントに基づく非ガウス状態の量子もつれの評価法を得るため、演算子 \hat{f} を

$$\hat{f} = z_i \tilde{\Delta} \hat{r}_i + \zeta_{ij} \tilde{\Delta} \hat{r}_i \tilde{\Delta} \hat{r}_j, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (3)$$

と選ぶ。ここで、 $\tilde{\Delta} \hat{r} = \hat{r} - \text{Tr}[\rho^{pt} \hat{r}]$ であり、 $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T$ と $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_{11}, \zeta_{12}, \dots, \zeta_{44})^T$ は複素ベクトルである。この時、不等式 (1) の左辺は

$$\text{Tr}[\rho^{pt} \hat{f}^\dagger \hat{f}] = \begin{pmatrix} \mathbf{z}^* \\ \boldsymbol{\zeta}^* \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & B \\ B^\dagger & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\zeta} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

と表される。ここで、行列 A, B, D はそれぞれ $4 \times 4, 4 \times 16, 16 \times 16$ 行列であり、各成分は

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{\text{TB}} + i\Omega_{ij}), \quad (5)$$

$$B_{i,jk} = \kappa_{3,ijk}^{\text{TB}}, \quad (6)$$

$$D_{ij,kl} = \kappa_{4,ijkl}^{\text{TB}} + A_{ij}^* A_{kl} + A_{ik} A_{jl} + A_{il} A_{jk}, \quad (7)$$

と表される。ここで、 σ は共分散行列であり、 $\Delta \hat{r} = \hat{r} - \text{Tr}[\rho \hat{r}]$ を用いて、 $\sigma = \text{Tr}[\rho \{ \Delta \hat{r}, (\Delta \hat{r})^T \}]$ と表される。また、 κ_n は n 次のキュムラントであり、

$$\begin{aligned} & \kappa_{n,j_1 j_2, \dots, j_n} \\ &= \left[\left(i\Omega_{j_1 k_1} \frac{\partial}{\partial r_{k_1}} \right) \cdots \left(i\Omega_{j_n k_n} \frac{\partial}{\partial r_{k_n}} \right) \ln \chi(\mathbf{r}) \right] \Big|_{\mathbf{r}=0}, \end{aligned} \quad (8)$$

と定義される。ここで、 $\chi(\mathbf{r}) = \text{Tr}[\rho e^{i\mathbf{r}^T \Omega \hat{r}}]$ は特性関数である。PPT 条件を用いると、

$$M \equiv \begin{pmatrix} A & B \\ B^\dagger & D \end{pmatrix} \geq 0, \quad (9)$$

を破るならば、状態は量子もつれ状態である。従って、共分散行列と 3 次、4 次のキュムラントにより非ガウス状態の量子もつれは特徴づけられる。また、ガウス状態に対する量子もつれの評価法は $A \geq 0$ と同等であり、行列 B, D が非ガウス状態の量子もつれを特徴づける。

2.2 光学振動子系のセットアップ

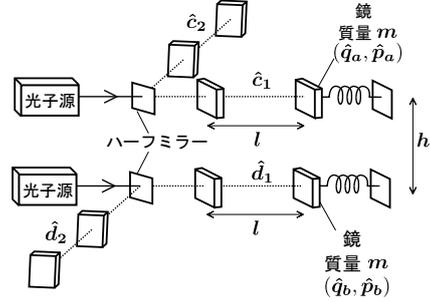


図 1: 光学振動子系のセットアップ。入射光子はハーフミラーを通して 2 つの経路に分けられる。また、各鏡はキャビティ内の光子と相互作用することにより、重ね合わせ状態となる。

図 1 に光学振動子系のセットアップを示す。各光子はハーフミラーを通して 2 つの経路に分けられ、一方のキャビティの終端にある鏡と相互作用する。各鏡はこの光子との相互作用を通して重ね合わせ状態となる。この系のハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{\hbar\Omega_m\sqrt{1+g}}{2}(\hat{p}_a^2 + \hat{q}_a^2) + \frac{\hbar\Omega_m\sqrt{1+g}}{2}(\hat{p}_b^2 + \hat{q}_b^2) \\ & + \hbar\omega_p(\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 + \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_2) + \hbar\omega_p(\hat{d}_1^\dagger \hat{d}_1 + \hat{d}_2^\dagger \hat{d}_2) \\ & - \hbar \frac{\Lambda\Omega_m}{(1+g)^{1/4}} \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1 \hat{q}_a - \hbar \frac{\Lambda\Omega_m}{(1+g)^{1/4}} \hat{d}_1^\dagger \hat{d}_1 \hat{q}_b \\ & - \hbar \frac{g\Omega_m}{\sqrt{1+g}} \hat{q}_a \hat{q}_b, \end{aligned} \quad (10)$$

と表される。ここで、 \hat{q}_a, \hat{p}_a (\hat{q}_b, \hat{p}_b) は無次元化した鏡の正準量であり、 $\hat{c}_1, \hat{c}_1^\dagger$ ($\hat{d}_1, \hat{d}_1^\dagger$) は光子の生成消滅演算子を表す。また、重力カップリング g と鏡と光子のカップリング Λ は

$$g = \frac{Gm}{\Omega_m^2 \hbar^3}, \quad \Lambda = \frac{\omega_p}{\Omega_m l} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega_m}}, \quad (11)$$

と表される。ここで、 G は重力定数、 Ω_m, ω_p は鏡と光子の振動数、 l はキャビティ長を表す。また、鏡の初期状態は

$$|\phi_m\rangle = e^{i\mathbf{r}'^T \Omega \hat{r}} |0\rangle_a |0\rangle_b, \quad (12)$$

とし、光子の初期状態は

$$|\phi_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_{c_1}|1\rangle_{c_2} + |1\rangle_{c_1}|0\rangle_{c_2}) \\ \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_{d_1}|1\rangle_{d_2} + |1\rangle_{d_1}|0\rangle_{d_2}), \quad (13)$$

とする。ここで、 \hat{r} は (2) の交換関係を満たす鏡の正準演算子であり、 $\mathbf{r}' = (q'_a, p'_a, q'_b, p'_b)^T$ である。

全体系の密度行列 $\rho = |\phi_m\rangle|\phi_p\rangle\langle\phi_m|\langle\phi_p|$ から光子をトレースアウトすると、鏡の密度行列は

$$\rho_m = \frac{1}{4} \sum_{k,l=0}^1 \rho_m^{kl}, \quad \rho_m^{kl} = |\phi^{kl}\rangle\langle\phi^{kl}|, \quad (14)$$

と得られる。ここで、

$$|\phi^{kl}\rangle = e^{-\frac{i}{2}\mathbf{r}'^T H \hat{r} t} e^{i(\mathbf{j}^{kl})^T H^{-1} \Omega [1 - e^{t\Omega H}] \hat{r}} |\phi_m\rangle, \quad (15)$$

であり、 $\mathbf{j}^{kl} = \Lambda \Omega_m (1+g)^{-\frac{1}{4}} (k, 0, l, 0)^T$ である。また、ハミルトニアン行列は

$$H = \begin{pmatrix} \sqrt{1+g} & 0 & -\frac{g}{\sqrt{1+g}} & 0 \\ 0 & \sqrt{1+g} & 0 & 0 \\ -\frac{g}{\sqrt{1+g}} & 0 & \sqrt{1+g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1+g} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

と与えられる。この状態 ρ_m は 4 つのガウス状態の和になっており、 $\Lambda = 0$ を除いて非ガウス状態になっている。この状態から行列 A, B, D を計算し、重力による鏡間の量子もつれについて評価する。

3 Results

図 2 と図 3 はそれぞれ行列 A と行列 M の最小固有値 E_2, E_4 の振る舞いを示す。ここで、重力カップリングは $g = 10^{-3}$ とし、鏡と光子間カップリングは $\Lambda = 0.1, 1$ とした。各図において最小固有値が負の値をとるとき、不等式 (1) を破るので量子もつれが生じている。 Λ が非常に小さいときには、状態はガウス状態に近づくため、行列 A と M のどちらを用いても量子もつれは同じように検出される。一方、 Λ が大きくなると非ガウス性が大きくなり、行列 A により量子もつれを検出できる領域は少なくなる。しかし、行列 M による評価では、行列 A では

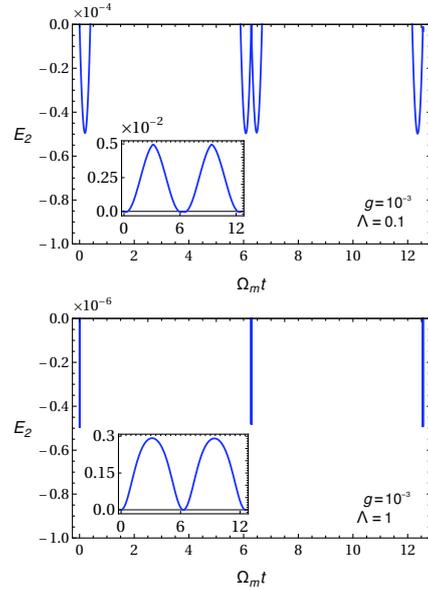


図 2: 行列 A の最小固有値 E_2 の振る舞い。重力カップリングは $g = 10^{-3}$ であり、鏡と光子のカップリングは $\Lambda = 0.1, 1$ である。各図は負の固有値の領域のみであり、全体の振る舞いは図中に縮小図として示す。

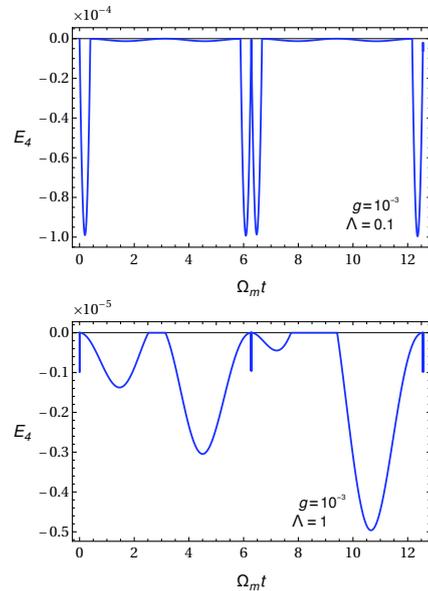


図 3: 行列 M の最小固有値 E_4 の振る舞い。各カップリングは図 2 と同じである。図 2 と異なり、非ガウス性由来の量子もつれを検出できている。

捕らえられない量子もつれを検出することができている。従って、3次、4次のキュムラントを用いることにより、非ガウス性由来の量子もつれを特徴づけることができている。

4 Discussion

前章では、3次と4次のキュムラントにより非ガウス状態の量子もつれを検出できることを示した。しかし、状態の非ガウス性が大きくなると、この条件では量子もつれが検出しにくくなる。これを示すために、鏡の状態に対する Wigner 関数を求めると、

$$\begin{aligned} W(\mathbf{X}) &= \frac{1}{2\pi} \int d^2\mathbf{r} \text{Tr}[\rho_m e^{i\mathbf{r}^T \Omega \hat{\mathbf{r}}}] e^{i\mathbf{X}^T \Omega \mathbf{r}} \\ &= \frac{\pi}{8} \sum_{k,l=0}^1 e^{-(\mathbf{X}+S(\mathbf{J}^{kl}+\mathbf{r}'))^T S^{-1} S^{-1} (\mathbf{X}+S(\mathbf{J}^{kl}+\mathbf{r}'))}, \end{aligned} \quad (17)$$

となる。ここで、 $\mathbf{X} = (Q_a, P_a, Q_b, P_b)^T$ であり、 $\mathbf{J}^{kl} = H^{-1}(1 - e^{-tH\Omega})\mathbf{j}^{kl}$ 、 $S = e^{\Omega H t}$ と定義した。また、この分布は4つのガウス分布の和になっており、各ガウス分布の中心は $\mathbf{X}^{kl} = -S(\mathbf{J}^{kl} + \mathbf{r}')$ となっている。ここで、各分布間の距離を

$$d_{ij,kl} = |\mathbf{X}^{ij} - \mathbf{X}^{kl}|/\sqrt{\Sigma}, \quad (18)$$

と定義する。ここで、 Σ は SS^T の固有値の和である。図4は $g = 10^{-3}$, $\Lambda = 1$ における各距離の振る舞いを示す。図3と比較すると、各分布間距離が最も離れている $\Omega_m t = \pi, 3\pi$ では、量子もつれが検出しにくくなっていることがわかる。従って、4次までのキュムラントに基づく条件では、非ガウス性が大きくなると量子もつれが検出しにくくなっている。

5 Conclusion

私たちは共分散行列と3次、4次のキュムラントに基づく量子もつれの判定法を導出した。この評価法は非ガウス性を特徴づける高次のキュムラントを用いており、非ガウス状態の量子もつれを評価することができる。また、この判定法を光学振動子系に適用することにより、重力相互作用する鏡の間に生

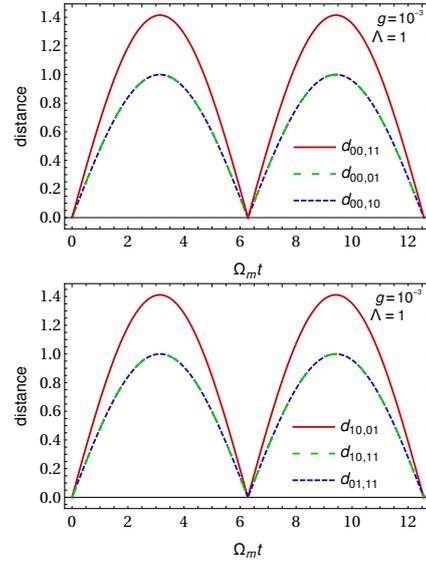


図4: 各ガウス分布の中心間の距離の振る舞い。各ガウス分布が近いと状態はガウス状態に近づき、各分布が離れるほど状態は非ガウス性は大きくなる。

成される量子もつれを評価した。光学振動子系では、各鏡はキャビティ内の光子との相互作用により重ね合わせ状態を実現でき、系の状態は非ガウス状態となっている。この時、キュムラントに基づく判定法では、共分散行列のみでは捕らえられない量子もつれを検出できることを示した。一方この判定法では、非ガウス性が大きくなると量子もつれの検出が難しくなることも示した。実験においては、光と相互作用する鏡の量子制御技術が進歩し、2つの鏡の2次相関の測定スキームも提案されている。周りの環境による影響を考慮し、より現実的なモデルの構築が今後の課題である。

Reference

- [1] R. Perse, Gen. Rel. Grav. **28**, 581 (1996)
- [2] S. Bose et al., Phys. Rev. Lett. **119**, 240401 (2017)
- [3] C. Marletto and V. Vedral, Phys. Rev. Lett. **119**, 240402 (2017)
- [4] A. A. Balushi et al., Phys. Rev. A **98**, 043811 (2018)
- [5] A. Matsumura and K. Yamamoto, Phys. Rev. D **102**, 106021 (2020)
- [6] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996)
- [7] D. Miki et al., arXiv:2108.00662

重字 16

非ガウス性による重力の量子性の検証

名古屋大学 理学研究科素粒子宇宙物理学専攻
前田 新也

非ガウス性による重力の量子性の検証

前田 新也 (名古屋大学大学院 重力・素粒子的宇宙論 (QG) 研究室)

Abstract

近年、量子制御技術が飛躍的に発展してきている。それに伴い、重力のプランクスケールにおける非相対論極限、弱重力での振る舞いについての研究が行われている。第一量子化の観点からエンタングルメントを用いた重力の量子性の検証は提案されていたが、第二量子化の観点からは提案されていなかった。そこで本発表では、第二量子化の観点から量子性の指標となる BEC 状態での波動関数の非ガウス性の提案を行い、第一量子化と同じようにエンタングルメントを用いた際の問題点を指摘した [1] のレビューを行う。

1 Introduction

重力のプランクスケールにおける振る舞いを記述する理論は、その実験による検証の困難さから未だ確立した理論は存在しているとは言えない。その一方で近年の量子制御技術の発展に伴い、実験室系における重力のプランクスケールにおける性質に関する研究が行われている [2],[3],[4]。非相対論的、弱重力のもとで重力がニュートンポテンシャルになることを用い、ポテンシャルの量子性を検証する手立てが調べられてきた。第一量子化の観点からはポテンシャルに含まれる重力源の位置が演算子になっているモデルと期待値になっているモデルがあり、後者を含む方程式は Schrödinger-Newton 方程式と呼ばれている。

本発表ではこれらのモデルに対し、第二量子化による BEC 状態での自己重力ハミルトニアンを表式を与え、その量子性の指標となる量を提案した [1] についてレビューを行う。

2 BEC 状態での第二量子化による自己重力相互作用

基底状態がマクロ的に占められる十分低温な物理系を考える。この時、Bose gas は非相対論的なスカラー量子場 $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ によって記述され、 $\hat{\Psi}(\mathbf{r}) \approx \psi(\mathbf{r})\hat{a}$ と近似される [5]。 $\psi(\mathbf{r})$ は波動関数、 \hat{a} は粒子の消滅演算子であり、全ての同種粒子が同じ状態になっている。

まず、古典的なニュートン重力に対するハミルトニアンは

$$H_{int} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) \quad (1)$$

と記述される。 $\Phi(\mathbf{r})$ はニュートンポテンシャル、 $\rho(\mathbf{r})$ は古典的な質量密度である。重力が量子論に従うとすれば $\rho(\mathbf{r})$ と $\Phi(\mathbf{r})$ の両方が量子化され、このような重力モデルを Quantum Gravity(QG) と呼ぶ。一方、Classical Gravity(CG) と呼ばれる重力モデルでは、物質すなわち $\rho(\mathbf{r})$ のみが量子化され、重力ポテンシャル $\Phi(\mathbf{r})$ は量子化されない。 $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = m\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ を用いて、第二量子化によるハミルトニアンはそれぞれ

$$\hat{H}_{QG} = \frac{1}{2}m \int d^3\mathbf{r} : \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r})\hat{\Phi}(\mathbf{r}) : \quad (2)$$

$$\hat{H}_{CG} = m \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r})\Phi[\Psi](t, \mathbf{r}) \quad (3)$$

と表される。 $::$ は normal ordering を表しており、 m は粒子の質量である。また、CG において $1/2$ を取り除いたのはエーレンフェストの定理からの類推による。QG の重力ポテンシャル $\hat{\Phi}$ はポアソン方程式から求められ、

$$\hat{\Phi}(\mathbf{r}) = -Gm \int d^3\mathbf{r}' \frac{\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')\hat{\Psi}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4)$$

となる。一方、CG の重力ポテンシャルは (4) の期待値を取ったものであり、 $\Phi = \langle \hat{\Phi} \rangle$ としたものである [6]。

$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})\hat{a}$ を用いれば、BEC 状態のハミルトニアンはそれぞれ

$$\hat{H}_{QG} = \frac{1}{2}\lambda_{QG}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} \quad (5)$$

$$\hat{H}_{CG} = \lambda_{CG}\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (6)$$

と書き下される。 λ_{QG} 、 λ_{CG} はそれぞれ

$$\lambda_{QG} = -Gm \int d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{r}' \frac{|\psi(\mathbf{r}')|^2|\psi(\mathbf{r})|^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (7)$$

$$\lambda_{CG} = -Gm \int d^3\mathbf{r}|\psi(\mathbf{r})|^2\Phi[\Psi](t,\mathbf{r}) \quad (8)$$

である。

これはニュートン極限で (2) の BEC の自己重力ハミルトニアンが現れる全ての QG 理論と、(3) の BEC の自己重力ハミルトニアンが現れる全ての CG 理論についての、特定のモデルに依らない一般的な検証となっている。

3 エンタングルメントを用いた重力の量子性の検証の問題点

第一量子化した重力の量子性の検証の手立てとしてエンタングルメントが提案されている [7]。まず古典的にはニュートンポテンシャルは

$$V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\frac{Gm^2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \quad (9)$$

のように記述される。QG では \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 の両方ともが量子化され、CG では重力を受ける方の位置のみが量子化され重力源の位置は期待値を取る。この時、QG には \mathbf{x}_1 と \mathbf{x}_2 の両方の演算子が分離できない形で含まれるため、エンタングルメントが生じる。一方、CG では重力を受ける側の演算子しか含まれないため系 1 と系 2 のハミルトニアンは $H_1 \oplus H_2$ の形に分離でき、エンタングルメントは生じない。

また一方で、第二量子化による観点からは CG でもエンタングルメントを生じうる。BEC 状態を double-well potential で二つのモードに分けると、 $\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \psi_L(\mathbf{r})\hat{a}_L + \psi_R(\mathbf{r})\hat{a}_R$ のようになる。 \hat{a}_L 、 \hat{a}_R はそれぞれ左のモードの消滅演算子、右のモードの消滅演算子であり ψ_L 、 ψ_R はそれぞれの波動関数である。(3) よ

り原理的には $\lambda_{LR} = m \int d^3\mathbf{r}\psi_L^*(\mathbf{r})\psi_R(\mathbf{r})\Phi[\Psi](t,\mathbf{r})$ が 0 でなければ、すなわち波動関数に重なりがあれば $\lambda_{LR}\hat{a}_L^\dagger\hat{a}_R + \text{h.c.}$ の項によってモード間にエンタングルメントが生じてしまう。二つのモードを十分離せばこのエンタングルメントは抑えられるが、それに併せて重力も弱くなるという問題を抱えている。

また、エンタングルメントを用いて QG と CG を区別するためには CG が LOCC(Local Operations and Classical Communication) であるという仮定が必要となるが、BEC 状態における波動関数の非ガウス性を用いた検証にはそのような仮定は必要としない。

実験的側面においても、重量のある粒子を空間的に離れた重ね合わせの状態に置く実験は困難とされ、電磁気や van der Waals 相互作用などのノイズは距離を離すことで抑えられるが重力も弱くなるという問題がある。それに対し、重量のある BEC 状態は既に実験的に作られており、Feshbach resonance によって電磁気相互作用のみを制御することができる [8]。

4 重力の量子性による波動関数の非ガウス性

ハミルトニアンが位置と運動量、あるいは消滅演算子と生成演算子について二次までで表される場合、すなわちハミルトニアンが

$$\hat{H} = \sum_k \lambda_k(t)\hat{x}_k + \sum_{kl} \hat{x}_k^T \mu_{kl}(t)\hat{x}_l \quad (10)$$

である時、ガウス状態はガウス状態にのみ移る。ここで添え字はモードを表しており、 $\mathbf{x}_k^T = (\hat{x}_k, \hat{p}_k)$ であり、 $\lambda_k(t)$ と $\mu_{kl}(t)$ は 2×1 と 2×2 の時間に依存する任意の実行列である。この形以外のハミルトニアンは波動関数のガウス性を保存せず、非ガウス性をもたらす。

実スカラー場の free Hamiltonian は、

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[(\partial_t \hat{\phi})^2 + (\nabla \hat{\phi})^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right] \quad (11)$$

であり、場を消滅演算子と生成演算子で展開した $\hat{\phi} = \sum_k [u_k(t, \mathbf{r})\hat{a}_k + u_k^*(t, \mathbf{r})\hat{a}_k^\dagger]$ を代入することで、(11) のハミルトニアンが (10) の形になることが分かる。

つまり、free Hamiltonian は波動関数のガウス性を保つ。

QG の場合の BEC の自己重力のハミルトニアン (5) は消滅演算子と生成演算子について 4 次の形になっており、この自己相互作用は波動関数を非ガウス型にする。一方で CG の場合の BEC の自己重力のハミルトニアン (6) は消滅演算子と生成演算子について 2 次の形になっており、この自己相互作用は波動関数のガウス性を保存する。よって初期の波動関数をガウス型にし、その後の時間発展による非ガウス性を測定すれば QG と CG が識別できる。

しかし一方で第一量子化の観点からすると、(9) より QG でも CG でも位置について 2 次に収まっておらず波動関数を非ガウス型にしてしまう。このことは非ガウス性を用いた検証の課題と言えるだろう。

5 波動関数の非ガウス性の測定

波動関数の非ガウス性は $\hat{q}(\varphi) = \hat{a}e^{-i\varphi} + \hat{a}^\dagger e^{i\varphi}$ とし、4 次のキュムラント

$$\begin{aligned} \kappa_4 = & \langle \hat{q}^4 \rangle - 4\langle \hat{q} \rangle \langle \hat{q}^3 \rangle - 3\langle \hat{q}^2 \rangle^2 \\ & + 12\langle \hat{q}^2 \rangle^2 \langle \hat{q}^4 \rangle - 6\langle \hat{q} \rangle^4 \end{aligned} \quad (12)$$

によって測定される。これは一般のオーダーでは

$$\begin{aligned} & \langle X_1 : X_2 : \dots : X_n \rangle \\ & = \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} \dots \frac{\partial}{\partial t_n} \right. \\ & \quad \left. \times \ln \left\langle \exp \left[\sum_{i=1}^n t_i X_i \right] \right\rangle \right]_{t_1=t_2=\dots=t_n=0} \end{aligned} \quad (13)$$

となっており、期待値や分散を一般化したものである [9]。ガウス分布は 2 次以上のキュムラントが 0 になり、対照的な非ガウス分布は 3 次のキュムラントが 0 になるため、波動関数の非ガウス性の測定には 4 次のキュムラントを用いる。

6 Conclusion

第一量子化の観点からは、エンタングルメントを用いた重力の量子性の検証が提案されている。しかし第二量子化の観点からは QG と CG のどちらでもエンタ

ングルメントが生じ、また particle entanglement が物理的かどうかの問題も残る。そこで筆者らは BEC 状態における自己重力相互作用のもとでの波動関数の非ガウス性を用いた重力の量子性の検証を提案した。ハミルトニアンが正準共役量について 2 次以下であればガウス性が保存されることを用いて、第二量子化した QG と CG の識別が可能となることが示された。これらは QG 理論や CG 理論に依らない非常に一般的な検証となっており、実験的にも優秀な検証となっている。また、4 次のキュムラントを用いれば波動関数の非ガウス性は測定される。

Acknowledgement

日頃から議論していただいている南部保貞様、郭優佳様、大澤悠生様に感謝します。また本集録作成にあたり、協力していただいた QG 研のみなさんに感謝します。

地球に感謝。

Reference

- [1] Richard Howl, Vlatko Vedral, Devang Naik, Marios Christodoulou, Carlo Rovelli, and Aditya Iyer. Non-gaussianity as a signature of a quantum theory of gravity. *PRX Quantum*, 2:010325, Feb 2021.
- [2] C. Marletto and V. Vedral. Gravitationally induced entanglement between two massive particles is sufficient evidence of quantum effects in gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 119:240402, Dec 2017.
- [3] Sougato Bose, Anupam Mazumdar, Gavin W. Morley, Hendrik Ulbricht, Marko Toroš, Mauro Paternostro, Andrew A. Geraci, Peter F. Barker, M. S. Kim, and Gerard Milburn. Spin entanglement witness for quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 119:240401, Dec 2017.
- [4] Chiara Marletto and Vlatko Vedral. When can gravity path-entangle two spatially superposed masses? *Phys. Rev. D*, 98:046001, Aug 2018.

- [5] S. Stringari L. Pitaevski. *Bose Einstein Condensation and Superfluidity*. Oxford University Press, 2016.
- [6] L. Diósi. Gravitation and quantum-mechanical localization of macro-objects. *Physics Letters A*, 105(4):199–202, 1984.
- [7] Daniel Carney, Philip C E Stamp, and Jacob M Taylor. Tabletop experiments for quantum gravity: a user’s manual. *Classical and Quantum Gravity*, 36(3):034001, jan 2019.
- [8] 加藤宏平. 極低温異核フェッシュバッハ分子の研究. 博士論文.
- [9] 鈴木増雄 田崎晴明 江沢洋, 渡辺敬二. くりこみ群の方法. 岩波書店.

重字17

回転ブラックホール周辺のアクション電磁気学

神戸大学大学院 理学研究科物理学専攻

砂川 浩諒

回転ブラックホール周辺のアクシオン電磁気学

砂川 浩諒 (神戸大学大学院 理学研究科)

Abstract

回転ブラックホールからエネルギーを取り出す方法として最もよく知られているのはペンローズ過程である。ペンローズ過程の一種にブラックホール周辺の磁場のエネルギーを取り出す Blandford & Znajek 機構 (BZ 機構) というものがある。本記事ではまず、ペンローズ過程と BZ 機構を紹介する。次に BZ 機構で扱われるフォースフリー電磁気学 (FFE) を微分形式を用いて表現する方法をレビューする。我々は電磁場とアクシオンの相互作用が BZ 機構に及ぼす影響に興味がある。そこでアクシオンと電磁場の相互作用を考慮した FFE の方程式系を微分形式を用いて最小作用の原理から考察する。結果的には、アクシオンと電磁場の相互作用を考慮すると、従来から知られている BZ 機構に帰着することが結論づけられる。

1 Introduction

ブラックホールとは、巨大な星が重力崩壊したり、銀河の中心、あるいは初期宇宙のような超高密度な状態において生じる時空の閉領域である。ブラックホールの存在は一般相対論により理論的に予言される。一般相対論によると、ブラックホールは事象の地平線と呼ばれる境界をもち、その境界を含む内部は外部と因果関係を持つことができない。近年、ブラックホール連星由来の重力波観測や影の直接的な撮像によって、ブラックホールの存在は確かなものとなり、精密天体観測のターゲットになりつつある。ブラックホール研究は天体物理学において重要な研究分野であることに加えて、理論物理学においても時空と物質の関係を探求する上で重要な研究であると考えられる。

活動的な銀河の中心 (AGN) からは毎秒 10^{44-47} erg のエネルギーが放出されていることが観測的に分かっている。また、AGN の正体は巨大な回転ブラックホールであると考えられている。したがって、あらゆるものを吸い込むイメージのある、巨大な回転ブラックホールからエネルギーが放出される物理的プロセスが存在すると考えられる。ブラックホールからエネルギーが放出される機構として最も有名だと思われるのはペンローズ過程である。ペンローズ過程とは、回転ブラックホール周辺のエルゴ領域で作られた負のエネルギーをブラックホールに吸い込ませるプロセスである。負のエネルギーを吸い込ませることは

正のエネルギーを放出することと等価である。このようなペンローズ過程の一種に Blandford & Znajek 機構 (Blandford, & Znajek 1977) がある。BZ 機構とは、回転ブラックホールの周辺に存在する磁場のエネルギーを放出する機構である。AGN には磁場が存在することを考慮すると、BZ 機構が AGN からのエネルギー放出を説明すると期待される。

BZ 機構では、プラズマの慣性を無視する条件、フォースフリー条件が仮定される。この条件の下、考えられる電磁気学体系をフォースフリー電磁気学 (FFE) と呼ぶ。FFE をテンソル形式ではなく微分形式を用いて記述すると、共変性が明白であることに加えて計算がはるかに簡単になり、計算や物理的考察の見通しが立ちやすい (Gralla, & Jacobson 2014)。

活動銀河核 (AGN) の周辺にアクシオンダークマターが存在すると仮定するならば、アクシオンと電磁場の相互作用が BZ 機構に影響を与えるのではないかと我々は考えた。そこで本研究では、アクシオンと電磁場の相互作用項をラグランジアンに加えて FFE の方程式系を最小作用の原理から導出した。その結果、アクシオンと電磁場の相互作用を考慮しても、相互作用を考慮しない従来の BZ 機構を支配する FFE の方程式系と同一の体系を得た。

2 Penrose process

本研究に関係する BZ 機構は回転している定常かつ軸対称ブラックホールに対してのみ成り立つ。回転ブラックホールの厳密解は 1963 年に Kerr によって発見されたことから、カー・ブラックホールと呼ばれ、計量 $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ はボイヤヤー・リンクスト座標を用いて $(-, +, +, +)$ の記法で次のように書かれる。

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{A}{\Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (1)$$

ただし、

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (2)$$

$$A = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \quad (3)$$

である。外側と内側の地平線をそれぞれ r_\pm とすると、 $\Delta = (r - r_+)(r - r_-)$ であり、 $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ である。外側の地平線は事象の地平線と呼ばれる。

(1) で表される計量は時間 t と方位角 ϕ に依存しないので、時空は 2 つのキリングベクトル、 $\mathbf{k} := \partial/\partial t$ と $\mathbf{m} := \partial/\partial \phi$ をもつ。ブラックホールが回転している場合、事象の地平線の外側にはエルゴ領域と呼ばれる空間がある。エルゴ領域とは時間的キリングベクトルのノルム $\mathbf{k}^2 = g_{tt}$ が空間的、つまり $g_{tt} > 0$ となる、事象の地平線より外側の領域のことである。実際、事象の地平線の外側で $g_{tt} > 0$ となるのは、

$$M + \sqrt{M^2 - a^2} < r < M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (4)$$

の領域である。

エルゴ領域にある粒子はエネルギー的に興味深い性質をもつ。粒子のエネルギーは時間的キリングベクトル \mathbf{k} と粒子の 4 元運動量 \mathbf{P} を用いて次のように書ける。

$$E = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \quad (5)$$

(5) 式において、 $\mathbf{P}^2 < 0$ であり、 $\mathbf{k}^2 > 0$ である時空領域ならば $\mathbf{k} \cdot \mathbf{P} > 0$ となる可能性がある。このとき $E < 0$ となり、粒子はエルゴ領域で負のエネルギーを持ちうるということが分かる。この性質を用いてカー・ブラックホールから回転エネルギーを引き抜ける。エ

ネルギー $E = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{P}$ をもつ粒子を測地線に沿って移動させ、エルゴ領域に投げ入れる。次にエルゴ領域で負のエネルギー $E_1 = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{P}_1$ をもつ粒子 1 と正のエネルギー $E_2 = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{P}_2$ をもつ粒子 2 に分割する。すると局所的な慣性系で次式のエネルギー保存則が成り立つ。

$$E = E_1 + E_2 \quad (6)$$

いま、(6) 式において、 $E_1 < 0$ より、

$$E_2 = E - E_1 > E \quad (7)$$

となる。粒子 2 は正のエネルギーもつのでエルゴ領域の外側に出てくることが出来る。したがって、投げ入れた粒子よりも大きなエネルギーをもつ粒子 2 を取り出せることが分かる。このとき、カー・ブラックホールは負のエネルギー E_1 をもつ粒子 1 を吸い込んで回転エネルギーが下がる。これは間接的にカー・ブラックホールから回転エネルギーを引き抜いたことを意味する。このカー・ブラックホールからのエネルギー引き抜き過程をペンローズ過程 (Penrose 1969) という。

3 BZ mechanism

BZ 機構とは、カー・ブラックホール周辺の磁場からエネルギーを取り出す機構であり、ペンローズ過程の一種である (Blandford, & Znajek 1977)。活動銀河の中心には回転ブラックホールが存在し、その周辺には磁場があると考えられているので、銀河の中心からエネルギーのジェットが吹き出す仕組みを BZ 機構で説明できそうである。回転ブラックホール周辺に存在するプラズマの慣性を無視する条件、フォースフリー条件を課すと、電磁場テンソルは次式を満たす。

$$F_{ab}j^b = 0 \quad (8)$$

ここで j^b は 4 元カレントである。また、 F_{ab} は電磁場テンソルであり、ベクトルポテンシャル A_a を用いて次式で定義される。

$$F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a \quad (9)$$

ここで ∇ は時空の共変微分である。いま、時空が定常かつ軸対称であることからベクトルポテンシャルが時間と方位角に依存しないと仮定すると次式が得られる。

$$\nabla_r A_0 \cdot j^r + \nabla_\theta A_0 \cdot j^\theta = 0 \quad (10)$$

$$\nabla_r A_0 \cdot j^0 + \nabla_r A_\phi \cdot j^\phi + B_\phi j^r = 0 \quad (11)$$

$$\nabla_\theta A_0 \cdot j^0 + \nabla_\theta A_\phi \cdot j^\phi - B_\phi j^r = 0 \quad (12)$$

$$\nabla_r A_\phi \cdot j^r + \nabla_\theta A_\phi \cdot j^\theta = 0 \quad (13)$$

また、ソースを含むマクスウェル方程式は次のようになる。

$$\nabla_b F^{ab} = j^a \quad (14)$$

通常、(14) 式は右辺の 4 元カレントが与えられて左辺の電磁場を解くべき式である。だが、フォースフリー条件の仮定の下ではそうではない。この仮定の下で (14) 式は電磁場と 4 元カレントを結びつける関係式であるだけであり、電磁場を解くための方程式ではない。電磁場の方程式は (8) 式に (14) 式を代入することで次のように得られる。

$$F_{ab} \nabla_c F^{bc} = 0 \quad (15)$$

ここで、真空 ($\nabla_b F^{ab} = 0$) の場合も (15) 式を満たすが、(15) 式の成立は自明でありつまらない。ところが、プラズマがある場合 ($\nabla_b F^{ab} \neq 0$) には (15) 式の電磁場を求めることは非自明である。したがって、プラズマがある場合を考える。

実際、BZ 機構で取り出せるエネルギーはどのように表されるのだろうか。地平線上のエネルギー流速は次式で表される。

$$\mathcal{E}^a = -T^{ab} k_b \propto \omega (\Omega_H - \omega) (B^\phi)^2 \quad (16)$$

$$T^{ab} = F_c^a F^{bc} - \frac{1}{4} F_{cd} F^{cd} g^{ab} \quad (17)$$

ここで B^ϕ は磁場の方位角成分である。また、 Ω_H はブラックホールの角速度、 ω は (8) 式から電磁場の角速度だと解釈可能で次のように定義される。

$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2} \quad (18)$$

$$\omega = -\frac{\nabla_r A_0}{\nabla_r A_\phi} \quad (19)$$

(16) 式は動径方向外向きに流れるエネルギー流速を表している。したがって、(16) 式が正のとき、カー・ブラックホールからエネルギーが取り出せることが分かる。(16) 式が正になるのは $\Omega_H > \omega$ となるときであることが分かる。つまり、ブラックホールの角速度の方が電磁場の角速度より大きいとき、カー・ブラックホールからエネルギーが取り出せることが分かる。このエネルギーを取り出す過程を BZ 機構と呼ぶ。正の外向きエネルギーはエルゴ領域で言い換えると負の内向きエネルギーとなる。この見地に立つと、BZ 機構はペンローズ過程の一種であるといえる。

4 Covariant force-free electrodynamics

(15) 式を微分形式で表現してみる。微分形式を用いる利点は相対論的共変性を視覚的に明白に保ちながら計算できることと、計量の代わりにホッジスター演算子を用いて計算するので、カー計量などの複雑な式を扱うことなく簡単に計算できることである。フォースフリー条件を満たす電磁場テンソル F は次のようにかけることが知られている (Uchida 1996)。

$$F = d\phi_1 \wedge d\phi_2 \quad (20)$$

ここで、 ϕ_1, ϕ_2 はオイラーポテンシャルと呼ばれるスカラー関数である。次に、フォースフリー条件 (8) 式を微分形式を用いて表現することを考えよう。そのために、カレント 1 形式のホッジ双対である次のようなカレント 3 形式を考える。

$$j^b = \frac{1}{3!} \epsilon^{bcde} J_{cde} \quad (21)$$

ここで ϵ^{bcde} は 4 次元のレビ・チビタ記号である。(21) 式を (8) 式に代入すると次式を得る。

$$F_{a[b} J_{cde]} = 0 \quad (22)$$

ここで、 $[\dots]$ はその中の添え字について完全反対称であることを意味する。これを微分形式で書くと (20) 式を用いて次のように書ける。

$$d\phi_i \wedge J = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (23)$$

また、最小作用の原理を次の作用

$$S_{\text{EM}} = \int \left(-\frac{1}{2} F \wedge *F + A \wedge J \right) \quad (24)$$

に適用することにより、次式のマクスウェル方程式が得られる。

$$d * F = J \quad (25)$$

と書ける。ここで $*$ はホッジスター演算子であり、今の場合、次式で定義されている。

$$*F_{cd} = \frac{1}{2!} F^{ab} \epsilon_{abcd} \quad (26)$$

(25) 式を (23) 式を代入することで次式が得られる。

$$d\phi_i \wedge d * F = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (27)$$

これがフォースフリー電磁気学を支配する方程式であり (15) 式を微分形式で書いたものに対応する。

次に (27) 式を最小作用の原理から導出する方法を紹介する。作用は次のようになっている。

$$S_{\text{FF}} = -\frac{1}{2} \int d\phi_1 \wedge d\phi_2 \wedge *(d\phi_1 \wedge d\phi_2) \quad (28)$$

(28) 式ではフォースフリー条件を課しているので $F = d\phi_1 \wedge d\phi_2$ であることを用いた。(28) 式を ϕ_1, ϕ_2 に関して変分をとり、最小作用の原理を用いると (27) 式を得る。

5 Force-free axion electrodynamics

前節の内容を参考に電磁場とアクシオンの相互作用を考慮すると (27) 式がどのように変化するかを我々は考えた。アクシオンと電磁場との相互作用を考慮したマクスウェル方程式は最小作用の原理を次の作用

$$S_{\text{EM-axi}} = \int \left(-\frac{1}{2} F \wedge *F - \frac{\kappa}{2} a F \wedge F + A \wedge J \right) \quad (29)$$

に適用することにより、次式が得られる。

$$d * F = -\kappa da \wedge F + J \quad (30)$$

ここで κ はアクシオンの崩壊定数である。(23) 式に (30) 式の J を代入すると次式のようになる。

$$d\phi_i \wedge d(*F + \kappa a F) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (31)$$

(31) 式において、 $d\phi_i \wedge (\kappa a F) = \kappa d\phi_i \wedge da \wedge F = 0$ となる。よって、(31) 式は次のようになる。

$$d\phi_i \wedge d * F = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (32)$$

これは (27) 式と全く同じである。よって、アクシオンと電磁場の相互作用を考慮しても、フォースフリー電磁気学 (FFE) の方程式系は結局、アクシオンと電磁場の相互作用を考慮しない場合における FFE の方程式系に帰着することが分かる。

6 Conclusion

本記事ではまず、回転ブラックホールからエネルギーを取り出す方法であるペンローズ過程と、その一種である BZ 機構について説明した。そして BZ 機構では、電磁場が満たすべき条件としてフォースフリー条件を課し、一般の電磁気学体系とは異なり、マクスウェル方程式を条件式として扱うフォースフリー電磁気学を紹介した。この特別な電磁気学体系を相対論的共変性が明白になる微分形式を用いて表現した。最後にアクシオンと電磁場の相互作用を考慮してフォースフリー電磁気学を微分形式を用いて再構築した。その結果、アクシオンと電磁場の相互作用を考慮しても、通常のフォースフリー電磁気学に帰着することが分かった。このように、微分形式を用いると、一般時空における方程式系の解析を見通しよく行うことができる。したがって、微分形式を用いた解析は現在、我々が取り組むブラックホール物理学の研究に役立つだろうと期待している。

Reference

- Blandford R. D., & Znajek R. L. 1977, MNRAS.
 Gralla. S. E., & Jacobson T. 2014, MNRAS.
 Penrose R. 1969, Riv. Nuovo Cimento.
 Uchida T. 1997, The American Physical Society.

重字 18

膨張宇宙における Black Hole Shadow

名古屋大学 理学研究科素粒子宇宙物理学専攻
松田 大輝

膨張宇宙での Black Hole Shadow

松田 大輝 (名古屋大学大学院 理学研究科 重力・素粒子の宇宙論研究室)

Abstract

今回レビューする (Gennady S. Bisnovatyi-Kogan & Oleg Yu. Tsupko 2018) では、宇宙論的距離にある Black Hole(BH) に対する BH shadow の見た目の大きさについて解析したものである。膨張宇宙での shadow の大きさを計算する手法は厳密解である Schwarzschild-deSitter の場合以外に知られていない。そのため (Gennady S. Bisnovatyi-Kogan & Oleg Yu. Tsupko 2018) では新たな計算手法として, angular size redshift relation を用いて近似的に一般的な場合での shadow のサイズを求める方法を提案した。この計算から shadow の angular size は black hole redshift に依存した関数として得られる。結果として、大きな宇宙論的距離にある BH の shadow のサイズが、我々の住む銀河の中心にある BH の shadow に近いサイズになり得ることがわかった。また最後に、このような shadow の観測の可能性について議論する。

1 Introduction

2019 年、the Event Horizon Telescope によりおとめ座銀河団の楕円銀河 M 87 の中心に位置する super-massive BH の姿を画像で捉えることに成功した。画像から BH を囲む明るいリング構造とその中心にある暗い領域が存在することが分かる。この暗い領域は BH shadow と呼ばれている。この shadow の大きさや輪郭により BH のパラメータを決定することが出来る。

我々が住む宇宙は膨張している事が分かっている。膨張による効果から BH の shadow のサイズに影響を与えたと考えられる。しかし膨張宇宙に BH を適切に埋め込み、強い重力下で光の軌道を計算する必要があるため Friedmann-Robertson-Walker(FRW)metric で描かれる一般的な場合の expanding Friedmann universe での shadow の計算は困難である。

そこで、この論文では観測者が BH の horizon に比べ非常に遠く、膨張が非常に小さい場合に、BH 付近では膨張の影響を無視でき、また観測者が十分離れているため BH の重力の影響を無視できるような状況を考える。

本発表では、これらの状況下で shadow の angular size が black hole redshift に依存した関数として得られることを述べる。

2 Description of Methods

膨張する宇宙に埋め込まれた Schwarzschild BH を考える。宇宙の膨張は Hubble parameter $H(t)$ で表される。現在の Hubble parameter の量を H_0 とする。BH の mass を M , the Schwarzschild radius を $R_S = 2m$ とする。ここで mass parameter m は、 $m = MG/c^2$ である。

観測者は BH から非常に離れているとし、radial coordinate は $r_0 \gg m$ とする。

ここで、以下の関係を満たす radial coordinate r_1 を導入する。

$$m \ll r_1 \ll r_0. \quad (1)$$

この条件 (1) から、

- (i) BH 近くの領域, $r < r_1$
 - (ii) BH から離れた領域, $r > r_1$
- からなる二つの領域が考えられる。

(i) は BH の重力と比べ、宇宙の膨張を無視できる領域、(ii) は宇宙の膨張が優勢で、BH の重力が無視できる領域である。

領域 (ii) で今回提案する angular size redshift relation を、宇宙膨張の効果が現れるので適用する。

まず初めに、shadow の physical linear size を考える。観測者が r_1 に位置すると、宇宙膨張のない shadow のサイズを見ることになる。よって Sygne の

式 (J.L. Synge 1966) より, Schwarzschild BH の angular radius α_{sh} は,

$$\sin^2 \alpha_{\text{sh}} = \frac{27m^2(1 - 2m/r_1)}{r_1^2} \simeq \frac{27m^2}{r_1^2}. \quad (2)$$

と書ける. そのため shadow の linear radius R_{sh} は,

$$R_{\text{sh}} \simeq r_1 \sin \alpha_{\text{sh}} = 3\sqrt{3}m. \quad (3)$$

と書ける. また, radius r_1 では, 宇宙膨張が小さいため膨張による効果を見捨てている.

次に, 宇宙膨張による影響を受ける領域 (ii) での angular radius を, angular size redshift relation を用いて考える.

angular diameter distance D_A は定義より,

$$D_A = \frac{L}{\Delta\theta}, \quad (4)$$

と書ける, ここで L は object の proper diameter, $\Delta\theta$ は angular diameter である. angular diameter distance は redshift z の関数であることが知られている.

$$D_A(z) = \frac{c}{(1+z)H_0} \text{Int}(z), \quad (5)$$

ここで, matter, radiation, dark energy の現在の density parameter の量を Ω_{m0} , Ω_{r0} , $\Omega_{\Lambda0}$ とすると,

$$\text{Int}(z) = \int_0^z (\Omega_{m0}(1+\tilde{z})^3 + \Omega_{r0}(1+\tilde{z})^4 + \Omega_{\Lambda0})^{-1/2} d\tilde{z}, \quad (6)$$

である. よって, (4) 式より angular diameter は,

$$\Delta\theta(z) = L \frac{H_0}{c} \frac{1+z}{\text{Int}(z)}. \quad (7)$$

となる. (3) 式を代入すると, angular radius は

$$\alpha_{\text{sh}}(z) = R_{\text{sh}} \frac{H_0}{c} \frac{1+z}{\text{Int}(z)}. \quad (8)$$

となり, shadow の angular radius の式を得た.

この式を用いて様々な宇宙での shadow のサイズを求める.

ここで, z が十分小さいときのサイズを求める. このとき $\text{Int}(z) \simeq z$ (ここで $\Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{\Lambda0} = 1$ を用いた) なので, angular radius は,

$$\alpha_{\text{sh}}(z) = 3\sqrt{3}m \frac{H_0}{c} \frac{1}{z}. \quad (9)$$

となる. これは, BH との距離を $D_d \simeq cz/H_0$ とすると (これは $z \ll 1$ のときに正しい) (10) 式は,

$$\alpha_{\text{sh}}(z) = \frac{3\sqrt{3}m}{D_d}. \quad (10)$$

となる.

例として, M87 の supermassive BH を考える. $z = 0.004283$, $M = 6.2 \times 10^9 M_\odot$ とすると, angular diameter は約 $35 \mu\text{as}$ を得る. z が十分小さいとき, 条件 (1) よりこの近似は適用できないが, 現実的な状況ではこれらは有効である.

2.1 Black hole in de Sitter universe

de Sitter universe で BH shadow が comoving observer からどのように見えるかを考える. de Sitter universe では, $\Omega_{\Lambda0} = 1, H(t) = H_0 = \text{const}$, $\text{Int}(z) = z$ なので (8) 式は,

$$\alpha_{\text{sh}} = 3\sqrt{3}m \frac{H_0}{c} \frac{1+z}{z}. \quad (11)$$

となる.

ここで $z \rightarrow \infty$ とすると,

$$\alpha_{\text{sh}} \rightarrow 3\sqrt{3}m \frac{H_0}{c}. \quad (12)$$

となる. この結果は Kottler metric で計算した結果と一致する (V. Perlick et al. 2018).

よって, dark energy が支配的のとき, (12) 式のように angular radius は有限の値に収束する.

2.2 Einstein de Sitter spacetime

次に,matter が支配する宇宙を考える.Einstein de Sitter spacetime では, $\Omega_{m0} = 1, \Omega_{r0} = 0, \Omega_{\Lambda0} = 0$ なので (9) 式は,

$$\alpha_{sh}(z) = \frac{3\sqrt{3}m}{2} \frac{H_0}{c} \frac{1+z}{[1-(1+z)^{-1/2}]}. \quad (13)$$

となる. これは, $z = 5/4$ で $\alpha_{sh}(z)$ は最小値をとる.

よって,matter が支配的のとき,redshift z の増加で angular size は増加する.

2.3 Real multicomponent universe

現在の観測で知られているパラメータを持つ宇宙を考える.パラメータとして $\Omega_{m0} = 0.3, \Omega_{r0} = 0, \Omega_{\Lambda0} = 0.7$ を用いると図 1 のようになる.

$z = 10$ のとき, $\alpha_{sh} \simeq 26 mH_0/c$ となる. ここで $M = 10^{10} M_{\odot}, H_0 = 70 \text{ km}/(\text{sec}\cdot\text{Mpc})$ とすると, $\alpha_{sh} \simeq 0.6 \mu\text{as}$ となる. また $M = 10^{11} M_{\odot}$ とすると $\alpha_{sh} \simeq 6 \mu\text{as}$ となる. 結果として, 宇宙論的距離にある BH の angular diameter は $12 \mu\text{as}$ 程度になり得る.

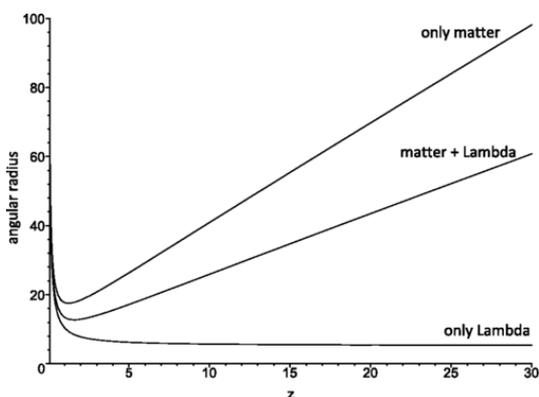


図 1: angular radius α_{sh} の z 依存性:de Sitter model ($\Omega_{m0} = 0, \Omega_{\Lambda0} = 1$),Einstein-de-Sitter spacetime ($\Omega_{m0} = 1, \Omega_{\Lambda0} = 0$),real multicomponent universe($\Omega_{m0} = 0.3, \Omega_{\Lambda0} = 0.7$).

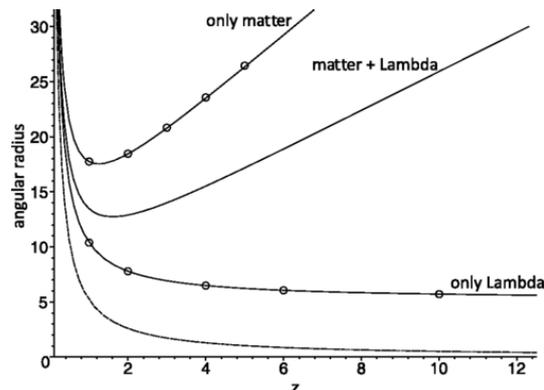


図 2: 図 1 の拡大図, また破線は (9) 式をプロットしたもの. z の全範囲で (9) 式は宇宙膨張のない Schwarzschild の場合と解釈できる. また曲線上の円は McVittie metric を用いて数値計算した結果である.

3 Comparison with exact numerical solution in McVittie metric

これらの結果を McVittie metric を用いて数値計算で求めた shadow のサイズと比較する.McVittie metric は, $G = 1 = c$ とすると,

$$ds^2 = - \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^2 dt^2 + (1+\mu)^2 a^2(t) (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (14)$$

と記述される. ここで $\mu, d\Omega^2$ は

$$\mu = \frac{m}{2a(t)r}, d\Omega^2 = \sin^2\vartheta d\varphi^2 + d\vartheta^2, \quad (15)$$

である. また $a(t)$ はスケール因子である.

この metric からラグランジュ関数 $L = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ (ドットは affine parameter λ での微分である。) を用いて,cosmological term only と matter only のときの shadow のサイズを計算する. 観測者の共動座標を $r(\lambda_0), t(\lambda_0)$ とし, H_0 が十分小さく, $r(\lambda_0) \gg m$ ($G = c = 1$) として数値計算を行うと cosmological term only と matter only のとき図 2 のようになる. これらの結果は, 近似で求めた結果と一致する.

4 Conclusion

(i) 膨張宇宙での shadow の大きさを計算する手法として angular diameter redshift relation を用いた (8) 式を提案した。(10) 式で z が小さいときに正しい結果が得られたこと,(12) 式が Schwarzschild-de-Sitter の場合での結果が厳密解と一致すること,McVittie metric を用いて数値計算した結果が一致することを確かめられた。

(ii) matter 成分が存在すると, z の値が大きい BH は shadow のサイズが大きくなることが分かった。最近の観測では $z \simeq 20$ までの宇宙の特性が明らかになった。大きな z で観測するために設計された,未来のプロジェクトである,'James Webb Space Telescope' (<https://jwst.nasa.gov>) は,大きな redshift のオブジェクトの観測できると考えられる。将来的に大きな宇宙論的距離にある supermassive BH の shadow が観測されると期待される。

(iii) このような大きな宇宙論的距離にある BH の shadow を観測するには, angular radius が十分大きいだけでなく,十分な光源が必要になる。

最後に,銀河中心にある BH の shadow の現在の観測と,宇宙論的距離にある BH の shadow の観測の可能性を比較する。銀河中心にある supermassive BH の観測の場合,光放射はダストによって遮蔽されるため光学測定は不可能である。したがって観測はサブミリの範囲で行われる。クエーサーの場合,光学測定が可能であり,光学バンドとミリバンドの間の波長には 3 桁の違いがある。そのため VLBI テクノロジーを用いると 3 桁優れた解像度が得られる可能性がある。これは,大きな宇宙論的距離ににある BH の shadow を観測するのに十分と考えられる。

Acknowledgement

本発表において,ご指導して下さった講師の柳哲文さん,QG 研の皆さまに感謝申し上げます。

Reference

Gennady S. Bisnovatyi-Kogan & Oleg Yu. Tsupko, arXiv:1805.03311(2018)

J.L. Synge , Mon. Not. R. Astron. Soc. 131, 463 (1966)

V. Perlick, O. Yu. Tsupko, & G. S. Bisnovatyi-Kogan, Phys. Rev. D (2018), accepted, arXiv:1804.04898 (2018).

重字 19

インフレーション宇宙論におけるブラックホールのダイナミクス

近畿大学 総合理工学研究科理学専攻
諏訪 みづき

インフレーション宇宙論におけるブラックホールのダイナミクス

諏訪 みづき (近畿大学大学院 総合理工学研究科)

Abstract

2019 年 4 月 10 日に EHT 国際共同研究グループが楕円銀河 M87 の中心にある巨大ブラックホールの撮影に成功したと発表した [1]。その結果は、ブラックホール時空中における光の振る舞いについて一般相対性理論が予言する通りであった。ブラックホール時空を記述する上で最も簡単な解は、Schwarzschild 時空である。Schwarzschild 時空は、十分遠方では Minkowski 時空になる漸近平坦時空である。しかし、我々の宇宙は、現在ダークエネルギーにより加速膨張しており、初期にはインフレーションという加速膨張を経験している。こうした加速膨張宇宙は漸近平坦ではなく、de Sitter (ドジッター) 時空に漸近することが分かっている。そのため、宇宙論におけるブラックホールのダイナミクスを理解する上では、背景時空がインフレーションを表すような漸近的 de Sitter 時空上のブラックホールが重要である。そこで、本発表では、スカラー場のポテンシャルがゆっくり進化する slow-roll インフレーション宇宙論におけるブラックホールについて考察する。そのようなブラックホールは、宇宙定数が時間とともにゆっくり進化する quasi-Schwarzschild-de Sitter 時空によって記述できる。本発表では、初めに静的 Schwarzschild-de Sitter 時空の基本を説明する。その後、Gregory-Kastor-Traschen の研究 [2] にしたがって、Schwarzschild-de Sitter での slow-roll するスカラー場の波動方程式を分析して、ポテンシャルが時間座標 T のみに依存する新しい座標を導入する。そして、slow-roll インフレーション宇宙論における動的ブラックホールの熱力学法則を解説する。

1 Introduction

2019 年 4 月 10 日に EHT 国際共同研究グループが楕円銀河 M87 の中心にある巨大ブラックホールの撮影に成功したと発表した。その結果は、ブラックホール時空中における光の振る舞いについて一般相対性理論が予言する通りであった。ブラックホールを記述する上で最も簡単な解は、Schwarzschild 時空である。Schwarzschild 時空は、十分遠方では Minkowski 時空になる漸近平坦時空である。しかし我々の宇宙は、現在ダークエネルギーにより加速膨張している。また、宇宙初期にはインフレーションという加速膨張を経験している。本発表では、インフレーション宇宙論におけるブラックホールのダイナミクスを、スカラー場のポテンシャルがゆっくり進化する slow-roll 条件のもとで考える。

2 Schwarzschild 時空

Schwarzschild 時空とは、静的球対称真空ブラックホール解のことである。Schwarzschild 計量は、

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1)$$

ここで、 r_s は Schwarzschild 半径である。この解は、宇宙項を含まない漸近平坦時空である。

3 ブラックホールの熱力学

Schwarzschild 解の表面積 $A = 4\pi r_s^2$ と質量パラメーター M の関係から、以下の (2) 式のような熱力学第一法則に対応する式を導くことができる。

$$\delta M = T_b \delta S_b \quad (2)$$

ここで、 $T_b = \frac{\kappa}{2\pi}$ 、 $A = 4\pi r_s^2$ 、 $S = \frac{A}{4}$ である。 M : ブラックホールの質量、 T_b : ブラックホールのホライズン温度、 S_b : ブラックホールのホライズンのエ

ントロピーを表す。ここで、ブラックホールの表面積とエントロピー、および表面重力と温度の関係があることがわかる。これらの関係は、場の量子論を考察した Hawking 輻射の公式を導出することで明確に定まる。

4 Schwarzschild-de Sitter 時空

Schwarzschild-de Sitter 計量は、以下のような式で与えられる。

$$ds^2 = -f_0(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f_0(r)} + r^2d\Omega^2 \quad (3)$$

ここで、 $f_0 = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2$ である。また、 M : 質量、 Λ : 正の宇宙定数である。

$GM \leq \frac{1}{3\sqrt{\Lambda}}$ のとき、 $f_0(r) = 0$ には、3 つの解がある。それぞれの解を、 r_n 、 r_b 、 r_c とすると

$$f_0(r) = -\frac{\Lambda}{3r}(r - r_c)(r - r_b)(r - r_n) \quad (4)$$

と書き換えることができる。ここで、 $r_n = -(r_b + r_c)$ である。よって、

$$GM = \frac{r_c r_b (r_b + r_c)}{2(r_b^2 + r_c^2 + r_b r_c)} \quad (5)$$

また、

$$\Lambda = \frac{3}{r_b^2 + r_c^2 + r_b r_c} \quad (6)$$

である。 r_b : ブラックホールのホライズン半径、 r_c : cosmological ホライズンの半径を表す。2 つのホライズンでの表面重力は、 h をホライズンとすると、

$$\kappa_h = \frac{f'_0(r_h)}{2} \quad (7)$$

で求まる。 $f_0(r)$ に $\Lambda > 0$ が含まれるため、この解は漸近平坦ではなく、漸近 de Sitter 時空である。

5 slow-roll 条件

インフレーション宇宙では、加速膨張の観点からスカラー場のポテンシャルがゆっくり進化する slow-roll 条件を考える。宇宙定数 Λ は、スカラー場 ϕ のポテンシャル W によって与えられ、時間とともに進化する。

(3) 式に、 $T = t + h(r)$ となる座標 T を導入する。ここで関数 $h(r)$ を上手く選ぶことで、 $T = \text{const}$ 超曲面がブラックホールホライズンと cosmological ホライズンの両方のホライズンの横切るようになる。

$$ds^2 = -fdT^2 + 2\eta drdT + \frac{dr^2}{f}(1 - \eta^2) + r^2d\Omega^2 \quad (8)$$

ここで、 $f = f(r, T)$ 、 $\eta = \eta(r, t)$ は、slow-roll するスカラー場を通して摂動的に与えられる。(8) 式は、質量や宇宙項が準静的に変化する quasi-Schwarzschild-de Sitter 時空を表す。

6 Schwarzschild-de Sitter ブラックホールの第一法則と質量第一法則

Schwarzschild-de Sitter ブラックホールの第一法則は、

$$T_b \delta S_b + T_c \delta S_c + M_p^2 V_{ds} \delta \Lambda = 0. \quad (9)$$

ここで、 V_{ds} は、 $V_{ds} = \frac{4\pi}{3}(r_c^3 - r_b^3)$ で与えられる SdS ブラックホールの熱力学体積である。(11) 式に現れた量の時間変化は slow-roll スカラー場を用いて記述できる。また、漸近平坦な場合 (2) 式と比べると、slow-roll スカラー場のポテンシャルで与えられる宇宙項の変分 $\delta \Lambda$ が現れ、その係数が熱力学体積 V_{ds} で与えられ点が特徴的である。

また、質量第一法則は、

$$\delta M - T_b \delta S_b + M_p^2 V_b \delta \Lambda = 0. \quad (10)$$

ここで、 V_b は、 $V_b = \frac{4\pi}{3}r_b^3$ で与えられる熱力学体積である。

7 今後の展望

本発表では、slow-roll 条件を考えることによって、インフレーション宇宙論におけるブラックホールのダイナミクスを考えた。よって、宇宙定数や質量に時間依存性を与え、時間依存のホライズン領域、熱力学体積、および動的表面重力を考察した。今後は、定数

r の表面を横切るスカラー場のエネルギー運動量を取る、ブラックホールのホライズンから入り cosmological ホライズンから出ていくスカラー場のフラックスについて考えたい。

8 Reference

[1]The Event Horizon Collaboration The Astroph. J. 875,L1(2019)

[2]R.Gregory, D.Kastor, J.Traschen, Classical and Quantum Gravity **35**, 155008, (2018)

重字 20

大気チェレンコフ望遠鏡を用いた原始ブラックホール
の探索

東京大学 理学系研究科物理学専攻
金森 翔太郎

大気チェレンコフ望遠鏡を用いた原始ブラックホールの探索

金森 翔太郎 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

現代宇宙論の興味深いテーマの一つに原始ブラックホール (Primordial Black Hole, PBH) がある。PBH とは、インフレーションの時に生じた密度揺らぎが、重力崩壊して形成すると考えられているブラックホールである。PBH は、現在観測されている大質量ブラックホールの起源を自然に説明できるだけでなく、ダークマターの正体である可能性や最初の重力波検出である GW150914 の連星ブラックホールの起源を説明できることから、注目されている。

PBH を探索する方法の一つとして、ブラックホールが起こすとされている Hawking 放射によるガンマ線を観測する方法がある。ブラックホールによる Hawking 放射は、時間と共に放出する光子のエネルギーが上昇する。特にガンマ線領域は、エネルギーの増加の様子が顕著であることから、エネルギーが上昇してゆくガンマ線を検出することで PBH を検出することが考えられてきた。この方法による PBH の探索はこれまで、100 TeV 付近のエネルギーに最高感度を持つ水チェレンコフ検出器の HAWC、1 TeV 付近のエネルギーに最高感度を持つ大気チェレンコフ望遠鏡の H.E.S.S.、1 GeV 付近のエネルギーに最高感度を持つガンマ線天文衛星 *Fermi-LAT* などを用いて行われており、PBH の個数密度に制限を付けてきた。

本発表では HAWC と H.E.S.S. を用いて、それぞれ PBH の探索を行った文献のレビューを行う。また、次世代大気チェレンコフ望遠鏡である CTA が現在建設中である。CTA は従来の大気チェレンコフ望遠鏡の 10 倍以上の感度を持つことから、PBH の探索が飛躍的に進むことが期待されている。本発表では H.E.S.S. の結果だけでなく、CTA を用いた将来展望についても議論する。

1 序論

1.1 原始ブラックホールと Hawking 放射

原始ブラックホール (Primordial Black Hole, PBH) とは、インフレーションの時に生じた密度揺らぎが、重力崩壊して形成すると考えられているブラックホールであり、宇宙誕生からおおよそ 1 秒以内に形成されたとされる [1]。通常のブラックホールは $1M_{\odot}$ 以下の質量を持つことはできないが、PBH の質量の理論的に予想される範囲は 10^{-5} g から $10^{17}M_{\odot}$ であり、様々な質量を持つことが可能である。PBH は、現在観測されている大質量ブラックホールの起源を自然に説明できるだけでなく、ダークマターの正体である可能性や最初の重力波検出である GW150914 の連星ブラックホールの起源を説明できることから、注目されている。

ブラックホールは量子効果を考慮すると、Hawking 放射と呼ばれる熱的な放射をするとされる [2]。

Hawking 放射の温度 T は [1] によると

$$T = \frac{hc^3}{8\pi GMk_B} \sim 10^{-7} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-1} \text{ K} \quad (1)$$

である。ただし、 M は現在のブラックホールの質量である。(1) より、太陽質量程度のブラックホールで、最大 10^{-7} K 程度の放射なのに対し、PBH は太陽質量より軽い質量まで持つことが可能であり、 10^{17} g より軽い質量のときガンマ線領域まで放射される。

Hawking 放射による個数フラックス $\frac{dN}{dt}$ は、図 1 より、時間と共に上昇していくことがわかる [3]。Hawking 放射によりエネルギーを外部に放出し、ブラックホールの質量は減少することも考慮すると PBH からのガンマ線は時間と共に粒子のエネルギー、フラックスが増加してゆく。

また、PBH 検出に対する感度の指標としてある単位時間あたりに PBH が蒸発する個数密度 \dot{n}_{PBH} があ

る。ここで、 \dot{n}_{PBH} は

$$\dot{n}_{\text{PBH}} = \frac{n_{\text{sig}}}{V_{\text{eff}}} \quad (2)$$

と定義される。ただし、 n_{sig} は予想される PBH からの信号数であり、 V_{eff} は観測可能な体積である。

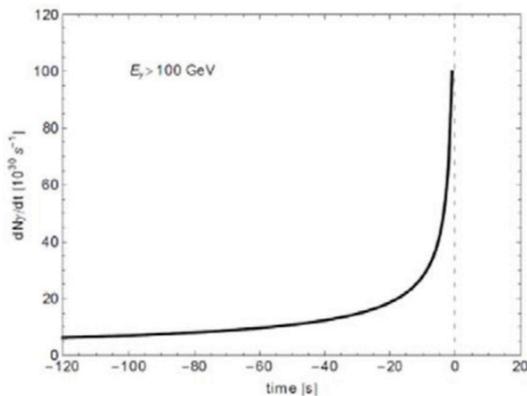


図 1: Hawking 放射による粒子の個数フラックス [3] 図の波線は PBH が蒸発する時間を表し、エネルギーが 100 GeV 以上のガンマ線のみを表している。また、図の時間は PBH が蒸発する時間からの相対的な時間差を表す。

1.2 観測する対象

PBH の検出に用いる解像型大気チェレンコフ望遠鏡 (Imaging Atmospheric Cherenkov Telescope, IACT) や水チェレンコフ検出器は、最高感度が GeV から TeV にある為、その付近のエネルギーの Hawking 放射を観測する。そのエネルギーを放射する PBH は、現在 $10^9 - 10^{10}$ g 程度の質量を持ち、また GeV から TeV で 10–100 秒程度輝く。本稿では、この質量範囲の PBH について考察を行う。

1.3 仮定するモデル

Hawking 放射は (1) で定義されるエネルギー以下の粒子をすべて放射できる。その為、仮定する素粒子物理学のモデルによって放出できる粒子の数が異なり、予想されるガンマ線のフラックスも異なる。以下では、素粒子物理学のモデルとして標準模型を仮定し、PBH からのガンマ線を検出することを考える。

2 大気シャワー

大気に入射したガンマ線あるいは荷電粒子は、地球大気と相互作用し 2 次粒子を作る。2 次粒子はさらに地球大気と相互作用し、3 次粒子、4 次粒子を次々に生み出していく。これらの粒子群のことをまとめて大気シャワーと呼ぶ。IACT や水チェレンコフ望遠鏡ではこの大気シャワーを利用し、間接的に元のガンマ線の情報を復元している。

3 観測装置

3.1 HAWC

HAWC (High Altitude Water Cherenkov Observatory) はメキシコの標高 4100 m に位置する、100 GeV から 100 TeV の範囲にあるガンマ線や荷電粒子を観測することを目的として作られた観測装置である [4]。メインアレイと呼ばれる直径 7.3 m の水を含んだタンク 300 個とアウトトリガーと呼ばれる直径 1.55 m のタンク 345 個から構成される。視野は IACT より広くおおよそ 2 sr ほどである。IACT と比べ長時間観測可能であるという特徴を持ち、1 年の時間うちの 95% 以上観測可能である。

3.2 H.E.S.S.

荷電粒子が空気中の光速を超えると、チェレンコフ光と呼ばれる可視から紫外領域の光を放射する。このチェレンコフ光を地上で捉え、元のガンマ線を間接的に観測することができる。このようにガンマ線を観測する望遠鏡を解像型大気チェレンコフ望遠鏡 (Imaging Atmospheric Cherenkov Telescope, IACT) と呼ぶ。

IACT は HAWC と異なり、シャワー中の荷電粒子ではなく、大気中で発生したチェレンコフ光を観測している。

H.E.S.S.(High Energy Stereoscopic System) はナミビアの標高 1800m に位置する 5 台の IACT で、おおよそ 50 GeV 以上のガンマ線を観測することを目的に建設された。

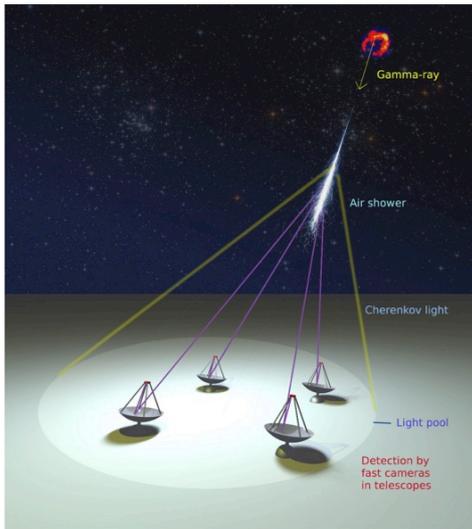


図 2: IACT によるチェレンコフ光観測 [5]

4 観測結果

4.1 解析

何も天体がない方向を観測した際に、突発的なガンマ線信号が観測されているかを調べた。有意な PBH からの信号が検出されなかった際には、各々の観測において、 \dot{n}_{PBH} の 99% 信頼区間の上限値について調べられた。

4.2 HAWC

探索は 2015 年 3 月から 2018 年 5 月までの 959 日間に、HAWC からおおよそ 0.5 pc の距離にある範囲について行われた [4]。これらの探索では PBH からの有意な信号は検出されなかった。また、(2) を用いて観測データから実際に HAWC の \dot{n}_{PBH} の上限値を計算すると、

$$\dot{n}_{\text{PBH}} < 3400_{-100}^{+400} \text{ pc}^{-3} \text{ yr}^{-1} \quad (3)$$

が得られた。

4.3 H.E.S.S.

2004 年 1 月から 2013 年 1 月の間の 2600 時間以上の観測データを用いて PBH の探索が行われた [6]。HAWC の解析と同様な方法で探索が行われたが、H.E.S.S. による探索でも PBH からの有意な信号は検出されなかった。これまでと同様に (2) 式を用いて \dot{n}_{PBH} の上限値を計算すると、

$$\dot{n}_{\text{PBH}} < 56000 \text{ pc}^{-3} \text{ yr}^{-1} \quad (4)$$

が得られた。

5 CTA による探索

5.1 CTA について

CTA (Cherenkov Telescope Array) は現在建設中の次世代ガンマ線望遠鏡である。大・中・小の望遠鏡から成り、南サイト (チリ)・北サイト (スペイン) に建設予定である。現在は北サイトに大口径望遠鏡 (Large-Sized Telescope, LST) 1 号機が完成している。LST は口径が直径 23m あり、高い集光性能を持つ為、暗い信号でも捉えることができる。CTA の感度は従来の IACT の 10 倍以上である [7]。

5.2 予想される CTA の \dot{n}_{PBH}

先行研究 [8] によって行われた推定によると、CTA の感度が H.E.S.S. と比較して 10 倍であると仮定した際には、 \dot{n}_{PBH} に更に強い制限を課すことが可能

となる。感度がこれまでの 10 倍になると (2) 式における V_{eff} の値が変更され、結果的に \dot{n}_{PBH} も変更される。推定された \dot{n}_{PBH} の上限値は、2000 時間の観測で、

$$\dot{n}_{\text{PBH}} < 187 \text{ pc}^{-3} \text{ yr}^{-1} \quad (5)$$

である。

6 結論

これまで、HAWC, H.E.S.S. の観測結果と予想される CTA の観測結果を示してきた。初めに示した HAWC の結果が $\dot{n}_{\text{PBH}} < 3400_{-100}^{+400} \text{ pc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ とこれまでの制限で最も強いものとなっている。これは、観測時間が他の観測装置と比べて長く、観測できる視野も広い為、最も統計数が得られる為である。

一方、IACT の H.E.S.S. の結果では $\dot{n}_{\text{PBH}} < 56000 \text{ pc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ である。これは HAWC の結果よりも 1 桁弱い制限である。しかし、IACT は高いバックグラウンド除去能力を持つことから、PBH に対して高い時間分解能を持つ。これはガンマ線バーストのような高いエネルギーから低いエネルギーに下がっていくイベントと PBH からのガンマ線を区別する際にとても重要になる。これらの理由から IACT で PBH を観測することも重要である。

最後に CTA で予想される結果は $\dot{n}_{\text{PBH}} < 187 \text{ pc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ である。この予想はこれまでの HAWC で得られた結果よりも 10 倍以上の精度で観測可能である。また、CTA による観測は、HAWC や H.E.S.S. に比べて 3 倍以上遠い範囲まで観測が可能であり、これまで探索されていなかった範囲も観測可能である。これらの理由から CTA によって PBH 探索が大きく前進することが期待される。

Reference

- [1] B. J. Carr, Kazunori Kohri, Yuuiti Sendouda, and Jun'ichi Yokoyama. New cosmological constraints on primordial black holes. *Phys. Rev. D*, Vol. 81, p. 104019, 2010.
- [2] S. W. Hawking. Black hole explosions. *Nature*, Vol. 248, pp. 30–31, 1974.
- [3] Jane H MacGibbon, Tilan N. Ukwatta, J. T. Linnemann, S. S. Marinelli, D. Stump, and K. Tollefson. Primordial Black Holes. In *5th International Fermi Symposium*, 3 2015.
- [4] A. Albert, et al. Constraining the Local Burst Rate Density of Primordial Black Holes with HAWC. *JCAP*, Vol. 04, p. 026, 2020.
- [5] Heinrich J. Völk and Konrad Bernlöhr. Imaging Very High Energy Gamma-Ray Telescopes. *Exper. Astron.*, Vol. 25, pp. 173–191, 2009.
- [6] J-F. Glicenstein, A. Barnacka, M. Vivier, and T. Herr. Limits on Primordial Black Hole evaporation with the H.E.S.S. array of Cherenkov telescopes. In *33rd International Cosmic Ray Conference*, 7 2013.
- [7] B. S. Acharya, et al. *Science with the Cherenkov Telescope Array*. WSP, 11 2018.
- [8] Miquel Cassanyes. MAGIC sensitivity to Primordial Black Hole bursts and modelization of BH chromospheres and gamma-ray emission spectra. Master's thesis, 2015.

重字 21

原始ブラックホールを生成するインフレーション

東京大学 理学系研究科物理学専攻
笠井 健太郎

原始ブラックホールを生成するインフレーション

笠井 健太郎 (東京大学大学院 理学系研究科物理学専攻)

Abstract

原始ブラックホールは未だ正体のわかっていない暗黒物質の有力な候補の一つであり、その質量によっては、全ての暗黒物質を説明できる可能性が残されている。原始ブラックホールを生成するには、波長が小さく振幅の大きな宇宙の初期密度揺らぎが必要である。そのような揺らぎを作る有力で自然なメカニズムとして、インフレーションの機構が考えられる。

本発表では、まず文献 [1] に基づいて、宇宙の初期揺らぎに基づいてどのようにして原始ブラックホールが作られるかを議論する。

その上で、そのような初期揺らぎを作るインフレーションのシナリオとして現在考えられているものを紹介する。[2] では、単一のインフラトン場を用いた方法で、inflection point と呼ばれる特徴的な領域を持つようなポテンシャルを用意することによって、波長の小さな初期揺らぎを作ることができる。このモデルでは、比較的広い質量領域の原始ブラックホールを生成することができる。

1 Introduction

暗黒物質は、現代宇宙論における最も大きな謎の一つである。これを説明するシナリオとして、WIMPs、重いアクシオンなどの素粒子標準模型を超える物理が提唱されている。一方で、暗黒物質が原始ブラックホールで構成されているという可能性も指摘されている。原始ブラックホールは、インフレーションの機構により作られる宇宙初期の密度揺らぎにより作られると考えられている。これには振幅の大きな曲率揺らぎのモードが必要である。これを可能にするものとして、1996 年に Garcia-Bellido、Linde、および Wands によって提案された 2 つの場を用いたインフレーション模型が挙げられる [2]。一方で、この講演では、単一の inflaton 場を用いて振幅の大きな揺らぎを生成する機構を議論した、文献 [2] を紹介する。本集録では、その準備として、まず 2 節、3 節において、単一の inflaton 場を用いたインフレーション模型と、宇宙の密度揺らぎの一次摂動の取り扱いについて復習する。また、4 節では [1] に基づいて原始ブラックホールが生成されるために必要な揺らぎの振幅について述べ、5 節では与えられた波長の揺らぎに対してどのタイミングでどの程度の質量の原始ブラックホールが生成されるかを述べる。さらに、6 節では、[2] で議論されているモデルを元に、それ

が与える曲率揺らぎと、原始ブラックホールの存在比について計算する。

2 単一 inflaton 場によるインフレーションの復習

ここでは宇宙がロバートソンウォーカー計量である

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}x^i x^j$$

で記述されるとする。宇宙が Inflaton 場 ϕ で満たされている時、エネルギー運動量テンソルは以下のようにかける。

$$T_{\beta}^{\alpha} = g^{\alpha\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}} - \delta_{\beta}^{\alpha} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\phi}{\partial x^{\nu}} + V(\phi) \right] \quad (1)$$

この発散が 0 という条件から、Inflaton 場は以下の方程式を満たす。

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 \quad (2)$$

また、フリードマン方程式は以下のように書かれる。

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (3)$$

スローロール近似では、Inflaton 場の 2 階微分の項を十分小さいとして無視する。この時、Inflaton 場

は非常にゆっくりとポテンシャル中を転がり、その間はハッブルパラメータの値はほぼ一定となる。すなわち、加速膨張が実現される。具体的には、

$$\epsilon = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \quad (4)$$

$$\delta = \frac{1}{H} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} = \epsilon - \frac{1}{8\pi G} \frac{V_{,\phi\phi}}{V} \quad (5)$$

がともに十分小さい場合、加速膨張が実現される。

3 Inflaton 場と時空の揺らぎ

Inflaton 場の値が空間座標に依存せず、一様等方であるとみなせるが、実際には、そこからのずれが存在する。これが十分小さい場合、摂動として線形に扱うことが可能である。

$$\phi(t, x) = \bar{\phi}(t) + \delta\phi(t, x) \quad (6)$$

Einstein 方程式に従うと、この揺らぎに応じて、時空も一様等方な FRW 計量からのスカラー型の摂動を受ける。共動ゲージと呼ばれるゲージを用いて、線素を

$$ds^2 = a^2(\eta) \{ -(1+2\xi)d\eta^2 + (1+2\zeta)\delta_{ij}dx^i dx^j \} \quad (7)$$

と書く。なお、 η は共形時間である。摂動量 ζ は曲率揺らぎと呼ばれる。

以下では、任意の揺らぎを、その波数 k (共動空間座標に対応する波数) のフーリエ成分ごとに分けて扱うことにする。詳細な説明は省略するが、アインシュタイン方程式などの基礎方程式を用いると、曲率揺らぎの波長 a/k がハッブルホライズン H^{-1} を超えると、その振幅が保存することを示すことができる。

Inflaton 場の揺らぎのパワースペクトルと、揺らぎの波長がハッブルホライズンを超えた後の曲率揺らぎのパワースペクトルはそれぞれ以下のように書ける。

$$P_{\delta\phi}(k) = \frac{H^2}{2k^3} \quad (8)$$

$$P_R(k) = \left(\frac{aH}{\dot{\phi}} \right)^2 P_{\delta\phi}(k) = \frac{2\pi G H^2}{\epsilon k^3} \Big|_{aH=k} \quad (9)$$

揺らぎの振幅は ϵ に反比例するという性質は、後で重要になってくる。

4 原始ブラックホールの質量

原始ブラックホールは、インフレーション後に、揺らぎの波長が再びハッブルホライズン内に入る際、ある閾値を超えた振幅を持つ揺らぎが重力崩壊して生成されると考えられる。波数の絶対値 k の揺らぎが、どの程度の質量の原始ブラックホールを生成するかを議論する。

ハッブルホライズンと同程度の大きさの領域が重力崩壊するので、領域のサイズは生成時期のハッブルパラメータの値を H_{form} として、 $4\pi/3H_{\text{form}}^{-3}$ と見積もることができる。一方、密度は、Friedmann 方程式により

$$\rho_{\text{form}} = \frac{3H_{\text{form}}^2}{8\pi G} \quad (10)$$

と書けるので、原始ブラックホール質量は

$$M_{\text{PBH}} \propto H_{\text{form}}^{-1} \quad (11)$$

と見積もることができる。 H_{form} は、注目している波長の揺らぎが、ハッブルホライズンと同程度のスケールになる時点でのハッブルパラメータの値であるため、 k に依存する量である。従って、原始ブラックホール質量は、それを作る揺らぎの波長に依存する。

5 単一の Inflaton 場を用いた原始ブラックホールの生成

上記の条件を満たすような揺らぎを、単一の Inflaton 場を用いて生成する機構を議論する。ここでは、以下のようなポテンシャルを考える。

$$V(\phi) = \left(\frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{3}\alpha v\phi^3 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \right) (1+\xi\phi^2)^{-2} \quad (12)$$

[2] によると、このポテンシャル型はヒッグスインフレーションの機構において自然と出てくる。これを別のパラメータに変換して、

$$V(x) = \frac{\lambda v^4 x^2 (6 - 4ax + 3x^2)}{12 (1 + bx^2)^2} \quad (13)$$

と書いておく。なお、 $x = \phi/v$, $m^2 = \lambda v^2$, $a = \alpha/\lambda$, $b = \xi v^2$ である。このポテンシャルの形状は、

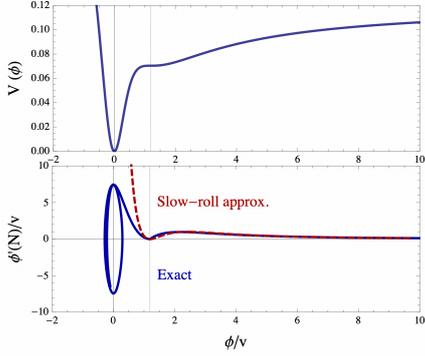


図 1: $a = 1, b = b_c(1) - \beta, b_c(a) = 1 - \frac{1}{3}a^2 + \frac{a^2}{3} \left(\frac{9}{2a^2} - 1 \right)^{\frac{2}{3}}, \beta = 1 \times 10^{-4}$ の時、横軸を x とした時のポテンシャルのグラフ。下側は ϕ と ϕ' の相図で、青線がフリードマン方程式とエネルギー保存則を数値的に解いた結果を示している。文献 [2] より抜粋。

図 1 のようになっている。これを見ると、途中にポテンシャルが局所的に平坦になる部分が存在していることがわかる。これを Inflection point と呼ぶ。最小超対称標準模型におけるインフレーションモデルでは、通常、Inflaton 場の初期値を inflection point に近いもののそれより低い値に設定することが多いのに対し、ここでは、Inflection point よりも大きい値を初期値に取ることにする。[2] では、曲率揺らぎのパワースペクトルを、スローロール近似を用いずに計算している。具体的には、(2),(3) 式を連立させて、数値的に $\phi(t), H(t)$ を求める。さらにスローロールパラメータを

$$\epsilon(\phi) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) \quad (14)$$

の方で定義し、曲率揺らぎに比例する無次元量

$$\mathcal{P}_R = \frac{k^3 P_R(k)}{2\pi^2} = \frac{\kappa^2 H^2}{8\pi^2 \epsilon(\phi)} \quad (15)$$

を、 $aH = k$ となる ϕ の値 (すなわち、揺らぎの振幅がハッブルホライズンを超えるタイミングにおける inflaton 場の値) において計算している。なお、この (20) 式の表式は、スローロール近似を用いなくても成り立つ。

パラメータの値は、CMB の観測による制限を受ける。すなわち、CMB におけるスケールの大きい曲率揺らぎの観測と矛盾してはならない。ここでは、

$k = 0.05 \text{Mpc}^{-1}$ における CMB の観測パラメータに注目する。

$$\ln(10^{10} A_s^2) = 3.094 \pm 0.068$$

$$n_s = \frac{d \ln \mathcal{P}_R}{d \ln k} = 0.9569 \pm 0.0154$$

$$\frac{dn_s}{d \ln k} = 0.011 \pm 0.028$$

$$r = 16\epsilon < 0.09$$

なお、 $N(\phi)$ はその時点からインフレーション終了までにスケールファクターが e の何乗分変化するかを表す量で、

$$N(\phi) = \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi} \frac{\kappa d\phi}{\sqrt{2\epsilon(\phi)}} \quad (16)$$

と定義される。また、このモデルにおいて

$$n_s = 1 - 2\epsilon(N) + \frac{\epsilon'(N)}{\epsilon(N)} \quad (17)$$

が成り立つ。さらに、

$$A_s^2 = \mathcal{P}_R(N = 62)$$

である。

上の制限を満たすようにパラメータの値を色々動かして、曲率揺らぎのパワースペクトルを厳密に計算した結果を以下の図 2 に示す。具体的には、スペクトルが極小を取る N の値を $N = 35$ 、 $\beta = 10^{-4}$ 、 $n_s = 0.954$ となるように $a, \kappa^2 v^2$ の値を動かしている。

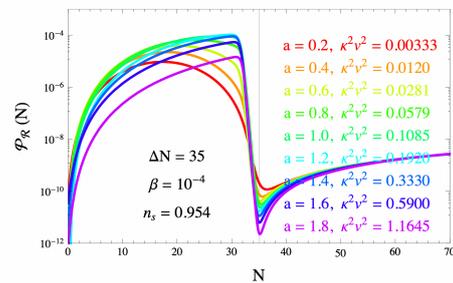


図 2: N と曲率揺らぎ \mathcal{P}_R の関係。文献 2 より抜粋。

場の配位が Inflection point あたりにあるとき、ス

ローロールパラメータ ϵ は小さくなるので、曲率揺らぎのパワースペクトルは極大値をとる。それだけでなく、Inflaton 場は、この inflection point 近傍で非常にゆっくりと変化するので、inflection point 近傍にしばらくとどまる。パワースペクトルが極大値付近をとる時間が長いため、その分、その時間に対応する波長の幅（そのタイミングでハッブルホライズンを超えるような揺らぎの波長）が大きくなる。実際、図 2 を見ると、実際広い波数の領域で曲率揺らぎの極大が実現されていることがわかる。生成されるブラックホールの質量は揺らぎの波長で決まるため、広い質量領域の原始ブラックホールを生成することができる。一方で、揺らぎの振幅はいずれも 10^{-4} 程度のオーダーにとどまっていることがわかる。最後に、原始ブラックホールの存在比について言及する。ここでは、揺らぎの振幅がガウス型の確率分布をしていると仮定すると、ある時刻 $t = t_M$ において重力崩壊により質量 M の原始ブラックホールができる確率は、重力崩壊する揺らぎの振幅の閾値を ζ_c として、

$$\begin{aligned} \beta^{\text{form}}(M) &= \frac{\rho_{\text{PBH}}(M)}{\rho_{\text{tot}}} \Big|_{t=t_M} \\ &= \int_{\zeta_c}^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{2\pi\zeta_c}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\sigma^2}\right) \simeq \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\zeta_c}} \exp\left(-\frac{\zeta_c^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (18)$$

と書ける。ここで、

$$\langle \zeta^2 \rangle = \sigma^2 = \mathcal{P}_R(k_M)$$

で、 k_M は時刻 t_M においてハッブルホライズン内に入る揺らぎの波数である。また、 σ は ζ_c に比べて十分小さいとした。なお、 ζ_c は流体の状態方程式に主に依存し、例えば輻射優勢期においては $\zeta = 0.086$ となる。このようにして、 β は σ を通して k_M に依存し、さらに k_M は揺らぎの波長がハッブルホライズンと一致する条件 $aH_{\text{form}} = k_M$ と (16) 式を通して M に依存していることに注意すると、 $\beta^{\text{form}}(M)$ の関数を求めることができる。さらに、この β^{form} を用いると、質量 M の原始ブラックホールの、輻射と物質のエネルギー密度が等しくなる時期における宇宙全体に対する質量比 β^{eq} を求めることができ、

$$\beta_{\text{PBH}}^{\text{eq}}(M) = \frac{a_{\text{eq}}}{a(t_M)} \beta^{\text{form}}(M) \quad (19)$$

となる。さらに、これを元に、その時期における原始ブラックホールの宇宙全体に対する存在比は、

$$\Omega_{\text{PBH}}^{\text{eq}} = \int_{M^*}^{M_{\text{eq}}} \frac{dM}{M} \beta^{\text{eq}}(M) \quad (20)$$

と表される。なお、 M^* は、その時期までに原始ブラックホールが蒸発しない質量の下限であり、 M_{eq} はその時期において形成される原始ブラックホールの質量である。一例として、このモデルにおいて、パラメータを $a = 1, b = b_c(1) - \beta, \kappa^2 v^2 = 0.108, \beta = 1 \times 10^{-4}, \zeta_c = 0.0753$ とすると、 $\Omega_{\text{PBH}}^{\text{eq}} = 0.42$ となり、現在宇宙に存在するダークマターの全てを原始ブラックホールで説明できる。

6 Conclusion

今回は、単一の inflaton 場を用いたインフレーションモデルによる原始ブラックホールの生成について考えた。その際、inflaton 場の値が、ポテンシャル中の inflection point と呼ばれる特徴的な点を通る際に曲率揺らぎの極大が実現されることを利用した。曲率揺らぎのオーダーは、CMB 観測に矛盾しないパラメータの選び方にはあまり依存せず、どれも 10^{-4} 程度であることがわかった。また、ダークマターの全てを説明できるパラメータ領域が存在することもわかった。

Reference

- [1] Misao Sasaki & Teruaki Suyama & Takahito Tanaka & Shuichiro Yokoyama 2018, astro-ph.CO
- [2] J. Garcia-Bellido & E. Ruiz Morales 2017, Phys. Dark Univ

重字 22

曲率ピークの形状が原始ブラックホール形成において
サイズに及ぼす影響

名古屋大学 理学研究科素粒子宇宙物理学専攻
上原 晃一朗

曲率ピークの形状が原始ブラックホール形成においてサイズに及ぼす影響

上原 晃一郎 (名古屋大学大学院 理学研究科 QG 研)

Abstract

本発表では論文 (A. Escrivà, C. Germani, & R. K. Sheth 2021), (A. Escrivà & A. E. Romano 2021) をレビューする。輻射優勢な Friedman-Robertson-Walker (FRW) 宇宙において初期曲率ゆらぎの異なるプロファイルから起こる球対称な原始ブラックホール (Primordial Black Hole, PBH) 形成についてなされた数値解析を紹介する。Apparent horizon 形成時 t_{AH} での PBH の始質量 $M_{BH,i}$ と降着過程を経た後の終質量 $M_{BH,f}$ の曲率プロファイルに対する依存性について、その問題設定や解析手法を紹介する。

1 導入

原始ブラックホール (Primordial Black Hole, PBH) は初期宇宙において形成されるブラックホールの総称で、典型的にはインフレーションの際に生じた密度ゆらぎの初期分布において、稀な高い非線形ピークによって PBH 生成が起こるとされる。これらは暗黒物質候補の一つとされ、暗黒物質が PBH の形である程度の割合で存在するシナリオが考えられている。

密度ゆらぎの重力崩壊に起因する PBH 形成の数値計算は以前からなされており、そこで得られるブラックホール形成に必要な初期振幅の閾値や形成されるブラックホール質量は、理論モデルから PBH 量の見積もりを行う上で欠かせない要素となっている。これまでに PBH 形成の閾値付近では PBH の質量が自己相似スケーリング則に従うことが示されているが、apparent horizon 形成時 t_{AH} の PBH のサイズと質量降着の影響について複数の初期プロファイルを用いた系統的な数値解析は行われていなかった。

論文 (A. Escrivà, C. Germani, & R. K. Sheth 2021) では PBH 形成の閾値が主に compaction function (所与の体積内での質量超過を表す) のピーク付近の形状と状態方程式に依存することが示され、宇宙論的に十分精度の良い解析的な公式の構築がなされた。これらに加え、始質量 $M_{BH,i}$ や終質量 $M_{BH,f}$ に対する曲率プロファイルの形状や閾値に対する依存性、質量降着の推定などについて PBH 形成を数値的に調べたのが (A. Escrivà & A. E. Romano 2021) である。これらの初期曲率ゆらぎは主に球対称性を仮定して解析されているが、今後の発展として非球

対称での摂動からなる PBH 形成における数値計算などで調べることも期待される。

本発表では主に PBH 形成の数値計算の初期条件と計算手法、閾値や apparent horizon の条件、並びに降着プロセスの解析について紹介する。

2 PBH 形成の設定

PBH 形成にいたる球対称ゆらぎの時間発展を考える。球対称な相対論的完全流体の非線形な時間発展を記述する微分方程式として、Misner-Sharp 方程式 (C. W. Misner & D. H. Sharp 1964) を考える。まず球対称時空は以下の計量で記述される。

$$ds^2 = -A(r, t)^2 dt^2 + B(r, t)^2 dr^2 + R(r, t)^2 d\Omega^2. \quad (1)$$

重力ポテンシャルと運動エネルギーからの寄与を含む Misner-Sharp mass は

$$M(r, t) \equiv \int_0^R dr 4\pi R^2 \rho \partial_r R, \quad (2)$$

ここで次の不変量が定義される

$$\Gamma = \sqrt{1 + U^2 - \frac{2M}{R}}. \quad (3)$$

$U(r, t)$ はオイラー座標での流体の動径速度を表す量である。

状態方程式 $p = w\rho$ (輻射流体の場合 $w = 1/3$) の完全流体を考え、Misner-Sharp 方程式は次の形で記述される。

$$\partial_t U = -A \left[\frac{w}{1+w} \frac{\Gamma^2}{\rho} \frac{\partial_r \rho}{\partial_t R} + \frac{M}{R^2} + 4\pi R w \rho \right], \quad (4)$$

$$\partial_t R = AU, \quad (5)$$

$$\partial_t \rho = -A \rho (1+w) \left(2 \frac{U}{R} + \frac{\partial_r U}{\partial_r R} \right), \quad (6)$$

$$\partial_t M = -4\pi A w \rho U R^2. \quad (7)$$

境界条件は $R(r=0, t) = 0, U(r=0, t) = 0$ として $M(r=0, t) = 0$ を課す。球対称性を考慮し、 $\partial_r p(r=0, t) = 0$ を得る。これらの方程式系を FRW background で解くことを考える。Eq.(1) は $r \rightarrow \infty$ で FRW background となる。

Gradient expansion(long wavelength) 近似を用いることで Misner-Sharp 方程式を $\epsilon \ll 1$ の leading order で解くことができる。ここで $\epsilon(t) = R_H(t)/a(t)r_m$ である。 r_m は今考えている摂動の長さのスケールで、 $R_H(t) = 1/H(t)$ は cosmological horizon である。

宇宙論的摂動の振幅を球対称領域での質量超過によって以下のように定義する。

$$\delta(r, t) = \frac{1}{V} \int_0^R dr 4\pi R^2 \frac{\delta \rho}{\rho_b} \partial_r R \simeq \left(\frac{1}{aHr_m} \right)^2 \bar{\delta}(r), \quad (8)$$

ここで $V = 4\pi R^3/3$ 。

(I. Musco 2019) より gradient expansion 近似で

$$C(r) = f(w)K(r)r^2 = \frac{r^2}{r_m^2} \bar{\delta}(r), \quad (9)$$

$$C(r_m) = \bar{\delta}(r_m) = \bar{\delta}_m. \quad (10)$$

Eq.(1) は superhorizon scale で gradient expansion(long wavelength) 近似をとると次の形に帰着する (M. Shibata & M. Sasaki 1999)。

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - K(r)r^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (11)$$

宇宙論的摂動はこの初期曲率 $K(r)$ に対して関連付けられる。Gradient expansion の leading term として、所与の体積内での質量超過を表す compaction function $C(r)$ は積 $K(r)r^2$ に比例する。特に、

$$C(r) \simeq \frac{2\delta M(r, t)}{R(r, t)} = \frac{2[M(r, t) - M_b(r, t)]}{R(r, t)}. \quad (12)$$

PBH 形成の基準の一つとして compaction function の peak value $C_{\max} = C(r_m)$ が用いられる (M. Shibata & M. Sasaki 1999), (T. Harada, C.-M. Yoo, T. Nakama, & Y. Koga 2015)。 r_m は peak 位置である。 $\bar{\delta}(r_m) \geq \delta_c$ において PBH が形成されるような閾値 $\delta_c = C_c(r_m)$ を定義する。ここで $\bar{\delta}(r) = f(w)K(r)r_m^2, f(w) = 3(1+w)/(5+3w), C_c(r)$ は critical compaction function とする。

初期条件を指定することはある特定の曲率プロファイル $K(r)$ を選ぶことに対応している。Compaction function $C(r)$ は superhorizon scale にある時は一定であるが、計算を開始すると非線形な時間発展が起こる。 $\bar{\delta}(r_m) > \delta_c$, すなわち $C(r_m) > \delta_c$ になると、重力による圧縮が圧力勾配と背景宇宙の膨張に勝ることになる。これによって apparent horizon が形成された後に BH 形成が起こると考えられる。

3 数値手法

本発表では詳細な数値手法については立ち入らず概略を述べるに止める。PBH 形成の研究では以前から主に差分法が用いられてきたが、この研究は Pseudospectral methods を用いているのが特徴であり、誤差の収束性と基底関数の定義域の広さにおいてメリットがある。この手法を用いて Misner-Sharp 方程式を解く。

一度 apparent horizon が形成されると、特異点が存在してしまい数値計算に困難が生じてしまう。この困難を回避し、FRW background から降着過程を追うための技術の一つが excision と呼ばれるものである。これは event horizon の内側の影響が外側に及ばないと見なし、各時刻での apparent horizon の動きを追うことができる。

4 Apparent horizon 形成

まず $2M(r_{AH}, t_{AH}) = R(r_{AH}, t_{AH})$, 動径座標 r_{AH} で apparent horizon が形成される時刻 $t = t_{AH}$ での PBH のサイズを計算する。計算は以下の異なる初期曲率ゆらぎそれぞれに対して行う (A. Escrivá,

C. Germani, & R. K. Sheth 2020),(A. Escrivà, C. Germani, & R. K. Sheth 2021),(I. Musco 2019)

$$K_{\text{basis}}(r) = \frac{C(r_m)}{f(w)r_m^2} \frac{1 + 1/q}{1 + \frac{1}{q} \left(\frac{r}{r_m}\right)^{2(q+1)}}, \quad (13)$$

$$K_{\text{exp}}(r) = \frac{C(r_m)}{f(w)r_m^2} \left(\frac{r}{r_m}\right)^{2\lambda} e^{\frac{(1+\lambda)^2}{q} \left(1 - \left(\frac{r}{r_m}\right)^{\frac{2q}{1+\lambda}}\right)}. \quad (14)$$

ここで無次元パラメータとして $C(r)$ の最大値での曲率について

$$q = \frac{-r_m^2 \partial_{rr} C(r_m)}{4C(r_m)} \quad (15)$$

を定義する. PBH 形成の閾値はこの q と状態方程式にのみ依存することが知られている. (A. Escrivà, C. Germani, & R. K. Sheth 2020),(A. Escrivà, C. Germani, & R. K. Sheth 2021). Eq.(13) は輻射に対応する範囲 $0.4 \leq \delta_c \leq 2/3$ においてパラメータ q に関する全ての可能な閾値 δ_c が得られるという意味で完全基底である.

t_{AH} での PBH の面積半径 $R_{\text{BH},i} = R(r_{AH}, t_{AH})$ と Hubble 半径 $R_{H,i}$ の比をプロットしたのが図 (2) である. 予想されていた通り, ゆらぎが cosmological horizon に再突入して崩壊することにより, 全ての PBH で $R_{\text{BH},i} < R_{H,i}$ となる. (T. Harada & B. J. Carr 2005) では $R_{\text{BH},i}/R_{H,i}$ の上限が解析的に求められた.

$$\left(\frac{R_{\text{BH},i}}{R_{H,i}}\right)_{\text{max}} = \left(\frac{2}{1+3w}\right)^3 \left[\frac{3(1+w)}{2(1+\sqrt{w})}\right]^{\frac{3(1+w)}{1+3w}} w^{3/2}. \quad (16)$$

5 降着の効果

Apparent horizon が形成された後は降着過程に移り, 終質量 $M_{\text{BH},f}$ で安定するまで BH のサイズが増大する.

BH の時間発展において充分時間が経つとその質量は以下の方程式に従うことが示されている.

$$\frac{dM_{\text{BH}}}{dt} = 4\pi F R_{\text{BH}}^2 \rho_b(t), \quad (17)$$

ここで F は accretion rate constant である.

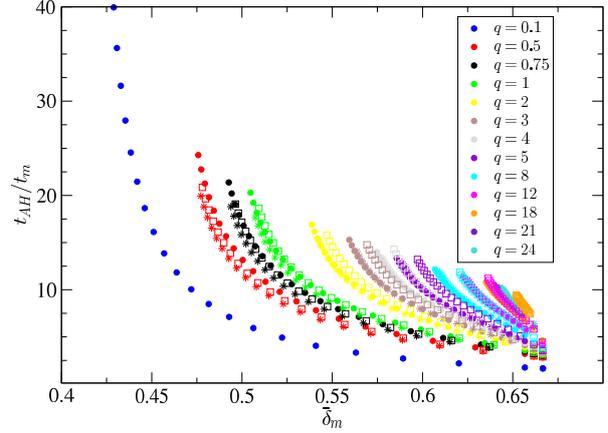


図 1: (A. Escrivà & A. E. Romano 2021) 異なる q に対する $\bar{\delta}_m$ の関数としての t_{AH}/t_H . 予想されていた通り q が減ると $\bar{\delta}_m$ の最小値, すなわち δ_c も減少する. 円印は Eq.(13), 星印は Eq.(14) で $\lambda = 0$, 四角は Eq.(14) で $\lambda = 1$ を表す.

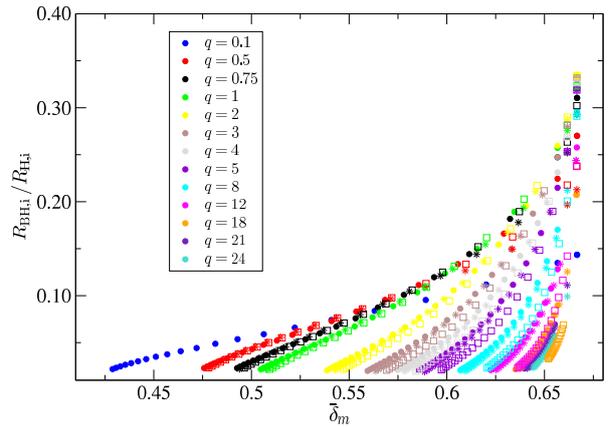


図 2: (A. Escrivà & A. E. Romano 2021) 異なる q に対する比 $R_{\text{BH},i}/R_{H,i}$. q が減ると $\bar{\delta}_m$ の最小値, すなわち δ_c も減少する. 円印は Eq.(13), 星印は Eq.(14) で $\lambda = 0$, 四角は Eq.(14) で $\lambda = 1$ を表す.

Eq.(17) の輻射優勢期での解析解は

$$M_{\text{BH}}(t) = \frac{1}{\frac{1}{M_a} + \frac{3}{2}F \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_a}\right)}, \quad (18)$$

M_a と t_a は初期条件である.

一度最適な fitting parameter が決定されると, 最

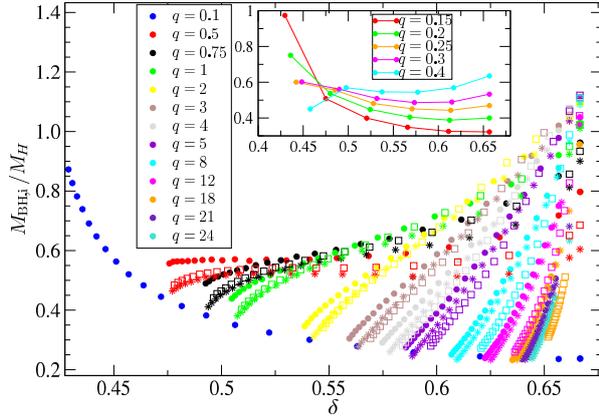


図 3: (A. Escrivà & A. E. Romano 2021) 異なる q に対する比 $M_{\text{BH},i}/M_H$. q が減ると $\bar{\delta}_m$ の最小値, すなわち δ_c も減少する. 円印は Eq.(13), 星印は Eq.(14) で $\lambda = 0$, 四角は Eq.(14) で $\lambda = 1$ を表す.

終的な PBH の質量は漸近的な未来極限として得られ,

$$M_{\text{BH},f} = \lim_{t \rightarrow \infty} M_{\text{BH}}(t) = \left(\frac{1}{M_a} - \frac{3F}{2t_a} \right)^{-1}. \quad (19)$$

$\bar{\delta}_m \approx \delta_c$ において以下のようなスケーリング則が見された. (J. C. Niemeyer & K. Jedamzik 1998),(A. G. Polnarev & I. Musco 2007)

$$M_{\text{BH},f} = M_H \mathcal{K} (\bar{\delta}_m - \delta_c)^\gamma. \quad (20)$$

輻射優勢では $\gamma \approx 0.36$ で, \mathcal{K} は曲率プロファイル毎に決まる定数である.

$C(r)$ のピークから十分離れた質量超過の存在を調整するために, Eq.(13) の二つの曲率の接合部に由来する別のプロファイルを使用する. これを two-tower プロファイルと呼ぶ. compaction function C_b としての表現は直接 Eq.(21) で与えられる,

$$C_{tt}(r) = C_b(r, \delta_1, q_1, r_{m1}) + \theta(r - r_j) C_b(r - r_j, \delta_2, q_2, r_{m2}), \quad (21)$$

$$C_b(r, \delta_j, q_j, r_{mj}) = \delta_j \left(\frac{r}{r_{mj}} \right)^2 \frac{1 + 1/q_j}{1 + \frac{1}{q_j} \left(\frac{r}{r_{mj}} \right)^{2(q_j+1)}} \quad (22)$$

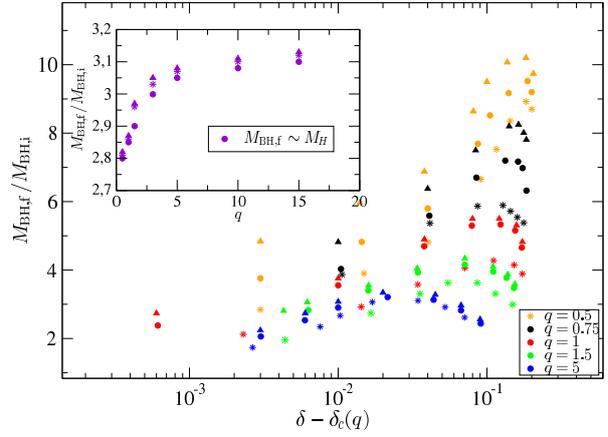


図 4: (A. Escrivà & A. E. Romano 2021) 異なるプロファイルに対して $\bar{\delta}_m - \delta_c(q)$ の関数としてプロットした比 $M_{\text{BH},f}/M_{\text{BH},i}$. 円印は Eq.(13), 星印は Eq.(14) で $\lambda = 0$, 三角は Eq.(21) を表す. subplot は $M_{\text{BH},f} \approx M_H$ の PBH についての比 $M_{\text{BH},f}/M_{\text{BH},i}$ を表す.

謝辞

研究室でセミナーをして頂いた著者の Albert Escrivà さん並びに日頃指導して頂いている講師の柳哲文さん, QG 研の皆様に深く感謝申し上げます.

Reference

- A. Escrivà, C. Germani, & R. K. Sheth, JCAP 01, (2021) 030
- A. Escrivà & A. E. Romano, JCAP 05, (2021) 066
- C. W. Misner & D. H. Sharp, Phys. Rev.136, B571 (1964)
- M. Shibata & M. Sasaki, Phys. Rev. D60, 084002 (1999)
- T. Harada, C.-M. Yoo, T. Nakama, & Y. Koga, Phys.Rev. D91, 084057 (2015)
- A. Escrivà, C. Germani, & R. K. Sheth, Phys. Rev. D101, 044022 (2020)
- I. Musco, Phys. Rev. D100, 123524 (2019)
- J. C. Niemeyer & K. Jedamzik, Phys. Rev. Lett.80,5481 (1998)
- A. G. Polnarev & I. Musco, Classical and Quantum Gravity24, 1405 (2007)
- T. Harada & B. J. Carr, Phys. Rev. D71, 104009(2005)

重宇 23

Cosmic No-hair Conjecture and Inflation with an $SU(3)$
Gauge Field

神戸大学 理学研究科物理学専攻
Gao Pengyuan

未提出

重字 24

閉じた宇宙における axion-SU(2) モデル

立教大学 理学研究科物理学専攻
村田 知瞭

閉じた宇宙における axion-SU(2) モデル

村田 知瞭 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

本研究では、axion-SU(2) インフレーションモデルに対する正の空間曲率の影響を調査した。適切な ansatz の下では、ゲージ場の項からも空間曲率の影響が現れるため、空間曲率の非自明な影響が現れることが分かった。正の空間曲率が存在する宇宙において、単一スカラー場モデルではインフレーションが起りにくくなり、短時間で宇宙が潰れてしまう可能性がある。しかし、axion-SU(2) モデルではこの結果と異なり、正の空間曲率が存在する宇宙においても潰れにくくなるということが分かった。また、spectator として axion-SU(2) モデルを入れた場合、さらに潰れにくくなることが分かった。

1 Introduction

インフレーションとは、ビッグバンの前にあったとされる急激な加速膨張のことである。この機構により、宇宙が一様等方かつ平坦という状況を自然に作り出すことができ、標準ビッグバン理論の初期条件に関する問題を解決することができる。これまでの観測結果からインフレーションがあったことはほぼ確実にされているが、具体的なモデルの特定には至っておらず、現在も様々なインフレーションモデルが研究されている。

インフレーションを実現する簡単なモデルとして、単一スカラー場によるスローロールインフレーションモデルがよく研究されている。このモデルは、スカラー場が十分平らなポテンシャルをスローロールすることにより、そのポテンシャルエネルギーで加速膨張を引き起こすことができる。その他にも近年はベクトル場を含むモデルが数多く考案されている。

特にベクトル場を含むモデルでは、インフレーション前の非等方性が残り続けてしまう可能性が指摘されている [1]。つまり、ベクトル場を含むインフレーションモデルは初期条件に対して非自明な依存性を持っている可能性があり、十分に調査する必要がある。今回はベクトル場を含むモデルの中でも、原始重力波の予言に特徴が見られることで注目される axion-SU(2) モデルを考える。このモデルは既に、非等方な初期条件に対して等方な解がアトラクターになっていることが調べられている [2]。本研究ではその次の段階として、初期に空間曲率 (非平坦性) が存在する場合

にも適切にインフレーションが起こるのかを調べた [3]。また、単一場モデルに対してインフレーション前に正の空間曲率を加えると、インフレーションが起りにくくなり、短い時間で宇宙が潰れてしまう可能性があることが調べられている [4]。このことから、ベクトル場を含むモデルにおいても正の空間曲率のインフレーションへの影響を探ることは重要である。

本研究は、まず Sec. 2 で axion-SU(2) モデルを導入した。その後、閉じた宇宙において一様等方性と整合的なゲージ場の ansatz を導入し、基礎方程式を導出した。Sec. 3 では、これらを元に導出した基礎方程式を数値的に解いた。Sec. 4 では、Sec. 3 での結果を spectator axion-SU(2) モデルに拡張した。Sec. 5 で結論、Sec. 6 で今後の展望をまとめた。

2 Axion-SU(2) モデル

Axion-SU(2) モデルの Lagrangian は、

$$\mathcal{L}_{\text{CN}} = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \mu^4 \left(1 + \cos \frac{\chi}{f} \right) - \frac{\lambda}{4f} \chi \tilde{F}_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (1)$$

で与えられる¹。 χ は axion、 f は axion の崩壊定数、 μ, λ は結合定数である。 $F_{\mu\nu}^a$ は SU(2) ゲージ場 A_μ^a を用いて、

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_A \epsilon_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2)$$

¹ $c = \hbar = 1$ の単位系を用いる。

で与えられる。 g_A はゲージ場の結合定数、 ϵ_{bc}^a は SU(2) の構造定数で 3 次元の完全反対称記号である。また、 $\tilde{F}_{\mu\nu}^a$ は $F_{\mu\nu}^a$ のホッジ双対である。

このモデルの平坦な場合のシナリオについて簡単にまとめる。基本的には単一場モデルと同じく、axion がポテンシャルの坂を転がることでインフレーションを起こす。一番の違いはゲージ場との相互作用項であり、この項により axion がポテンシャルの坂を急速に転がるのを抑える (減速させる) 役割を果たす。その結果、このモデルではポテンシャルの形に依らずスローロールインフレーションを起こすことができる。

ゲージ場の ansatz: 本研究では閉じた宇宙を考えている。この時計量は

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [dr^2 + S^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 $a(t)$ はスケールファクターで、閉じた宇宙 ($\mathcal{K} > 0$) では

$$S(r) = \frac{\sin(\sqrt{\mathcal{K}}r)}{\sqrt{\mathcal{K}}}, \quad (4)$$

であり、 \mathcal{K} は空間曲率を表す。平坦な時空 ($\mathcal{K} = 0$) におけるゲージ場を考える場合は、temporal ゲージ $A_0^a = 0$ と $A_i^a = a\psi\delta_i^a$ という ansatz を用いられる。しかし、空間曲率を含む場合にこのような ansatz を用いると、作用の FF や $\tilde{F}F$ の項に空間依存性が現れ、一様性に反してしまう。そこで、[5] で考案された ansatz、

$$g_A A_0^a = 0, \quad g_A A_1^a = a\psi L_1^a, \quad (5)$$

$$g_A A_2^a = a\psi SL_2^a - \left(1 - \sqrt{1 - \mathcal{K}S^2}\right) L_3^a, \quad (6)$$

$$g_A A_3^a = \left[\left(1 - \sqrt{1 - \mathcal{K}S^2}\right) L_2^a + a\psi SL_3^a\right] \sin\theta, \quad (7)$$

を用いる。ここで、 $\psi(t)$ は t のみの関数で、 L_i^a は、

$$L_1^a = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta), \quad (8)$$

$$L_2^a = (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, -\sin\theta), \quad (9)$$

$$L_3^a = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad (10)$$

で定義される。この ansatz を用いることで、ゲージ場の項は

$$F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} = -\frac{6}{g_A^2} \left[\left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a}\psi\right)^2 - \left(\psi^2 - \frac{\mathcal{K}}{a^2}\right)^2 \right], \quad (11)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} = \frac{12}{g_A^2} \left(\dot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a}\psi\right) \left(\psi^2 - \frac{\mathcal{K}}{a^2}\right) \quad (12)$$

となり、一様等方性と整合的となる。

基礎方程式: ここから、axion とゲージ場の運動方程式は

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - \frac{\mu^4}{f} \sin\frac{\chi}{f} = -\frac{3\lambda}{fg_A^2} \left(\dot{\psi} + H\psi\right) \left(\psi^2 - \frac{\mathcal{K}}{a^2}\right), \quad (13)$$

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + \left(\dot{H} + 2H^2\right)\psi = \left(\frac{\lambda}{f}\dot{\chi} - 2\psi\right) \left(\psi^2 - \frac{\mathcal{K}}{a^2}\right), \quad (14)$$

と求まる。ここで、 $H := \dot{a}/a$ はハッブルパラメータである。また、アインシュタイン方程式は、

$$3M_{\text{Pl}}^2 \left(H^2 + \frac{\mathcal{K}}{a^2}\right) = \frac{\dot{\chi}^2}{2} + \mu^4 \left(1 + \cos\frac{\chi}{f}\right) + \rho_\psi, \quad (15)$$

$$-2M_{\text{Pl}}^2 \left(\dot{H} - \frac{\mathcal{K}}{a^2}\right) = \dot{\chi}^2 + \frac{4}{3}\rho_\psi, \quad (16)$$

である。ここで、

$$\rho_\psi = \frac{3}{2g_A^2} \left[\left(\dot{\psi} + H\psi\right)^2 + \left(\psi^2 - \frac{\mathcal{K}}{a^2}\right)^2 \right], \quad (17)$$

である。ゲージ場の存在により空間曲率が物質場の方からも現れるため、空間曲率による非自明な影響が期待される。次の section ではこれらの基礎方程式を具体的に評価し、数値的に解くことでダイナミクスを調べる。

3 Results

今回は空間曲率の影響に注目するために、axion とゲージ場の運動エネルギーよりも空間曲率が十分大きい ($\dot{\chi}, \dot{\psi} \ll \mathcal{K}$) とする。この時 Eq. (15) は

$$3M_{\text{Pl}}^2 H^2 \simeq \frac{3}{2g_A^2} \frac{\mathcal{K}^2}{a^4} - 3M_{\text{Pl}}^2 \frac{\mathcal{K}}{a^2} + 2H_*^2, \quad (18)$$

の形になる。ここで、今後の簡単のために axion のポテンシャルのスケールを $H_* := \mu^2/M_{\text{Pl}}$ と書いた。この式を無次元化すると、

$$1 \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{H}{g_A M_{\text{Pl}}} \right)^2 \left(\frac{\mathcal{K}}{a^2 H^2} \right)^2 - \frac{\mathcal{K}}{a^2 H^2} + \frac{2}{3} \left(\frac{H_*}{H} \right)^2, \quad (19)$$

となる。ここで、 $H \sim H_*$ と $\mathcal{K}/a^2 H_*^2 \sim 1$ の場合を考える。初期に axion のポテンシャルと同程度の空間曲率が存在する場合でも、右辺第 1 項のおかげで第 2 項の影響を薄めることができるため、単一場の場合よりも空間曲率の影響を受けにくくなっていることが分かる。つまり、ゲージ場の支えにより宇宙が潰れるのを回避しやすくなるということが分かる。そして第 1 項の影響を決めるのは g_A であり、 $g_A < H_*$ の場合はこの効果が顕著で潰れにくくなり、逆に $g_A > H_*$ の場合は第 1 項の影響が小さく単一場の場合と同じく潰れやすくなると考えられる²。このことを数値的に示したのが、図 1 である。縦軸に空間曲率 \mathcal{K}/H_*^2 、横軸に g_A/H_* をとり、axion の初期条件として

$$(\chi_0, \dot{\chi}_0) = (10^{-2}\pi f, 0), \quad (20)$$

を与えた。パラメータは $(f, \mu, \lambda) = (10^{-2}M_{\text{Pl}}, 10^{-3}M_{\text{Pl}}, 2 \times 10^2)$ とした³。先程の見積りの通り g_A が小さいほど潰れにくいことが分かる。

次に、空間曲率が axion のポテンシャルスケールと同程度存在した場合の解軌道を図 2 に描いた。ここから、axion もゲージ場も $H_* t \simeq 3$ 付近で急激な変化が起こっていることが分かる。これは Eq. (13) の右辺が 0 になる時、つまり $\psi^2 = \mathcal{K}/a^2$ の瞬間に相互作用が切れたためである。この瞬間にゲージ場のブレーキが失われるため、ポテンシャルの反対側まで急速に転がってしまう。そして、再度ゲージ場のブレーキが働き始めることで、スローロールしながら十分にインフレーションすることができる。

4 Spectator axion-SU(2)

ここでは、簡単に spectator として axion-SU(2) モデルが存在している場合も考える。inflaton を ϕ と

²ただし、 $g_A \ll H_*$ の場合は Eq. (15) を満たせないため適切な初期条件を選ばない。

³数値計算中は、 $M_{\text{Pl}} = 1$ とする。

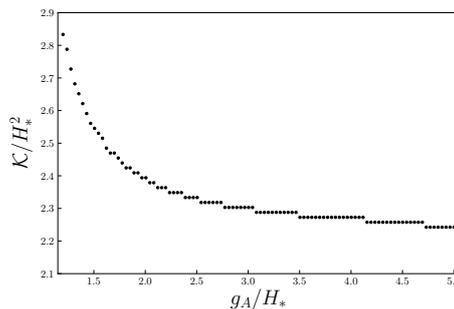


図 1: 黒ドットは宇宙が潰れた境界を表しており、上の領域が潰れた領域である。ゲージ場の初期条件は $\psi_0 = 10^{-7}M_{\text{Pl}}$ で、 $H_0 = 10^{-6}M_{\text{Pl}}$ として、 ψ_0 は Eq. (15) から決めた。

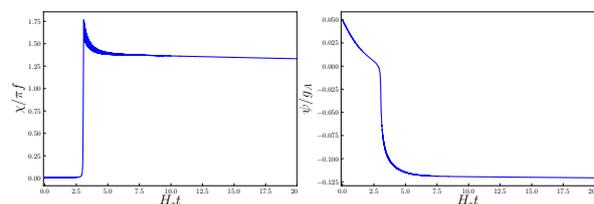


図 2: 左が axion で右がゲージ場の解軌道。パラメータは $(\mathcal{K}, g_A) = (0.5H_*^2, 2 \times 10^{-6})$ を用いた。axion の初期条件は Eq. (20)、ゲージ場の初期条件は $(\psi_0, \dot{\psi}_0) = (10^{-7}M_{\text{Pl}}, -10^{-12}M_{\text{Pl}}^2)$ で与えた。

すると、Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{CN}} - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \alpha \mu^4 \left(1 + \cos \frac{\phi}{f} \right), \quad (21)$$

で与えられる。ここで、 α は定数で、axion と inflaton とのポテンシャルの比率に対応する ($\alpha > 1$)。inflaton のポテンシャルは $V_{\text{inf}} \sim 2\alpha H_*^2$ となるので、これは Eq. (18) において、 $H_* \rightarrow (1 + \alpha)^{1/2} H_*$ とリスケーリングすることに相当する。したがって、相対的に g_A/H_* の値は小さくなるので、先程の計算と同じように潰れにくくなる。

ここから、spectator として axion-SU(2) モデルが存在する場合は、axion-SU(2) モデルのみの場合や単一場モデルと比べてさらに潰れにくくなることがわかる。

5 Conclusion

本研究では閉じた宇宙における axion-SU(2) モデルのダイナミクスを調べた。結果として、ゲージ場の結合定数とハッブルパラメータの比 g_A/H が小さ

い時は宇宙が潰れにくくなることが分かった。また、axion の相互作用項にゲージ場を通して空間曲率の影響が入ってくるため、平坦な場合とは異なるダイナミクスを起こすことが分かった。また、spectator として axion-SU(2) モデルを入れた場合、さらに潰れにくくなることが分かった。

6 今後の発展

一般の Bianchi type I 時空では等方な解がアトラクターになっていることが、既に調べられている [2]。今後の発展として、正の空間曲率を持つ非等方時空においても等方化されるかを調べる事が挙げられる。

Acknowledgement

日頃から議論して頂いている小林努教授、並びに理論物理学研究室の方々に、この場を借りて感謝させていただきます。

Reference

- [1] M. a. Watanabe, S. Kanno and J. Soda, Phys. Rev. Lett. **102**, 191302 (2009)
- [2] I. Wolfson, A. Maleknejad, T. Murata, E. Komatsu and T. Kobayashi, [arXiv:2105.06259 [gr-qc]].
- [3] T. Murata and T. Kobayashi, [arXiv:2107.07199 [gr-qc]].
- [4] V. A. Belinsky, H. Ishihara, I. M. Khalatnikov and H. Sato, Prog. Theor. Phys. **79**, 676-684 (1988)
- [5] D. V. Galtsov and M. S. Volkov, Phys. Lett. B **256**, 17-21 (1991)

重字 25

ultra-light axion-like particle の oscillon による 21cm 異方性の効果

東京大学 理学系研究科物理学専攻
宮崎 一慶

ultra-light axion-like particle の oscillon による 21cm 異方性の効果

宮崎一慶 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

Ultra-light Axion-like particle (ULAP) は、その質量が $m \sim 10^{-20} \text{eV}$ の領域では、 ΛCDM における small scale crisis を解決しうる粒子として、近年注目を浴びている。ULAP は、ポテンシャルの冪が 2 乗よりも緩やかであれば、oscillon(I-ball) と呼ばれる局所的なオブジェクトを作ることが知られている [2]。この oscillon は、断熱不変量の近似的な保存から、生成されてから赤方偏移が $z \sim 10$ 程度まで存在し続けることが可能であり、ゆらぎを増幅することによって構造形成に影響を与える。oscillon の power spectrum を用いて、minihalo がどの程度生成されるかを計算できる [3]。この minihalo は中性水素からできていると考えられているので、背景光 (CMB) が通ることによって、超微細構造に由来する 21cm 線のゆらぎが生成される。本研究では、oscillon が存在することによって、21cm 線のシグナルへどのような影響を与えるかを調べ、それらの観測可能性について調べた。

1 Introduction

現在、宇宙の物質の大部分を占めるのはダークマターと考えられているが、その正体は今だに未解明のままである。ダークマター (DM) のモデルとして、Ultra-light Axion-like particle (ULAP) がある。ULAP は、 ΛCDM モデルで生じる small scale crisis を解決することができ、ダークマターの有力な候補の一つである。この ULAP は、oscillon と呼ばれるオブジェクトを作ることが知られており、oscillon が宇宙論にどのような影響を与えるかを調べることは重要なことである。

oscillon が影響を与える現象の一つに、21cm 線がある。21cm 線とは、中性水素における電子のスピンと核子のスピンの相互作用により、スピンが平行または反平行で 1s 状態が分裂し、そのエネルギー差 (波長にして 21cm) に伴って放射・吸収されるものである。CMB などの背景光が中性水素で満たされた領域を通過した場合、21cm 線に由来した放射によって、そのシグナルは本来の CMB のそれと異なって観測される。

そのような中性水素が多い領域は、 $z \sim 10$ 程度で存在することができ、minihalo と呼ばれている。minihalo はビリアル温度が 10^4K よりも低いので、星形成に必要な冷却が非効果的になり、十分な中性水素を保つことができる。

本研究では、CMB が minihalo を通過することによって生成されるゆらぎを計算し、今後の観測によって oscillon を probe できるかを調べた。まず、宇宙に密度ゆらぎによって生成される minihalo を計算し、その後 21cm 線ゆらぎの計算方法を紹介する。最後に、oscillon による効果と結論を議論する。

2 minihalo の性質と 21cm 異方性

2.1 Halo mass function

質量スケール $M \sim M + dM$ における minihalo の数密度 dn は、Press-Schechter formalism を修正した Schth-Tormen mass function

$$dn = \frac{\overline{\rho_m}}{M^2} f(\nu) \left| \frac{d \ln \nu}{d \ln M} \right| dM$$

で与えられる [1]。ここで、密度分散 $\sigma(M, z)$ と $\delta_c = 1.686$ を用いて $\nu = \delta_c / \sigma$ であり、 $f(\nu)$ は以下のように表される。

$$\nu f(\nu) = A \left(1 + \frac{1}{(a\nu)^p} \right) \left(\frac{a\nu}{2} \right)^{1/2} \frac{e^{-a\nu/2}}{\sqrt{\pi}}$$

(A, p, a の値は [1] 参照。) homogeneous ULAP や oscillon が存在する時、mass function (厳密には σ) に影響を与え、CDM と異なる結果を与える。oscillon が

存在せず、homogeneous ULAP のみが存在する場合、小スケールをならすので、mass function は Λ CDM モデルに比べて抑制される。しかし、oscillon が存在する場合、揺らぎが増幅されるので、 Λ CDM モデルに比べて大スケールの minihalo を増やす効果をもたらす。

2.2 Minihalo gas profile

minihalo によって放射（吸収）される 21cm を観測したいので、中性水素が minihalo の中でどのような分布をしているかを調べる必要がある。minihalo は DM と中性水素を含むが、それぞれの分布は一般には異なる。DM minihalo profile ρ_{DM} に関しては、数値シミュレーションから次の NFW profile で表される。

$$\rho_{DM}(r) = \frac{\rho_{DM0}}{r/r_s(1+r/r_s)^2}$$

ここで、 ρ_{DM0} はそれぞれ中心における DM 密度であり、ビリアル半径 r_{vir} を用いて

$$\rho_{DM0} = \frac{M}{\int_0^{r_{vir}} [r/r_s(1+r/r_s)^2]^{-1} dr}$$

と表され、スケール半径 r_s は fitting から

$$r_s = \frac{1+z}{14.8} \left(\frac{M}{1.3 \times 10^{13} h^{-1} M_\odot} \right)^{0.14} r_{vir}$$

と与えられる。

中性水素の Gas profile ρ_g は、中性水素の平均分子質量 $\mu = 1.22$ として、静水圧平衡と状態方程式

$$\begin{aligned} \frac{dP(r)}{dr} &= -\frac{GM(r)}{r^2} \rho_g(r) \\ P(r) &= \frac{\rho_g(r)}{\mu} k_B T_{vir} \end{aligned}$$

を課すことにより、以下のように求められる。

$$\rho_g(r) = \rho_{g0} \exp \left[-\frac{\mu}{2k_B T_{vir}} (v_{esc}(0)^2 - v_{esc}(r)^2) \right]$$

なお、中心密度 $\rho_g(r)$ と脱出速度 $v_{esc}(r)$ の表式に関しては、[2] 参照とする。

2.3 スピン温度

中性水素の超微細構造分裂によって生じた励起状態と基底状態の数密度を、それぞれ n_1, n_0 と表すことにする。これらの数密度の比を、以下で定義されるスピン温度 T_s を用いて表すと便利である。

$$\frac{n_1}{n_0} \equiv \frac{g_1}{g_0} \exp \left(-\frac{E_{10}}{k_B T_s} \right) = 3 \exp \left(-\frac{T_*}{T_s} \right)$$

ここで、 g_1, g_0 は、それぞれ励起状態と規定状態のスピン自由度であり、 $T_* \equiv E_{10}/k_B \simeq 68\text{mK}$ は 2 つの状態の温度差に対応するものである。2 つの状態の遷移に関わる物理的なプロセスとして、spontaneous emission, absorption, stimulated emission の 3 つ存在し、spontaneous emission の遷移率は、 $A_{10} = 2.85 \times 10^{-15} \text{s}^{-1}$ で与えられる。他のプロセスの遷移率に関しては、以下の 2 つの相互作用によって決まる。（実際には Ly- α の寄与もあるが、現段階では不定性が多いために無視する）

- CMB

中性水素は、背景光の CMB が入射することにより、励起・脱励起する。minihalo のビリアル温度は CMB 温度より高いので、典型的には脱励起し、minihalo から出てきた光は CMB より高くなることが多い。

- 粒子衝突

minihalo 中で起こる粒子衝突は電子のスピンをスワップさせるので、スピン温度に影響を与える。粒子衝突は H-H、H-e、e-e の 3 つの衝突があるが、再イオン化する前の時期を考えているので、自由電子は少ないと考えられる。したがって、H-e、e-e 衝突は無視する。この時、粒子衝突による遷移率 C_{10} は、 $C_{10} \simeq n_{HI} \kappa_{10}$ で与えられる。ここで、 n_{HI} は中性水素の数密度であり、 κ_{10} の値は [3] 参照。

以上の 2 つのプロセスを考慮することにより、スピン温度は次のように与えられる。

$$T_s^{-1} \simeq \frac{T_\gamma^{-1} + x_c T_{vir}^{-1}}{1 + x_c}$$

ここで、 $T_\gamma = 2.73(1+z)$ は赤方偏移 z での CMB 温度であり、

$$x_c = \frac{C_{10} T_*}{A_{10} T_\gamma}$$

である。

2.4 Optical depth

Optical depth は、背景光が minihalo を通過した時に、光がどれだけ吸収されるかを表す物理量であり、次の表式で与えられる。

$$\tau(\nu, M, \alpha) = \frac{3hc^2 A_{10}}{32\pi k_B \nu_{10}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_{HI}(r)}{T_s(r)} \phi(\nu) dR$$

ここで、 $\alpha = \sqrt{r^2 - R^2}$ は光の衝突係数であり、 $\nu_{10} = 1420\text{MHz}$ は 21cm 線の遷移振動数、 $\phi(\nu)$ は Line profile で、 $\Delta\nu = (\nu_{10}/c) \sqrt{2k_B T_{vir}/m_H}$ を用いて

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_{10})^2}{\Delta\nu^2}\right)$$

で与えられる。

Optical depth を用いて、minihalo からでてくる flux を計算する。flux は、Raylei-Jeans 極限をとった際に対応する温度、輝度温度 T_b を用い、以下で表される。

$$T_b(r) = T_\gamma e^{-\tau} + \int_0^{\tau(r)} T_s e^{-\tau'} d\tau'$$

輝度温度の、minihalo の大きさと、質量分布に関しての平均を計算する。minihalo の大きさに関しての平均は、minihalo の視線方向の断面積 A を用いて、

$$\langle T_b \rangle = \frac{1}{A} \int T_b(r) dA$$

によって計算できる。これを用いて、輝度温度の CMB に関するゆらぎは

$$\Delta T_b = \frac{\langle T_b \rangle - T_\gamma(z)}{1+z}$$

で表される。質量分布の平均に関しては、揺らぎを mass function で重み付けして計算することにより、以下の表式を得る。

$$\overline{\Delta T_b} = \frac{c(1+z)^4}{\nu_{10} H(z)} \int_{M_{min}}^{M_{max}} \Delta\nu_{eff} \langle T_b \rangle A \frac{dn}{dM} dM$$

$H(z)$ はハッブル定数、 $\Delta\nu_{eff} = [\phi(\nu_{10})(1+z)]^{-1}$ は、赤方偏移した有効ライン幅であり、 M_{max}, M_{min} は、それぞれ minihalo の最大質量、最小質量を表す。 M_{max} は、星になるための冷却が有効ではないという条件 ($T_{vir}(M) \lesssim 10^4\text{K}$) から得られ、 M_{min} は圧力と自己重力が釣り合うという条件から得られる、ジーンズ質量

$$M_J = 5.73 \times 10^3 \left(\frac{\Omega_m h^2}{0.15}\right)^{-0.5} \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.022}\right)^{-\frac{3}{5}} \left(\frac{1+z}{10}\right)^{\frac{3}{2}}$$

で与えられる。

2.5 21cm angular power spectrum

最後に、観測される物理量として、21cm 線ゆらぎの angular power spectrum を計算する。angular power spectrum は、赤方偏移 z での \hat{n} 方向の 21cm ゆらぎ

$$\delta T_b(\hat{n}, z) = \overline{\Delta T_b}(z) \bar{b}(z) \delta(\hat{n}, z)$$

を球面調和関数 $Y_l^m(\hat{n})$ で展開し、多重極モーメント (展開係数)

$$a_{lm}^{21}(z) = \int \delta T_b(\hat{n}, z) Y_l^{m*}(\hat{n}) d\hat{n}$$

の相関を取ることによって求めることができる [4]。

$$C_l^{21}(z, z') \equiv \langle a_{lm}^{21}(z) a_{lm}^{21*}(z') \rangle$$

$$= \overline{\Delta T_b}(z) \overline{\Delta T_b}(z') \bar{b}(z) \bar{b}(z') C_l^m(z, z'),$$

$$C_l^m(z, z') = D(z) D(z') \int \frac{k^2 dk}{2\pi} P(k) j_l(kr(z)) j_l(kr(z'))$$

ここで、 $\bar{b}(z)$ は flux weighed bias factor であり、背景物質密度 $\delta(\hat{n}, z)$ と minihalo の密度との比を flux で平均したもので、以下で定義される (\mathcal{F}, b の定義は [4] 参照)。

$$\bar{b}(z) = \frac{\int_{M_{min}}^{M_{max}} dM \frac{dn}{dM} \mathcal{F}(z, M) b(M, z)}{\int_{M_{min}}^{M_{max}} dM \frac{dn}{dM} \mathcal{F}(z, M)}$$

$D(z)$ は growth factor、 $P(k)$ は物質の power spectrum、 j_l は球ベッセル関数である。

ULAP や oscillon が存在する時に、この 21cm angular power spectrum にどのような影響を与えるかを計算する。

3 Results

21cm angular power spectrum の結果を図 1 に示す。

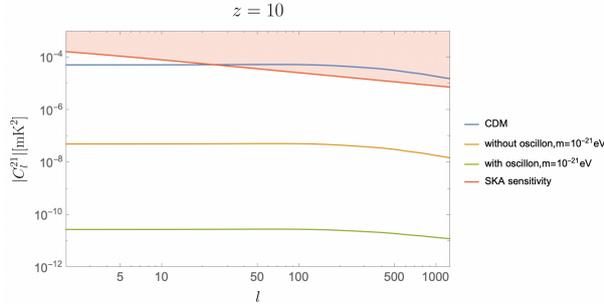


図 1: 21cm angular power spectrum

ここで、横軸は角運動量 l 、縦軸は 21cm angular power spectrum を表し、青、黄、緑の実線はそれぞれ CDM、oscillon なし、oscillon ありの場合、赤実線は今後の SKA による観測感度である。なお、ULAP の質量は $m_{ULAP} = 10^{-21} \text{eV}$ としている。観測感度に関して、foreground のノイズは含めておらず、実験機器のノイズのみ考慮している。

図 1 より、CDM に比べて、homogeneous ULAP はシグナルを弱める傾向にあり、さらに oscillon が存在する場合はさらにシグナルが小さくなっている。これは次のように解釈できる。oscillon がなく、homogeneous ULAP のみが存在する場合、これは物質の密度ゆらぎをならす効果が働くので、minihalo の数が少なくなってしまう、シグナルは小さくなる。一方 oscillon を含めた場合、これは CDM の場合に比べて密度揺らぎは大きくなるが、シグナルは小さくなってしまっている。これは、むしろ揺らぎが大きくなりすぎると CDM に比べてより昔に minihalo が生成され、大スケールの minihalo を生成してしまい、21cm 揺らぎに関与する minihalo は少なくなってしまうことによる。なぜなら、大スケールの minihalo が星形成のための冷却条件 ($T_{vir} \lesssim 10^4$) を満たさなくなってしまう、平均化の際の積分上端 M_{max} が小さくなってしまいうからである。

4 Conclusion

本研究では、homogeneous ULAP や oscillon が存在する場合に、21cm 揺らぎの angular power spectrum に与える影響を見た。oscillon が存在しない場合、ULAP を含めることによって CDM に比べてシグナルは小さくなることを確認した。oscillon が存在する場合にも、その揺らぎが大きすぎるため、21cm 揺らぎに関与する minihalo の数を減らしてしまい、CDM に比べてかなりシグナルは小さくなる。

将来的には、CDM の場合のみ観測可能性があるが、foreground ノイズの影響を考慮することができていないので、更なる研究が必要である。

Reference

- [1] R.K.Sheth and G.Tormen.,1999,arXiv:astro-ph/9901122
- [2] M.Kawasaki et.al.,2021,arXiv:astro-ph/2010.13504v1
- [3] B.Zygelman,2005,The Astrophysical Journal 622:1356-1362
- [4] K.kadota et.al.,2021,arXiv:astro-ph/2007.02276v2

重字 26

21 cm forest による暗い銀河の検出可能性

名古屋大学 理学研究科素粒子宇宙物理学専攻
中島 光一郎

21cm forest による暗い銀河の検出可能性

中島 光一郎 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙の構造形成初期の天体の電離光子により、宇宙の晴れ上がり (赤方偏移 $z \sim 1100$) 以降続いた暗黒時代は終わり、宇宙は夜明けを迎えた。その後宇宙の中性ガスが電離されていき、この時期は宇宙再電離期と呼ばれる。数々の観測やシミュレーションにより、再電離期は赤方偏移 $z \sim 20$ で始まり $z \sim 6$ で終わると示唆されているが、完全な理解には至っていない。特に、再電離期の初期や暗黒時代の終わりには未だに観測が届いていない。そこで注目されているのが、中性水素の超微細構造に由来する 21cm 線である。

本研究では、21cm forest による再電離期の構造の検出可能性を示すことを目的とする。21cm 線は、中性水素の超微細構造に由来する電磁波である。これを用いて、クエーサー等の明るい背景光源と我々の間の中性水素ガスを検出することができる。さらに、光が赤方偏移するので広い波長域に吸収線が刻まれ、21cm forest と呼ばれる森のような観測スペクトルが検出される。将来的には Square Kilometre Array (SKA) などの大規模電波干渉計による観測により、高赤方偏移クエーサーを用いて観測される見込みである。本公演では、まず 21cm forest の吸収線シグナルが再電離期の構造 (銀河、銀河間物質) を識別する可能性について議論する。さらに、ターゲットを銀河間物質 (IGM) に絞って、その密度ゆらぎを吸収線シグナルから読み取ることで、マターパワースペクトルの制限への利用を議論する。

1 導入

宇宙が生まれたばかりの高温な時期において、主な元素である水素は電離した状態にあった。しかし、宇宙は膨張とともに冷え、赤方偏移 $z \sim 1100$ には電子が陽子に捕らえられて宇宙は一度中性化した (宇宙の晴れ上がり)。この後しばらく中性な時代 (暗黒時代) が続いたが、初期構造形成により天体が形成され電離光子が放出されると、宇宙は再び電離された。これを宇宙再電離という。数々の観測から、宇宙は赤方偏移 $z \sim 6$ までにほとんど電離され、現在もその状態を保っていることがわかっている。

さて、再電離期中性水素の変化する数密度は、この時期の重要な情報の 1 つである。中性水素の検出には、水素原子を周る電子のエネルギー準位差に由来する電磁波が便利である。そのうち Ly α 線を使った観測は既に行われている。しかし、Ly α 線は非常に吸収されやすいという特徴を持っており、中性水素が多く残る再電離期前半においては背景光を吸収しきってしまう。そのため再電離期前半を知る手がかりとしては、Ly α 線はあまり適していない。そこで注目されているのが 21cm 線である。

本研究では、21cm forest によって再電離期に存在する構造を検出する可能性について議論する。

まずは、21cm forest の吸収線シグナルが再電離期の銀河を見つけることができるか議論する。再電離期において銀河は重要な構造であると考えられている。最初は初代天体が電離光子源とされるが、その後電離された状態までの電離光子源は銀河が供給したと示唆されている。銀河を検出する方法としては、光学的厚みという物理量を計算することで、吸収線シグナルの大きさを予測する。これは中性水素の数密度及び温度により決まるので、銀河と IGM についてそれぞれモデル化することで、これらの構造による吸収線シグナルを予測する。

次に、21cm forest の吸収線シグナルから IGM の密度ゆらぎの情報を得ることで、マターパワースペクトルに制限をつける可能性について議論する。21cm forest と似た Ly α forest という観測では、すでにマターパワースペクトルの制限がなされている。よって、21cm forest の吸収線シグナルから密度ゆらぎの情報を得ることができれば、マターパワースペクトルの制限ができるのではないかと考えられる。本研究

では、吸収線シグナルを光学的厚みに直すことで密度ゆらぎの情報を取り出すことを考える。そして、取り出した密度ゆらぎがガウス分布に従うと考え、その分散を計算し、いくつかのデータがあれば分散を特定できるのかを調べる。

2 21cm 線の物理

21 線は中性水素の超微細構造由来の電磁波である。水素の電子のエネルギー準位は電子軌道由来のものがよく使われる。さらにそれぞれの準位は、電子と陽子のスピンの向きがともに同じ方向を向いている状態(平行)と、互いに反対方向を向いている状態(反平行)にさらに細かく分裂できることがわかっている。エネルギー準位は平行の状態の方が高い。特に 1s 軌道の超微細分裂のエネルギー差は周波数、波長が $\nu \sim 1420\text{MHz}$, $\lambda \sim 21.1\text{cm}$ の光子のエネルギーに対応する。これが中性水素 21cm 線である。

また、エネルギーが高い準位と低い準位の中性水素数密度の比はボルツマンの分布関数と同じ式

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{g_1}{g_0} \exp\left(-\frac{h\nu_{10}}{k_B T_S}\right) \quad (1)$$

で表される。ここで、 k_B はボルツマン定数、 $g_1 = 3$, $g_0 = 1$ はそれぞれのエネルギー準位における統計的重み(縮退度)である。さらに、 T_S はスピン温度と呼ばれる物理量であり、式(1)を見ればわかるように、上下のエネルギー準位の分布を決めるパラメータとなっている。ただし、 T_S はエネルギー準位を変え得るさまざまな物理が考慮されて決まる温度である。基本的には中性水素ガスと以下の 3 つの相互作用によって決定される。

- (1) 背景放射(主に CMB) 光子との相互作用
- (2) 他の水素原子や電子との衝突
- (3) ライマンアルファ光子との相互作用

3 輝度温度

スペクトルの 21cm 線吸収の大きさを計算するためには、光学的厚みという物理量を用いる。これは光

の吸収されやすさを表すもので、

$$\tau = \int ds \left[1 - \exp\left(-\frac{0.068}{T_S}\right) \right] \sigma_0 \phi(\nu) n_0 \quad (2)$$

と計算される (Pritchard J. R., & Loeb A. 2012). また、 $\sigma(\nu) = \sigma_0 \phi(\nu)$ は 21cm 断面積 ($\sigma_0 \equiv 3c^2 A_{10}/8\pi\nu^2$), $A_{10} = 2.85 \times 10^{-15} \text{s}^{-1}$ はアインシュタインの A 定数と呼ばれ、自発放射率を表す。さらに $\phi(\nu)$ はラインプロファイルであり、 $\int \phi(\nu) d\nu = 1$ に規格化されている。21cm 線の光学的厚みを考える場合は、ラインプロファイルはガスの熱運動による速度分散を考える。ガスの速度分散によるドップラー効果によって、吸収および放射の周波数は中心 $\nu_0 = 1.42 \text{ GHz}$ から広がりをもち、

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu_D \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\nu - \nu_0^2}{\Delta\nu_D^2}\right) \quad (3)$$

のように分布する。ここで $\Delta\nu_D \equiv \frac{v_0}{c} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$ はドップラー幅で、熱的広がりを表す。

次はこの光学的厚みを用いて観測で実際に検出される輝度温度について説明する。輻射輸送方程式により、輝度温度は次のように計算される (Pritchard J. R., & Loeb A. 2012).

$$\delta T_b = \frac{T_S - T_R}{1 + z} (1 - e^{-\tau}) \quad (4)$$

$$\sim 27 x_{\text{HI}} (1 + \delta_b) \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.023} \right) \left(\frac{0.15}{\Omega_m h^2} \frac{1+z}{10} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{T_S - T_R}{T_S} \right) \left[\frac{H(z)/(1+z)}{\partial_r v_r} \right] \text{ mK} \quad (5)$$

1 行目から 2 行目は積分範囲が十分小さい近似の計算である。ここで、 x_{HI} は平均中性水素率、 δ_b はバリオンの超過密度、 $\Omega_b h^2$, $\Omega_m h^2$ はそれぞれバリオン、マターの密度パラメータ、 $H(z)$ はハッブルパラメータである。また、 $\partial_r v_r$ は IGM の視線方向の速度勾配、 T_R は背景放射源の温度で、背景放射源は CMB やクエーサーなどが使われる。本研究では強い背景光源としてクエーサーを考える。

4 計算方法

4.1 銀河と IGM の識別可能性

まずは、21cm forest の吸収線シグナルが再電離期の銀河を見つけることができるか議論する。ただし

今回は単純なモデルとして、ビリアル定理を用いた球対称モデルを考える。簡単のためできた天体は半径 R_{vir} の一様球とすると、

$$\frac{4}{3}\pi R_{\text{vir}}^3 \rho = M \quad (6)$$

とが成り立つ。ここで、 ρ は天体の質量密度、 M は天体の質量である。ビリアル平衡にある天体の質量密度 ρ は宇宙の平均質量密度 $\bar{\rho}$ との間に $\rho = 18\pi^2(1+z)^3 \bar{\rho}_0$ の関係があるとされる。 δ は密度ゆらぎである。宇宙の平均質量密度の現在の値 $\bar{\rho}_0$ は物質の密度パラメータ $\Omega_{\text{m}0}$ と臨界密度 $\rho_{\text{c}0}$ を用いて、 $\bar{\rho}_0 = \Omega_{\text{m}0}\rho_{\text{c}0}$ と表される。以上により、式 (6) を R_{vir} について解けば、

$$R_{\text{vir}} \sim 162.3 \left(\frac{M}{10^6 M_{\odot}} \right)^{1/3} \left(\frac{1+z}{20} \right)^{-1} \text{pc} \quad (7)$$

と求めることができる。

目標はこの銀河モデルに対して光学的厚みを見積もることである。式 (2) において

$$\int ds \rightarrow R_{\text{vir}}, \quad n_0 \rightarrow 18\pi^2(1+z)^3 \frac{n_{\text{b}0}}{4} \quad (8)$$

とする。ただしドップラープロファイルは積分されて 1 になるとする。 $n_{\text{b}0}$ はバリオンの数密度で、バリオンの全てが水素であるとし、そのうち 1/4 (\therefore 式 (1)) が下のエネルギー状態であるとした。次の章でこれを計算し、IGM の光学的厚みと見分けられるか議論する。

4.2 マターパワースペクトルの制限

密度ゆらぎについて知るための指標として、宇宙の平均密度に比べてどのくらいの分散を持つかというものがある。密度ゆらぎの分散はパワースペクトル $P(k)$ により次のように与えられる。

$$\sigma^2(R) \equiv \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} W^2(kR) P(k) \quad (9)$$

ここで $W(kR)$ はウィンドウ関数 $W_R(x)$ の 3 次元フーリエ変換である。フーリエ空間のウィンドウ関数は、波数の小さな長波長スケールのゆらぎのみを残して、波数の大きな短波長スケールのゆらぎを消去する役割をする。

本研究では、まずはマターパワースペクトルのデータから式 (9) を積分し、分散を計算した。この時のスケール R は、観測の周波数分解能 $\Delta\nu_{\text{resol}}$ から決めた。そして計算した分散に対応したガウス分布で密度ゆらぎを発生させてその情報が 21cm forest で得られるとする。この時どのくらいのデータ数があれば密度ゆらぎの情報から分散の情報を復元することができるのかを探る。

5 結果と結論

5.1 銀河と IGM の識別可能性

前章の仮定のもと、銀河の光学的厚みを計算すると次のようになる。

$$\tau_{\text{Galaxy}} \sim 1.8 \left(\frac{10^4 \text{K}}{T_{\text{S}}} \right) \left(\frac{M}{10^9 M_{\odot}} \right)^{1/3} \left(\frac{1+z}{20} \right)^{-1} \quad (10)$$

一方で IGM の光学的厚みは、式 (2) から、図 1 のように計算される。点は密度ゆらぎを含む光学的厚み、実線はその平均である。ここで高赤方偏移 ($z \sim 20$) を考えたのは、水素はほぼ電離されていない簡単な状況を考えるためである。密度ゆらぎは式 (9) で求められる分散のガウス分布に従った乱数で与え、スピン温度は CMB 温度で与えた。

式 (10) から、 $M \sim 10^9 M_{\odot}$ 程度の銀河であれば IGM と 10^2 程度オーダーが異なるので、十分に識別できる可能性があると考えられる。 $M < 10^9 M_{\odot}$ の銀河というのは高赤方偏移ではほとんど見つからないので、21cm forest は銀河観測の新たなプローブとして期待できる。

5.2 スピン温度とマターパワースペクトルの制限

IGM の光学的厚みから読み取れる情報として、ゆらぎと平均の 2 種類がある。式 (2) から、光学的厚みのゆらぎは中性水素ガスの密度ゆらぎ δ 、平均はスピン温度 T_{S} と下の準位の中性水素数密度 n_0 に対応する。特に中性水素の平均数密度の進化は、宇宙論的に

は $(1+z)^3$ に比例するから、 n_0 は分かっているとすればスピン温度が求められるはずである。

例えば 21cm forest から図 1 のようなデータがとれたとする。式 (2) に宇宙論パラメータを代入して中

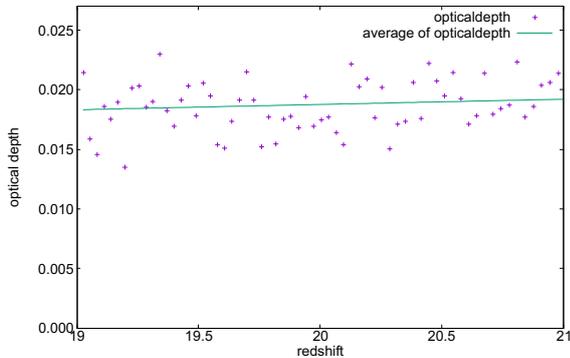


図 1: IGM の光学的厚み

性水素の平均数密度に対応する光学的厚みは

$$\bar{\tau}_{\text{IGM}} \sim 1.0 \frac{1}{T_S} \left(\frac{1+z}{20} \right)^{3/2} \quad (11)$$

と近似的に計算できる。これを用いて観測で得られたデータの平均の値からスピン温度を求めることができる。今回は図 1 の実線のデータを観測で得られたらとて、式 (11) からスピン温度を求めた。結果としては図 1 の元データである CMB 温度を復元することができた。数密度がわかれば光学的厚みの平均からスピン温度を求めることができることがわかった。

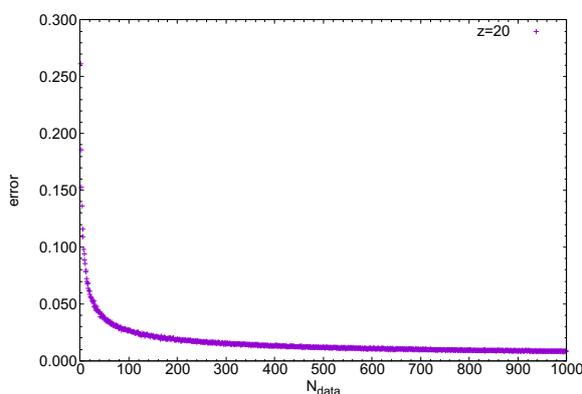


図 2: クエーサーの数と $\sigma(R)$ の誤差

ゆらぎ成分から元の分布関数の分散を求めるためにはある程度データの数が必要である。そこで、ガウス分布に従う乱数を作り、何回分のデータで元の分散を復元できるかを計算した。図 2 は測定データを取る回数と誤差の関係である。ただし、実際にデータを取る回数というのはすなわち背景光源となるクエーサーの必要な数である。この計算から、クエーサーが $N \sim 100$ 個程度で誤差が $< 3\%$ となることがわかる。実際今は高赤方偏移にはほとんどクエーサーが見つからないので、今後どのくらいクエーサーが見つかるかが課題である。

6 今後の展望

今回は 21cm forest 観測で得られる光学的厚みの値を予測し、簡単にモデル計算した。この計算で最も改善の余地があるのはスピン温度である。2章で述べたように、スピン温度は主に 3つの効果によって決まるが、今回は簡単のために CMB 温度として計算した。実際には 3つの効果が複雑に作用し、スピン温度の進化をシミュレーションする先行研究も存在する。今回のモデルにスピン温度をより正確に計算することなどを今後の研究課題として取り組んでいきたい。

Acknowledgement

本発表を行うにあたり、研究室の皆様には多くの場面で助けていただきました。特に、准教授の田代寛之さん、助教の柏野大地さん、研究員の長谷川賢二さん、博士課程の安藤梨花さん、阿部克哉さん、近藤寛人さん、修士課程の坂本陽菜さん、角谷健斗さん、同期の皆には大変お世話になりました。夜遅くまで議論や計算に付き合ってください、熱心にご指導していただきましたこと、心より感謝申し上げます。

Reference

- Pritchard J. R., & Loeb A., 2012, RPPPh, 75, 086901. doi:10.1088/0034-4885/75/8/086901
- Šoltinský T., Bolton J. S., Hatch N., Haehnelt M. G., Keating L. C., Kulkarni G., Puchwein E., et al., 2021, arXiv, arXiv:2105.02250

重字 27

ガウス過程回帰を用いた前景除去

熊本大学 自然科学教育部理学専攻
伊東 拓実

ガウス過程回帰を用いた前景除去

伊東 拓実 (熊本大学大学院 自然科学教育部)

Abstract

宇宙で最初の天体が誕生した後、天体が発する紫外線によって宇宙全体にある中性水素ガスが電離される時期を宇宙再電離期 (Epoch of Reionization : EoR) と呼ぶ。宇宙再電離期の 21cm 線の検出は当時の中性水素および電離源の分布や性質の解明につながることから、初代星や宇宙初期における銀河やブラックホール、銀河間物質などの研究において非常に重要である。宇宙再電離期の 21cm 線は Murchison Widefield Array (MWA) や LOFAR (Low Frequency Array), Hydrogen Epoch of Reionization Array (HERA) などによる観測が試みられており、近いうちに Square Kilometre Array (SKA) による観測も予定されている。

再電離期からのシグナルは銀河系のシンクロトロン放射など、21cm 線自身より 3 桁以上も明るい前景放射の中に埋もれており、シグナル検出のためにはこの前景を回避するか正確に除去する必要がある。前景の回避および除去については様々な研究が行われている。Mertens et al 2018 においてはガウス過程回帰 (Gaussian Process Regression, 以下 GPR) を LOFAR のシミュレーションデータに適用することで効果的に前景が除去できることを示しており、実際の LOFAR データにも適用されている。(Mertens et al 2020) 今回は Mertens et al 2018 の論文で紹介されている GPR のプログラムを用いてシミュレーションデータの前景除去をおこなってみたため、その結果を報告する。

GPR では前景放射がスペクトル的にも空間的にも滑らかであるのに対して EoR シグナルはそうでもないということを利用して前景除去を行う。

1 導入

宇宙晴れ上がりののち、宇宙に天体は存在せず、わずかな揺らぎを持った中性水素が一面に広がっていた。この時代を宇宙の暗黒時代という。やがて、重力による構造形成が進み、初期の天体が形成される。この初期天体からの放射によって天体の周りの中性水素が電離される。時間が経ち銀河等の構造が作られていくと天体の周りの電離した領域も徐々に空間を満たしていき、最終的には宇宙全体がイオン化される。この時代を宇宙再電離期と呼ぶ。

宇宙再電離期の観測について述べる。宇宙再電離期が終わる時期については、強いライマンアルファ輝線を放出する天体 (LAE) やクェーサーの吸収線などの観測によって制限が得られているが (1)、再電離が始まる時期や再電離以前に関してはいまだに観測的な制限は得られていない。ライマンアルファ光子は中性水素により強い吸収を受けるため中性水素が大量に存在する宇宙再電離期序盤や中盤の観測には適していない。この時期の観測に有効なツールと

考えられているのが銀河間物質 (IGM) 中の中性水素から放射される 21cm 線である。21cm 線はライマンアルファ光子と比較して中性水素からの吸収を受けにくいいため、中性水素が豊富に存在する時期の探査に適している。また電離領域からは 21cm 線が検出されないため、これを利用してイオン化バブルの構造を知ることでもでき、電離源の分布や性質の解明にもつながる。

再電離期からの 21cm 線を観測する上で大きな問題となってくるものの一つに天体からの前景放射がある。赤方偏移した 21cm 線が観測される周波数帯は系内のシンクロトロンや系外の活動銀河核 (AGN) なども同時に観測され、それらの強度は予想される宇宙再電離期からの 21cm 線と比較して 3 桁から 4 桁ほど大きい。宇宙再電離期の情報を 21cm 線を用いて得ようとする場合、この前景をどのように除去、または回避するかが重要になってくる。前景の除去については主成分分析や多項式近似など様々な手法による研究が進められているが、今回は (2) の論文

で行われたガウス課程回帰を用いた前景除去に注目した。

2 ガウス過程回帰を用いた前景除去

2.1 ガウス過程回帰

ここでは (3) および (4) を参考にガウス過程回帰を用いた前景除去を説明する。観測されたデータ d は foreground(f), EoR signal(e), noise(n) を含む。

$$\mathbf{d} = \mathbf{f} + \mathbf{e} + \mathbf{n} \quad (1)$$

またこれらの信号は無相関であると考えられるのでデータの共分散は

$$C = C_{fg} + C_{21} + C_n \quad (2)$$

ここでデータがガウス分布をしていると仮定するとその確率分布を次のようにモデル化できる。

$$\mathbf{d} \sim N(m(\nu), K(\nu, \nu)) \quad (3)$$

ここで m はモデルの平均値、 K は共分散 (カーネルとも呼ばれる)。共分散のモデルを $K = K_{fg} + K_{21} + K_n$ としてデータ d と前景放射 f' の同時分布を考えると次のようになる。ただし簡単のために平均値は 0 とした。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{f}' \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K_{fg} + K_{21} + K_n & K_{fg} \\ K_{fg} & K_{fg} \end{bmatrix} \right) \quad (4)$$

このとき前景放射 f' の期待値 $E[f']$ および共分散 $Cov[f']$ は

$$E[f'] = K_{fg}[K_{fg} + K_{21} + K_n]^{-1} \mathbf{d} \quad (5)$$

$$Cov[f'] = K_{fg} - K_{fg}[K_{fg} + K_{21} + K_n]^{-1} K_{fg} \quad (6)$$

このようにして求めた前景放射の期待値をデータから引くことで残差 (Residual) \mathbf{r} を求める。これが前景除去を行った後のデータである。

$$\mathbf{r} = \mathbf{d} - \mathbf{E}[f'] \quad (7)$$

2.2 カーネルモデル

今回用いた共分散モデル (カーネルモデル) は Matérn Kernel(8 式) と呼ばれるものである。

$$K_{\text{Matern}}(\nu, \nu') = \sigma^2 \frac{2^{1-\eta}}{\Gamma(\eta)} \left(\sqrt{2\eta} \frac{|\nu - \nu'|}{l} \right)^\eta K_\eta \left(\sqrt{2\eta} \frac{|\nu - \nu'|}{l} \right) \quad (8)$$

ここで σ^2 はシグナルの振幅を決めるパラメータ、 l は相関のスケールを決めるパラメータ、 η は関数の滑らかさを決めるパラメータ (η が大きいほど関数は滑らか: 図 1)、 Γ はガンマ関数、 K_η は第 2 種のベッセル関数である。特定の η (e.g. $\eta = 1/2, 3/2, 5/2$) を選択することでこの関数は単純化できる。

前景放射は周波数的に滑らかであり、21cm 線は周波数的に滑らかでないという仮定を用いることでそれぞれのカーネルに適した η をハイパーパラメータとして設定することができる。今回は 21cm 線のカーネル K_{21} では $\eta = 1/2$ 、前景放射のカーネル K_{fg} は $\eta = 5/2$ と $\eta = 3/2$ の 2 成分を用いた。

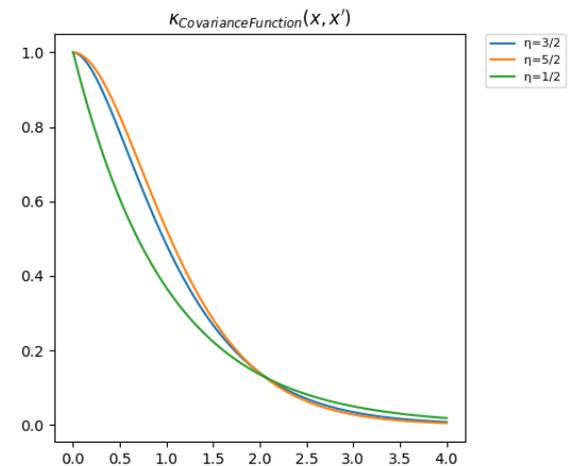


図 1: 0 を中心にして書いた特定の η での Matérn kernel. η が大きいほど関数は滑らかになる

3 使用データ、コード

今回使用したコードは gpr4im という名前で公開されている (5)(6)。また、使用したデータは SKA1 Low を想定したシミュレーションデータである。周波数は 167MHz-187MHz ($6.6 < z < 7.5$), 周波数分解能は 0.2MHz, 視野は 600Mpc×600Mpc、グリッド数は $400 \times 400 \times 100$ 。HI のデータは 21cmFAST(7)(8), 前景放射は GLEAM(9) を用いて作成してある。今回考慮した前景は点源のみである。(図 2)

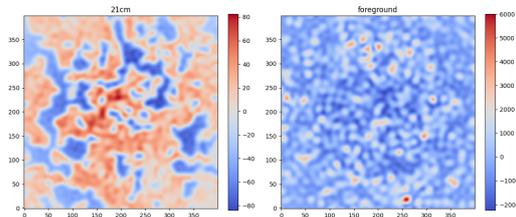


図 2: ある周波数における 21cm 線および前景放射の intensity map (左: 21cm 線 右: 前景放射)

4 結果, 議論

図 3 は今回の前景除去によって得られたパワースペクトルの図である。黒のグラフは真の 21cm 線のパワースペクトル、青が GPR を用いて前景放射を行った結果得られた 21cm 線のパワースペクトルである。比較のために主成分分析による前景除去の結果 (第 3 主成分までを除去) を赤のグラフで示している。

真のパワースペクトルと比較すると除去できていない前景が残っていることがわかる。これはカーネルにおけるハイパーパラメータである η の値を変えたり、異なるカーネルを使用することによって改善することが可能である。

図 4 は今回の前景放射除去によって得られたある周波数における 21cm 線の intensity map である。左側が真の分布であり右側は GBR による前景除去によって得られた分布である。両者の比較のためにカラーバーは統一してある。ゆらぎのパターンがある

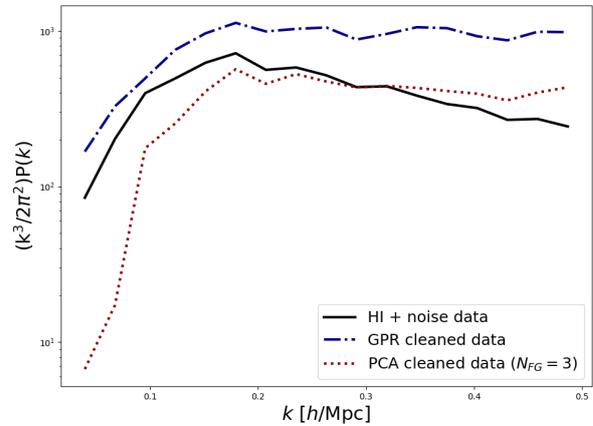


図 3: 今回の計算によって得られたパワースペクトル
黒:正解 青:GPR 赤:主成分分析

程度再現できていることが確認できる。また、輝度温度でみると前景放射は 2 桁ほど落ちている。

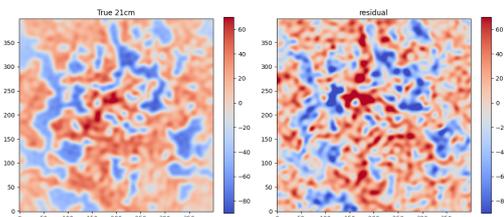


図 4: 前景除去後の intensity map
左: 真 右: 前景除去後

5 まとめ

今回はシミュレーションデータを用いて GPR を用いた前景放射の除去をおこなった。その結果完全とはいかないまでも多くの前景を除去することに成功した。除去できていない前景に関してはカーネルのハイパーパラメータを変更することによって改善されることが考えられるため今後はよりよく前景が除去できるパラメータの検証などを行う必要がある。

謝辞

今回の解析に用いたデータは国立天文台の吉浦伸太郎さんにいただいたものです。この場を借りてお礼申し上げます

Reference

- [1] Xiaohui Fan, C. L. Carilli, and B. Keating. Observational Constraints on Cosmic Reionization. , Vol. 44, No. 1, pp. 415–462, September 2006.
- [2] F. G. Mertens, A. Ghosh, and L. V. E. Koopmans. Statistical 21-cm signal separation via Gaussian Process Regression analysis. , Vol. 478, No. 3, pp. 3640–3652, August 2018.
- [3] Carl Edward Rasmussen and Christopher K. I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*. 2006.
- [4] Nicholas S. Kern and Adrian Liu. Gaussian process foreground subtraction and power spectrum estimation for 21 cm cosmology. , Vol. 501, No. 1, pp. 1463–1480, February 2021.
- [5] Paula S. Soares, Catherine A. Watkinson, Steven Cunnington, and Alkistis Pourtsidou. Gaussian process regression for foreground removal in hi intensity mapping experiments, 2021.
- [6] F G Mertens, A Ghosh, and L V E Koopmans. Statistical 21-cm signal separation via gaussian process regression analysis. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, May 2018.
- [7] Steven G. Murray, Bradley Greig, Andrei Mesinger, Julian B. Muñoz, Yuxiang Qin, Jaehong Park, and Catherine A. Watkinson. 21cmfast v3: A python-integrated c code for generating 3d realizations of the cosmic 21cm signal. *Journal of Open Source Software*, Vol. 5, No. 54, p. 2582, 2020.
- [8] Andrei Mesinger, Steven Furlanetto, and Renyue Cen. 21cmfast: a fast, seminumerical simulation of the high-redshift 21-cm signal. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 411, No. 2, pp. 955–972, 02 2011.
- [9] Natasha Hurley-Walker, John Morgan, Randall B. Wayth, Paul J. Hancock, Martin E. Bell, Gianni Bernardi, Ramesh Bhat, Frank Briggs, Avinash A. Deshpande, Aaron Ewall-Wice, Lu Feng, Bryna J. Hazelton, Luke Hindson, Daniel C. Jacobs, David L. Kaplan, Nadia Kudryavtseva, Emil Lenc, Benjamin McKinley, Daniel Mitchell, Bart Pindor, Pietro Procopio, Divya Oberoi, André Ofringa, Stephen Ord, Jennifer Riding, Judd D. Bowman, Roger Cappallo, Brian Corey, David Emrich, B. M. Gaensler, Robert Goeke, Lincoln Greenhill, Jacqueline Hewitt, Melanie Johnston-Hollitt, Justin Kasper, Eric Kratzenberg, Colin Lonsdale, Mervyn Lynch, Russell McWhirter, Miguel F. Morales, Edward Morgan, Thiagaraj Prabu, Alan Rogers, Anish Roshi, Udaya Shankar, K. Srivani, Ravi Subrahmanyam, Steven Tingay, Mark Waterson, Rachel Webster, Alan Whitney, Andrew Williams, and Chris Williams. The Murchison Widefield Array Commissioning Survey: A Low-Frequency Catalogue of 14 110 Compact Radio Sources over 6 100 Square Degrees. , Vol. 31, p. e045, November 2014.

重宇 28

銀河形成シミュレーションを用いた銀河の特異速度
の推定法の開発

弘前大学 理工学研究科
阿部 祐大

銀河形成シミュレーションを用いた銀河の特異速度の推定法の開発

阿部 祐大 (弘前大学大学院 理工学研究科)

Abstract

2017 年の連星中性子星合体からの重力波検出により、銀河までの距離が精度良く測定された事でハッブル定数が約 15 % の精度で決定された。しかし、銀河の後退速度に関しては宇宙膨張に起因する成分であるハッブル流と個々の銀河の特異運動に起因する特異速度が合わさったものであるため、特異速度の不定性が残っている。そのため、より精度よくハッブル定数を求めるには、銀河の特異速度の正確な推定が必要になる。本研究では最新の銀河形成シミュレーション (IllustrisTNG) を用いて、銀河の空間分布から特異速度による不定性を除去する手法の開発を行なっている。TNG シミュレーションの銀河カタログは公開されており、一辺が $205h^{-1}\text{Mpc}$ の立方体内に約二百万個の銀河が分布している。銀河の特異速度の推定法としては線形摂動論 (ZA: the Zel'dovich approximation) と 2 次の摂動論 (2LPT: 2nd order Lagrangian perturbation theory) を用いる。ZA によると速度場と密度場はフーリエ空間を介して比例関係にある。また、2LPT は ZA に対して重力の潮汐効果による補正を行なった 2 次の解である。ここで推定した特異速度で補正を行う事により、TNG の銀河カタログにおいてフィールド銀河に関しては速度の標準偏差を実空間では約 45%、赤方偏移空間では約 37% 減らすことに成功した。

1 Introduction

宇宙の膨張を示すものとして $v = H_0 d$ (ハッブルの法則) が挙げられる。 v は銀河の後退速度、 d が銀河までの距離、 H_0 がハッブル定数である。この式より、銀河の後退速度 v と銀河までの距離 d の 2 つを正確に測定することでハッブル定数 H_0 の精度向上が期待される。

2017 年、重力波検出器 LIGO と Virgo が連星中性子星合体からの重力波を初めて検出した。これに伴った電磁波観測から母銀河も特定され、この銀河までの距離が精度良く測定された事でハッブル定数が約 15 % の精度で決定された [LIGO Scientific Collaboration, et al (2017)]。連星中性子星からの重力波を用いた距離測定の手法は、距離ハシゴを仮定しないため系統誤差が非常に小さい。しかし、銀河の後退速度については銀河の特異速度の効果により大きな不定性が残っている。

ここで特異速度とは宇宙膨張に起因しない、銀河の固有運動による速度である。そのため、より精度よくハッブル定数を求めるには、銀河の特異速度の正確な推定が必要になる。本研究では最新の銀河形成シミュレーション (IllustrisTNG) を用いて、銀河

の空間分布から特異速度による不定性を除去する手法の開発を行なっている。

TNG シミュレーションは暗黒物質とバリオン (星、ガス、ブラックホール) の重力進化を同時に追っており、星や銀河形成、活動銀河核によるフィードバックも考慮されている [Nelson D., et al (2019)]。TNG の銀河カタログ (質量、位置、速度等のデータ) と粒子分布 (質量、位置、速度のデータ) は公開されており、一辺が $205h^{-1}\text{Mpc}$ の立方体内に約二百万個の銀河が分布している。

特異速度場の推定方法としては、密度場と速度場の関係を用いる。密度場については実空間と、実際に観測される赤方偏移空間においてそれぞれ求め、速度の推定を行なっている。赤方偏移空間については、カイザーの公式を利用した線形密度場の推定を試みている。

2 Methods

ここではラグランジアン摂動論 (LPT: Lagrangian perturbation theory) の概要を述べる。初期の粒子位置 \mathbf{q} と最終的なオイラー粒子の位置 \mathbf{x} は変位ベクト

ル \mathbf{S} を用いて以下の様に表される。

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{q} + \mathbf{S}(\mathbf{q}, t). \quad (1)$$

ゼルドヴィッチ近似 (ZA) によると、変位ベクトルの線形解と密度場の間には以下の様な関係が成り立つ。

$$\nabla \cdot \mathbf{S}^{(1)}(\mathbf{q}) = -D_1(t)\delta^{(1)}(\mathbf{q}). \quad (2)$$

$\delta^{(1)}$ は現在の線形密度場であり、 $D_1(t)$ は線形成長因子である。

さらに変位ベクトルの 2 次の解を求めるため、2 次の摂動論 (2LPT: 2nd order Lagrangian perturbation theory) を用いる。2LPT は ZA の変位に対して重力の潮汐効果による補正を行なった 2 次の解を示す [Scoccimarro, (1998)]。

$$\nabla \cdot \mathbf{S}^{(2)}(\mathbf{q}) = -\frac{3}{14}\Omega_m^{-1/143} \left(S_{a,a}^{(1)}S_{b,b}^{(1)} - S_{a,b}^{(1)}S_{b,a}^{(1)} \right), \quad (3)$$

ここで $S_{a,b}^{(1)} \equiv \partial S_a^{(1)} / \partial q_b$ であり、 Ω_m は物質密度パラメータを表す。

赤方偏移空間 \mathbf{s} と実空間 \mathbf{x} の座標には以下の関係が成り立つ。

$$\mathbf{s}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{q}, t) + \frac{1}{aH}[\mathbf{v}(\mathbf{q}, t) \cdot \hat{\mathbf{z}}]\hat{\mathbf{z}}, \quad (4)$$

また $a(t)$ はスケール因子、 $H(t)$ はハッブルパラメータを $\hat{\mathbf{z}}$ は視線方向の単位ベクトルをそれぞれ表す。また、 \mathbf{v} は \mathbf{q} での特異速度を表す。

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, t) = a \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{dD_1}{dt} \frac{a}{D_1} \mathbf{S}(\mathbf{q}). \quad (5)$$

赤方偏移空間での変位ベクトル $\mathbf{S}^{(s)}$ を以下の様に導入する。

$$\mathbf{s}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{q} + \mathbf{S}^{(s)}(\mathbf{q}, t), \quad (6)$$

ここで

$$\mathbf{S}^{(s)}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{q}) + f_1[\mathbf{S}(\mathbf{q}) \cdot \hat{\mathbf{z}}]\hat{\mathbf{z}}, \quad (7)$$

であり、 $f_1 = d \ln D_1 / d \ln a$ は線形成長率である。

また、重力ポテンシャルの 1 次と 2 次をそれぞれ $\phi^{(1)}(\mathbf{q}), \phi^{(2)}(\mathbf{q})$ とすると、重力ポテンシャルと密度

場は以下のポアソン方程式に従う。

$$\nabla_q^2 \phi^{(1)}(\mathbf{q}) = \delta^{(1)}(\mathbf{q}), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \nabla_q^2 \phi^{(2)}(\mathbf{q}) &= \sum_{i>j} \{ \phi_{,ii}^{(1)} \phi_{,jj}^{(1)} - [\phi_{,ij}^{(1)}]^2 \} \\ &= \delta^{(2)}. \end{aligned} \quad (9)$$

式 (1)~(3)、式 (8)~(9) より、実空間での変位 \mathbf{x} と速度 \mathbf{v} は

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \mathbf{q} - D_1 \nabla_q \phi^{(1)} + D_2 \nabla_q \phi^{(2)}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ &= -D_1 f_1 H \nabla_q \phi^{(1)} + D_2 f_2 H \nabla_q \phi^{(2)} \end{aligned} \quad (11)$$

となる ($D_2 \approx -\frac{3}{7}D_1^2\Omega_m^{-1/143}, f_2 \approx 2\Omega_m^{6/11}$)。また、フーリエ空間では以下の様に表される。

$$-k^2 \tilde{\phi}^{(1)}(\mathbf{k}) = \tilde{\delta}^{(1)}(\mathbf{k}), \quad (12)$$

$$-k^2 \tilde{\phi}^{(2)}(\mathbf{k}) = \tilde{\delta}^{(2)}(\mathbf{k}), \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = -iD_1 f_1 H \mathbf{k} \tilde{\phi}^{(1)} + iD_2 f_2 H \mathbf{k} \tilde{\phi}^{(2)}. \quad (14)$$

2.1 特異速度の推定方法

銀河の特異速度の推定法を以下に示す。

まずシミュレーションボックスを等間隔に格子点で区切る。次に粒子分布から、格子点毎に平均化した質量分布を推定し密度場を割り出す。この密度場をフーリエ変換し、式 (15) の様に平滑化フィルターをかけ、重力ポテンシャルを求める。この重力ポテンシャルと式 (13),(14) を用いて格子点毎の特異速度を推定する。

$$\tilde{\phi}^{(1)}(\mathbf{k}) = -\frac{\tilde{\delta}(\mathbf{k})}{k^2} G(k), \quad (15)$$

ここで $G(k)$ は平滑化フィルターであり

$$G(k) = \exp[-0.5(k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2)\Sigma^2], \quad (16)$$

と表す。

2.2 カイザーの公式を用いた線形密度場の推定

実際に観測されるのは赤方偏移空間 (\mathbf{s}) での密度場であるが、今回補正する TNG の速度場は実空間

(\boldsymbol{x}) のものである。その為、密度場を赤方偏移から実空間に変換する必要がある。

実空間における物質密度を $\rho(\boldsymbol{x})$ とし、赤方偏移空間での物質密度を $\rho_s(\boldsymbol{s})$ とすると

$$\rho(\boldsymbol{x})d^3x = \rho_s(\boldsymbol{s})d^3s, \quad (17)$$

が成り立つ。ここで実空間から赤方偏移空間へのヤコビアンは式 (4) より

$$J = \left| \frac{\partial(\boldsymbol{s})}{\partial(\boldsymbol{x})} \right| = 1 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_z}{aH} \right), \quad (18)$$

となり、赤方偏移空間の物質密度は

$$\rho_s(\boldsymbol{s}) = J^{-1}\rho(\boldsymbol{x}), \quad (19)$$

となる。

また、線形近似を用いて

$$\rho_s(\boldsymbol{s}) = \left[1 - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_z}{aH} \right) \right] \rho. \quad (20)$$

実空間の物質密度のゆらぎを

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho}{\bar{\rho}} - 1, \quad (21)$$

と定義し、赤方偏移空間の物質密度のゆらぎも同様に定義する。

式 (20)、(21) より

$$\delta_s(\boldsymbol{s}) = \delta(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_z}{aH} \right), \quad (22)$$

ここで非線形項となる δ と v_z の積は無視した。実空間と赤方偏移空間の座標値の差はゆらぎの 1 次以上の量なので、今回の様な線形近似では式 (22) の左辺の $\delta_s(\boldsymbol{s})$ を $\delta_s(\boldsymbol{x})$ と置き換えることができる。これをフーリエ変換すると

$$\tilde{\delta}_s(\boldsymbol{k}) = \tilde{\delta}(\boldsymbol{k}) - \frac{ik_z}{aH} \tilde{v}_z(\boldsymbol{k}), \quad (23)$$

となる。ここで式 (11),(13) より

$$\tilde{\delta}_s(\boldsymbol{k}) = \tilde{\delta}(\boldsymbol{k}) + f \frac{k_z}{k^2} \tilde{\delta}(\boldsymbol{k}), \quad (24)$$

これより、線形領域においては、赤方偏移空間での物質密度場 δ_s と実空間での物質密度場 δ の間にはフーリエ空間を介して以下の関係が成り立つ。

$$\tilde{\delta}_s(\boldsymbol{k}) = (1 + f_1\mu^2)\tilde{\delta}(\boldsymbol{k}), \quad (25)$$

ここで $\mu \equiv k_z/k$ である。

これより赤方偏移空間を介した実空間の重力ポテンシャル (式 (15)) は、

$$\tilde{\phi}^{(1)}(\boldsymbol{k}) = -\frac{\tilde{\delta}_s(\boldsymbol{k})}{(1 + \beta\mu^2)k^2}G(k), \quad (26)$$

とかける。

3 Results

ここで推定した特異速度で TNG の銀河カタログ内のフィールド銀河の速度を補正する。フィールド銀河とは銀河団に属さない銀河であり、銀河団に属する銀河団銀河とは区別する。補正している銀河をフィールド銀河に限定している理由としては、フィールド銀河は銀河団銀河に比べ非線形性が小さく、補正の効果がより顕れると考えた為である。

推定した特異速度を v_{est} とし、TNG のフィールド銀河の速度を v_{TNG}^f として、補正した速度 v' を以下のように表す。

$$v' = v_{\text{TNG}}^f - v_{\text{est}}. \quad (27)$$

推定した特異速度は各格子点上での速度であるので、この格子点上の速度を各銀河に割り当てる事で補正を行う。この割り当てに関しては格子点の近くにある銀河に対して CIC(Cloud In Cell) を用いている。また、格子点の数は 50^3 個である。

表 1 は補正の方法と平滑化スケール、速度の標準偏差を示し、図 1 は $\Sigma = 5h^{-1}\text{Mpc}$ で補正を施した後の速度分布と補正前の速度分布を実空間と赤方偏移空間でそれぞれ比較したものである。

4 Discussion

実空間に関しては、ZA、2LPT 共に平滑化スケールに依存するが標準偏差の 19~45% を減らすことができた、赤方偏移空間でカイザーの公式を用いて推定した線形密度場を使った場合についても、平滑化

表 1: 平滑化スケールと標準偏差

method	$\Sigma [h^{-1}\text{Mpc}]$	$\sigma [\text{km/s}]$
w/o		275.285
real ZA	5.0	151.046
	10	173.695
2LPT	5.0	221.241
	10	186.376
Kaiser ZA	5.0	171.65
	10	198.788
2LPT	5.0	217.017
	10	196.227

大きくなっている。速度分布を見ると分布中央の銀河の数は元の速度分布に比べ増えているが、分布の外側の銀河の数に関しては元の速度分布より増えている事が分かる。

今回は $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{s}$ の間の関係 (式 (1),(6)) を考慮せず補正を行なった。そのため、線形近似である ZA に関しては $\Sigma = 5h^{-1}\text{Mpc}$ で標準偏差を約 45% 減少させることに成功した。しかし 2LPT に関しては式 (3) の様に \mathbf{q} でのゆらぎの 2 次の量を無視出来ず、本来の値とズレが生じてしまったと考えられる。今回の補正ではそのズレが速度分布外側の過大評価に繋がったと考える。

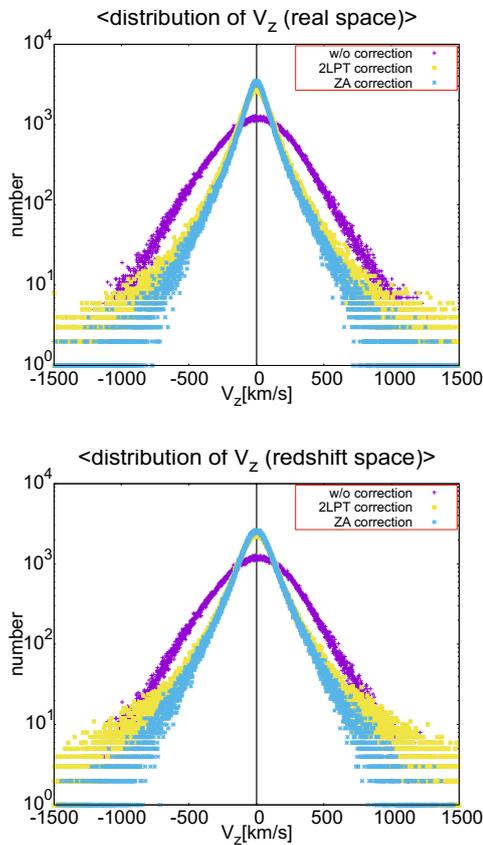


図 1: $\Sigma = 5h^{-1}\text{Mpc}$ での各補正における速度分布上図が実空間、下が赤方偏移空間での補正を表す。紫は補正をしていない速度分布を、青は ZA ので補正を、黄色は 2LPT での補正をそれぞれ示す。

スケールに応じて標準偏差を 21~37% 削減できた。2LPT での補正に関しては ZA に比べ、標準偏差が

5 Conclusion

実空間 (\mathbf{x}) における物質密度場を用いた ZA 近似での速度補正に関しては標準偏差を最大 45% 削減することが出来た。この補正の精度を上げるため非線形項 (ここでは 2LPT) を含めた補正を試みた。しかし、2LPT での補正に関しては ZA に比べ標準偏差の値が大きくなっている事から、非線形項を追加する為には \mathbf{q} での物質密度場を推定する必要があると考えられる。

また、物質密度場 δ に関しては TNG の粒子分布の質量を用いた。実際の銀河サーベイでは銀河の質量は測定出来ず、サーベイから得られた銀河数密度ゆらぎ δ_g にバイアス b を仮定し物質密度場 δ を求める。そのため、今後はこの理想的な状態において、速度補正の精度の更なる向上を測りたい。

Acknowledgement

指導教官である高橋龍一准教授にはこの様な興味深い研究テーマを提案、また右も左も分からなかった私を指導してくださり感謝申し上げます。

Reference

LIGO Scientific Collaboration, et al, 2017, Nature, 551
 Scoccimarro, 1998, MNRAS, 299, 1097-1118
 Nelson D., et al, 2019, Computational Astrophysics and Cosmology, 6, 2

重字 29

a new approach to model baryonic effects on future
cosmological surveys : the baryonification method

名古屋大学 理学研究科素粒子宇宙物理専攻
尹 聖煥

A new approach to model baryonic effects on future cosmological surveys : the baryonification method

SeongWhan Yoon(Nagoya University M1)

Abstract

For decades, cosmologists have uncovered evolution and formation of large scale structure of the Universe. On the other hand, for the small scale structure, due to complicated baryonic physics our understanding is under developed. considering that data from the small scale structure allows us to break degeneracy of cosmological models and parameters, understanding baryonic physics will be crucial for future survey projects. For this goal, likelihood analysis with simulations to study potential baryonic effects on future survey projects like Erosita and Euclid may be a good choice.

To approach the physics in this scale, a unique technique is developed, the ‘baryonification method’. In this method, the matter profile is modeled by displacement of particles in N-body simulations through parametrization to account for baryonic effects of stars and gas, instead of running full hydrodynamical simulations. this approach allows us to deal with baryonic uncertainty and high computational cost.

Also, an emulator is constructed. Based on the relation between limited known exact results and corresponding parameters, the authors find a function of parameters for power spectra. Power spectra can be calculated for any parameters without additional simulations. Combining these two tools with mock data, the authors perform the likelihood analysis to evaluate baryonic effects on cosmological constraints.

Especially, I focus on the interesting methodology and introduce the result for the Massive neutrino LambdaCDM model. We show how cosmological constants are constrained when we use the baryonification method.

1 Introduction

For several decades, our understanding about the universe has been enormously improved. despite this success, new data casts even more questions.

one of the best example is to observe small scale structures for cosmological purpose. cosmologists observe various structures such as galaxies, galaxy clusters, filaments etc. then they get high quality data. quantities like cosmic shear, cosmic convergence, power spectra can be computed. finally, they check whether these observational quantities are compatible with candidate theories or not.

there is one big problem. on a large scale, cosmology is easy because only gravitational interaction is relevant and linear theory can be applied. unfortunately, things are completely different on a small scale. one have to consider all the relevant complex interactions. instead of struggling with this difficulty, focusing on large scale structures may be an easy choice. however, understanding small scale ($k \sim 1h/Mpc$) structures will be a breakthrough for cosmology. I shall introduce interesting tools to deal with this problem.

2 The baryonification method

To model baryonic effects on cosmological observations, the ‘baryonification method’ has been proposed.

since we understand gravity well and computational cost is relatively low, we start from a gravity only simulation. we find a dark matter halo and compute the density profile. then the (Dark Matter Only,dmo) profile can be written as

$$\rho_{dmo}(r) = \rho_{nfw}(r) + \rho_{2h}(r). \quad (1)$$

$\rho_{nfw}(r)$ is a ‘truncated nfw profile’ motivated by simulations.

$$\rho_{nfw}(x) = \frac{\rho_{nfw,0}}{x(1+x)^2(1+y^2)^2}, \quad (2)$$

here, $x \equiv \frac{r}{r_s}$, $y \equiv \frac{r}{4 \times r_{200}}$. $\rho_{2h}(r)$, a ‘2-halo term’ motivated by the ‘effective halo theory’, shows relations between different haloes.

we want this profile to be more realistic one which reflects baryonic physics(Dark Matter Baryon, dmb).

$$\rho_{dmb}(r) = \rho_{gas}(r) + \rho_{cga}(r) + \rho_{clm}(r) + \rho_{2h}(r). \quad (3)$$

a modified density profile leads to mass

$$M_\chi(r) = 4\pi \int_0^r ds s^2 \rho_\chi(s), \quad (4)$$

χ corresponds to each component.
of course, total mass of a halo should be conserved.

$$M_{tot} = M_{gas}(\infty) + M_{cga}(\infty) + M_{clm}(\infty) = M_{nfw}(\infty).$$

also, we define mass fractions $f_\chi M_{tot} = M_\chi(\infty)$

2.1 The stellar component

first, we consider the stellar component. a profile for the central galaxy is approximated by a power law with exponential cutoff.

$$\rho_{cga}(r) = \frac{f_{cga} M_{tot}}{4\pi^{3/2} r^2} \exp \left[- \left(\frac{r}{2R_h} \right)^2 \right] \quad (5)$$

here, $R_h = 0.015r_{200}$ is the stellar half-light radius. apart from the central galaxy, there are other parts such as satellite galaxies or stellar haloes. for these structures, collisions are negligible. so they follow the NFW profile (but this should be modified. see the section 2.3).

next, we consider the total stellar abundance $f_{star} \equiv f_{cga} + f_{sga}$ where cga refers to the central galaxy and sga refers to the others (for example, the satellite galaxies)

$$f_{star}(M_{200}) = 0.09 \left(\frac{2.5 \times 10^{11} M_\odot / h}{M_{200}} \right)^{\eta_{star}} \quad (6)$$

$$f_{cga}(M_{200}) = 0.09 \left(\frac{2.5 \times 10^{11} M_\odot / h}{M_{200}} \right)^{\eta_{cga}}. \quad (7)$$

2.2 The gas component

according to observation, gas profile shows deviation from the NFW one (at out or innerskirt).

$$\rho_{gas}(r) = \frac{\rho_{gas,0}}{\left(1 + \frac{r}{0.1r_{200}} \right)^\beta \left(1 + \left(\frac{r}{\theta_{ej} r_{200}} \right)^2 \right)^{(\tau-\beta)/2}} \quad (8)$$

here, $\beta(M_{200}) = 3 - \left(\frac{M_c}{M_{200}} \right)^\mu$.
 f_{gas} is easy: $f_{gas} = \Omega_b / \Omega_m - f_{star}$.

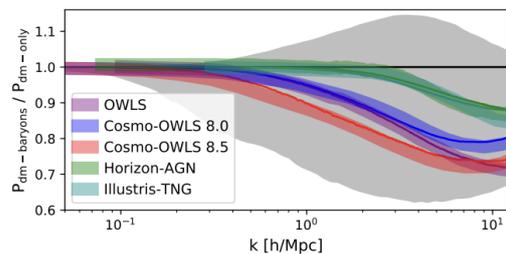


Figure 1: comparison between hydrodynamic (solid lines) and baryonified (colored bands) simulations. even though parameters are fitted by halo density profiles, we have few % errors for Power spectra $P(k)$. also, $P(k)$ are suppressed on a small scale.

2.3 The collisionless component

Next, the collisionless component. in this case, the NFW profile should be modified due to the baryonic components ('adiabatic relaxation').

as we know well, total angular momentum should be conserved. modeling the collisionless matter as spherical shells which can be expanded or contracted, we find $r_i M_i = r_f M_f$, M_i and M_f are the initial (dmo) and final (dmb) enclosed mass. but, better model has been proposed.

$$\frac{r_f}{r_i} - 1 = a \left[\left(\frac{M_i}{M_f} \right)^n - 1 \right] \quad (9)$$

we use $a=0.3$ and $n=2$. $M_i \equiv M_{nfw}(r_i)$,
 $M_f \equiv f_{clm} M_{nfw}(r_i) + M_{cga}(r_f) + M_{gas}(r_f)$

basically, computing a consistent final profile is not easy. iteration would be helpful.

$$\rho_{clm}(r) = \frac{f_{clm}}{4\pi r^2} \frac{d}{dr} M_{nfw}(r/\zeta) \quad (10)$$

here, $\zeta \equiv r_f/r_i$, $M_{clm}(r) = f_{clm} M_{nfw}(r/\zeta)$.
 $f_{clm} = \Omega_{dm}/\Omega_m + f_{sga}$ (with $f_{sga} = f_{star} - f_{cga}$).
in this way, an original profile is parametrized by five free parameters ($\theta_e, j, M_c, \mu, \eta_{star}, \eta_{cga}$). however, one can fix η_{star}, η_{cga} , since they don't play a major role in estimating cosmological parameters. replacing particles according to above profiles, we 'baryonificate' N-body results.

3 Emulator

we construct a model to compute approximate values for any parameters, based on some exact samples.

therefore, mathematically our goal is to find a function $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$. here, input vector is $\mathbf{X} = \{x_i | i \in 1, \dots, d; d \in \mathbb{N}\}$ and output value is $Y \in \mathbb{R}$. function $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ can be expanded using polynomial terms(Polynomial Chaos Expansion).

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \eta_\alpha \Psi_\alpha(\mathbf{X}) \quad (11)$$

$\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ is degree of polynomial, Ψ_α is an element of a multivariate orthonormal polynomial basis, η_α is the corresponding coefficient. again, the basis can be written by the new basis

$$\Psi_\alpha(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^d \phi_{\alpha_i}^{(i)}(x_i) \quad (12)$$

where $\phi_{\alpha_i}^{(i)}(x_i)$ is an orthonormal polynomial of degree α_i . due to the computational cost, considering infinite α_i is not practical. we only consider a finite number of terms.

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) \approx \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \eta_\alpha \Psi_\alpha(X) \quad (13)$$

\mathcal{A} forces us to consider the finite degree.

$$\mathcal{A}^{d,p} = \{\alpha \in \mathbb{N}^d, \|\alpha\|_1 < p\} \quad (14)$$

but this is not enough. we go further.

$$\mathcal{A}^{d,p,q,r} = \{\alpha \in \mathcal{A}^{d,p}, \|\alpha\|_q < p \ \& \ \|\alpha\|_0 < r\}. \quad (15)$$

here, $\|\alpha\|_q = \left(\sum_{i=1}^d \alpha_i^q\right)^{1/q}$.

in our case, what we want to compute is power spectra $P(k, z)$ (function of wavenumber k and redshift z) given the sample matrix D (n_{ED} elements), parameters(except k, z) θ (n_θ elements),

$$D = \sum_{i=1}^{n_{ED}} \lambda_i(\theta) PC(k, z) \quad (16)$$

$\lambda_i(\theta)$ is expanded.

$$\lambda_i(\theta) \approx \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \eta_\alpha \Psi_\alpha(\theta) \quad (17)$$

we expand the basis by normalized legendre polynomials.

$$\Psi_\alpha(\theta) = \prod_{l=1}^{n_\theta} \sqrt{2\alpha_l + 1} P_{\alpha_l}(\theta_l) \quad (18)$$

there are several ways to find 'good' η_α . for example, 'least-angle-regression' technique.

as we have seen, construction process for an emulator is not easy to understand. however, one may notice that this process is very similar to wavefunction calculation in quantum mechanics.

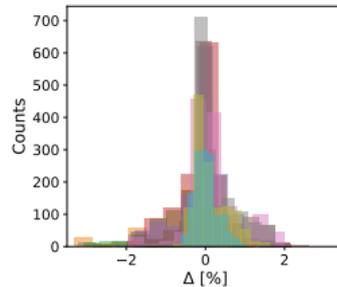


Figure 2: $\Delta = 100(P_{emu}/P_{true} - 1)$. $0 \leq z \leq 2$, different colors for k . note that we get only few % error for $P(k)$.

4 Mock data

although there are many planned projects, EUCLID and eROSITA will be assumed. EUCLID is an ESA mission to investigate the universe on a large scale. scientists will observe various galaxies with weak lensing effect in visible near-infrared wavelength. mass of an halo can be estimated.

eROSITA is the part of the Russian-German mission. scientists will perform the X-ray(up to 10KeV energy range) all-sky survey. one of its main scientific goal is to detect the hot intergalactic medium of galaxy clusters and groups and hot gas in filaments between clusters. from detected X-ray photons, we can estimate amount of gas in a halo.

with EUCLID and eROSITA setting, realistic mock data can be constructed. first, we run N-body(gravity-only) simulations. then, each simulation snapshot is 'baryonified'. then, we cut simulation boxes into a smaller part for different z . then these parts are arranged in right order(according to their z) to construct a lightcone. we can make more samples by rotating boxes or cutting boxes differently.

5 Results

we shall focus on the Λ CDM with massive neutrinos($\sum m_\nu = 0.1eV$, see Figure3) case.

this model is particularly interesting because not only it is the simplest one, but also baryon and massive neutrinos affect structures similarly on a small scale. we assume 4 data scenarios.

1. WL(Weak Lensing) only: WL data.
2. WL+X-ray: WL+X-ray data
3. WL+X-ray+CMB-p(planck)5: WL+X-ray data,

priors motivated by CMB-planck5

4.WL only(no baryon): WL data ,baryonic effects are ignored during likelihood analysis.

let's see Figure4. left panel shows that power spectra suppression on a small scale(which is very similar to figure 1). right panel shows posterior contours for Ω_m and $\sum m_\nu$. all scenarios cannot reliably exclude the massless neutrino cosmology. constraining priors using CMB data significantly enhances $\sum m_\nu$ constraint(but not Ω_m). if we ignore baryonic effects(during likelihood analysis), likelihood analysis lead to wrong conclusion($\Omega_m < 0.28$ & $\sum m_\nu \ll 0.1eV$) it is obvious that ignoring baryonic effects cannot be a viable option.

next, let's see Figure5. X-ray data strongly constrains baryonic parameters(μ, M_c, θ_{ej}) and Ω_b . other cosmological parameters are not satisfactory as they do. To constrain cosmological parameters, considering CMB(large scale data) would be beneficial.

6 summary

in this paper, we saw how they parametrize an halo profile to describe uncertain baryonic structures, how they accelerate parameter estimation with an 'emulator', how they use simulations to describe real survey projects. as a results, we confirmed that new tools introduced here work fairly well(% level errors). also, it became obvious that the Λ CDM with massive neutrinos model is pretty interesting and considering baryonic effects is important.

Reference

Schneider A et al., 2019, arXiv e-prints, p. arXiv:1910.08494
 Schneider A et al., 2019, arXiv e-prints, p. arXiv:1910.11357
 Schneider A et al., 2018, arXiv e-prints, p. arXiv:1810.08629
 Euclid collaboration et al., 2018, arXiv e-prints, p. arXiv:1809.04695

Parameter	Mock value	Prior (WL only, WL+X-ray)	Prior (WL+X-ray+CMB-p5)
Ω_b	0.049	[0.04, 0.06]	0.0010
Ω_m	0.315	[0.15, 0.42]	0.0084
σ_8	0.786	[0.66,0.90]	0.0073
n_s	0.966	[0.9, 1.0]	0.0044
h_0	0.673	[0.6, 0.9]	0.0060
Σm_ν	0.1	[0.0, 0.8]	[0.0, 0.8]
A_{1A}	1.0	[0.0, 2.0]	[0.0, 2.0]
$\log M_c$	13.8	[13.0, 16.0]	[13.0, 16.0]
μ	0.21	[0.1, 0.7]	[0.1, 0.7]
θ_{ej}	4	[2.0, 8.0]	[2.0, 8.0]

Figure 3: parameters and corresponding priors. numbers in square brackets show prior(flat) interval. for numbers-only(cosmological parameters in +CMB case), gaussian prior is assumed.(numbers are standard deviation).

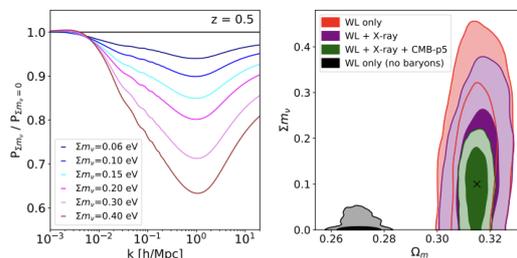


Figure 4: left: comparison of power spectra $P(k)$ for various neutrino mass($z=0.5$). right: posterior contours for Ω_m & $\sum m_\nu$. the black cross represents assumed real values. other parameters are marginalized.

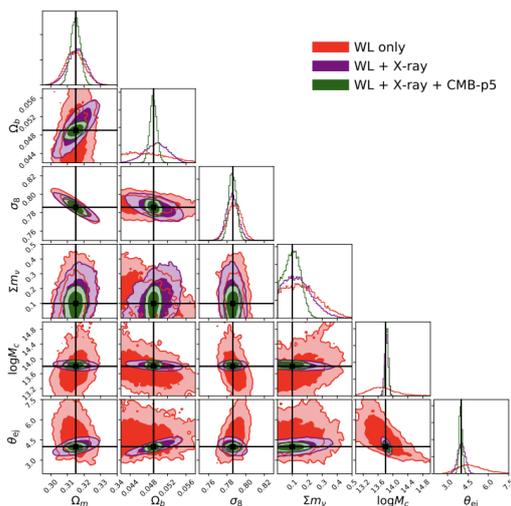


Figure 5: posterior contours for various parameters(for each case, other parameters are marginalized)

重字 30

CMB スペクトルの黒体からのズレの詳細測定で拓く
初期宇宙探査

東北大学 理学研究科天文学専攻
室越 琳生

CMB スペクトルの黒体からのズレの詳細測定で拓く初期宇宙探査

室越 琳生 (東北大学大学院 理学研究科)

Abstract

1965年のペンジアスとウィルソンによる宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background, CMB) の発見以降、CMBの観測は宇宙論の進展に重要な役割を果たしてきた。1989年に打ち上げられたCOBE(COSmic Background Explorer)のFIRAS(Far InfraRed Absolute Spectrophotometer)によって、CMBは温度2.725Kの黒体放射であり、黒体からのズレは $\lesssim 10^{-5}$ であることが示された[1]。しかし、宇宙膨張による相互作用頻度の低下に伴い、光子がバリオンとの熱平衡状態からずれると元の平衡に戻ることができなくなり、宇宙の晴れ上がりの十分前から黒体からのズレが生じる。CMBスペクトルの黒体からのズレは、宇宙の進化や暗黒物質の正体を探る重要な観測的ツールの一つである。本発表では[2]を参考に、相互作用と宇宙膨張のタイムスケールの比較から光子の分布関数の変遷を追い、黒体からのズレが生じる時期を解説する。

1 Introduction

ビッグバン直後、光子とバリオンは頻繁に相互作用をしており熱平衡状態にあった。しかし、赤方偏移 $z \lesssim 10^6$ では宇宙膨張によって相互作用の頻度が下がり、何らかのエネルギー注入によって光子がバリオンとの熱平衡状態からずれた時に元の平衡状態に戻ることができなくなる。これはCMBのスペクトルに黒体放射からの歪みが生じることを示唆する。この歪みを検出するためにPIXIEやPRISMといったミッションが計画されており、観測されれば宇宙論に大きな貢献をすることが期待される[3]。本発表では主に[2]のレビューを行い、CMBスペクトルの黒体からのズレがいつ、どのような物理過程で生じるかについて基本的な事項を解説する。

2 Relaxation time scales

CMB光子とバリオンの熱平衡状態をつくる基本的な物理過程はコンプトン散乱、制動放射、ダブルコンプトン散乱である。コンプトン散乱は光子数を保存したまま光子のエネルギーを再分配する(Comptonization)ので化学ポテンシャル $\mu \neq 0$ であり、光子をBose-Einstein分布にする。一方制動放射、ダブルコンプトン散乱は光子を吸収、放射するので $\mu = 0$ であり、光子をPlanck分布にする。光子が熱平衡状

態からずれた時にこれらの反応によって熱平衡状態が復元されるタイムスケールを計算する。ここで扱うのは宇宙の温度が電子の静止質量エネルギーよりも十分に小さい($k_B T_e \ll m_e c^2$, k_B : ボルツマン定数、 T_e : 電子の温度、 m_e : 電子質量、 c : 光速)のときであり、電子の速度を v としたときに v/c の2次までの近似で議論を進める。

2.1 Boltzmann equation

コンプトン散乱、制動放射、ダブルコンプトン散乱を考慮した時の光子のボルツマン方程式は

$$\frac{\partial n}{\partial t} = C_C + C_{br} + C_{dC} \quad (1)$$

である。ここで $n = n(\nu, t)$: 光子の分布関数(等方)、 C : 衝突項、添字は C : コンプトン散乱、 br : 制動放射、 dC : ダブルコンプトン散乱である。以下では、光子の周波数 ν を無次元量 $x_e = h\nu/k_B T_e$ を用いて表す。ここで h はプランク定数である。ボルツマン方程式は以下の式で与えられる[4]。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{x_e} &= \left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{\nu} + \left(\frac{\partial n}{\partial x_e}\right)_{\nu} \frac{dx_e}{dt} \\ &= C_C + C_{br} + C_{dC} - \left(\frac{\partial n}{\partial x_e}\right)_{\nu} \frac{x_e}{T_e} \frac{dT_e}{dt} \end{aligned} \quad (2)$$

2.2 Compton scattering

コンプトン散乱による光子のエネルギー再分配の過程を記述する方程式は Kompaneets 方程式として知られており、衝突項が以下のように与えられる [5]。

$$C_C = K_C \frac{1}{x_e^2} \frac{\partial}{\partial x_e} \left(x_e^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x_e} + n(1+n) \right) \right) \quad (3)$$

$$K_C \equiv n_e \sigma_{TC} \frac{k_B T_e}{m_e c^2} \sim 2.05 \times 10^{-30} (1+z)^4 \left(\frac{\Omega_b h_0^2}{0.226} \right) \left(\frac{1 - Y_{He}}{0.88} \right) s^{-1} \quad (4)$$

ここで n_e : 電子数密度、 σ_T : トムソン散乱断面積、 Ω_b : バリオンの密度パラメータ、 h_0 : ハッブルパラメータ、 Y_{He} : ヘリウム質量存在比である。

温度 T_e の熱平衡分布を持つ電子との一回のコンプトン散乱による光子の平均のエネルギー変化は $\Delta\varepsilon = \frac{4k_B T_e}{m_e c^2} \varepsilon$ である。平均自由時間は $t_{mf} = \frac{1}{n_e \sigma_{TC}}$ である [5]。N 回の散乱で光子のエネルギーがもともと光子が持っていたエネルギー程度変化するとすると、 $\varepsilon = N \Delta\varepsilon$ であるので、光子のエネルギーが変化する典型的な時間が以下のように与えられる。

$$t_C = N t_{mf} = (n_e \sigma_{TC})^{-1} \frac{m_e c^2}{4k_B T_e} \quad (5)$$

電子の温度を光子との熱平衡状態から少しずらしたとき、コンプトン散乱によって電子の温度が光子との平衡の温度に戻るまでのタイムスケール t_e を求める。電子は陽子などのイオンとクーロン力によって強く結びついているので、電子の温度が変化すると直ちにプラズマ全体の温度が変化する。したがって電子温度 $T_e = T_{e0} + \Delta T_e$ ($T_{e0} = T_\gamma$: 熱平衡状態のときの電子の温度)、イオンの数密度を n_i とすると、プラズマのエネルギー密度 E_p の時間変化は以下のように表せる。以下微量 ΔT_e の一次までとする。

$$E_p = \frac{3}{2} (n_e + n_i) k_B T_e \quad (6)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = \frac{3}{2} (n_e + n_i) k_B \frac{\partial \Delta T_e}{\partial t} \quad (7)$$

光子のエネルギー密度の時間変化は (3) を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_\gamma}{\partial t} &= \int \frac{2\nu^2}{c^3} 4\pi d\nu h\nu \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_C \\ &= \frac{4\sigma_T n_e}{m_e c} E_\gamma \Delta T_e \end{aligned} \quad (8)$$

と書ける。ここで $T_e = T_{e0}$ のとき $\frac{\partial E_\gamma}{\partial t} = 0$ を使った。プラズマのエネルギー変化量が電子と光子のコンプトン散乱によって光子に渡されるので、 $\frac{\partial E_\gamma}{\partial t} = -\frac{\partial E_p}{\partial t}$ である。

$$\frac{d\Delta T_e}{\Delta T_e} = -\frac{8\sigma_T}{3m_e c} \frac{n_e}{n_e + n_i} E_\gamma dt \quad (9)$$

$$\therefore \Delta T_e \propto e^{-t/t_e} \quad (10)$$

$$t_e^{-1} \equiv \frac{8\sigma_T}{3m_e c} \frac{n_e}{n_e + n_i} E_\gamma \quad (11)$$

このことから t_e が電子の温度が光子との熱平衡からずれたときに元の熱平衡状態に戻る典型的な時間を表すことが分かる。

2.3 Bremsstrahlung

制動放射による衝突項は以下の式で与えられる [6]。

$$C_{br} = K_{br} \frac{e^{-x_e}}{x_e^3} (1 - n(e^{x_e} - 1)) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} K_{br} &\equiv n_e \sigma_{TC} \frac{\alpha n_b}{(24\pi^3)^{1/2}} \left(\frac{k_B T_e}{m_e c^2} \right)^{-7/2} \left(\frac{h}{m_e c} \right)^3 g_{br} \\ &\sim 2.08 \times 10^{-27} (1+z)^{5/2} g_{br} \left(\frac{\Omega_b h_0^2}{0.226} \right)^2 \left(\frac{1 - Y_{He}}{0.88} \right) s^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで α : 微細構造定数、 n_b : バリオン数密度、 $g_{br} = g_{br}(x_e, T_e)$: ガウントファクターである。

光子が Planck 分布から少しずれたときに、制動放射による吸収や放射で光子数を調整することによって元の平衡状態に戻ろうとするタイムスケールを求める。 $T_\gamma = T_e$: 光子の温度のとき、Planck 分布は $n_{Pl} = \frac{1}{e^{x_e} - 1}$ とかける。 $n = n_{Pl} + \Delta n$ とすると、 Δn の一次までで

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = K_{br} \frac{e^{-x_e}}{x_e^3} (-\Delta n (e^{x_e} - 1)) \quad (14)$$

$$\therefore \Delta n \propto e^{-t/t_{br}} \quad (15)$$

$$t_{br}^{-1} \equiv K_{br} \frac{e^{-x_e}}{x_e^3} (e^{x_e} - 1) \quad (16)$$

と書ける。ここで $n = n_{Pl}$ のとき $\left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_B = 0$ を使った。このことから t_{br} が光子の分布が Planck 分布からずれた時に制動放射によって元の熱平衡状態に戻る典型的な時間を表すことが分かる。

2.4 Double Compton scattering

ダブルコンプトン散乱の反応式は $\gamma + e \leftrightarrow \gamma + \gamma + e$ である。ダブルコンプトン散乱による衝突項は以下の式で与えられる [6]。

$$C_{dC} = K_{dC} \frac{1}{x_e^3} (1 - n(e^{x_e} - 1)) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} K_{dC} &\equiv n_e \sigma_T \frac{4\alpha}{3\pi} \left(\frac{k_B T_e}{m_e c^2} \right)^2 g_{dC} I_{dC} \\ &\sim 7.57 \times 10^{-41} (1+z)^5 g_{dC} I_{dC} \\ &\times \left(\frac{\Omega_b h_0^2}{0.226} \right) \left(\frac{1 - \frac{Y_{He}}{2}}{0.88} \right) s^{-1} \end{aligned} \quad (18)$$

$$I_{dC} \equiv \int dx'_e x_e'^4 n(x'_e) (1 + n(x'_e)) \quad (19)$$

ここで $g_{dC} = g_{dC}(x_e)$: ガウントファクターである。制動放射と同様にしてダブルコンプトン散乱のタイムスケールを求める。

$$\frac{\partial \Delta n}{\partial t} = K_{dC} \frac{1}{x_e^2} (-\Delta n (e^{x_e} - 1)) \quad (20)$$

$$\therefore \Delta n \propto e^{-t/t_{dC}} \quad (21)$$

$$t_{dC}^{-1} \equiv K_{dC} \frac{1}{x_e^2} (e^{x_e} - 1) \quad (22)$$

このことから t_{dC} が光子の分布が Planck 分布からずれた時にダブルコンプトン散乱によって元の熱平衡状態に戻る典型的な時間を表すことが分かる。

2.5 Chemical potential

光子の分布関数を化学ポテンシャル $\mu \ll k_B T_e$, $T_\gamma = T_e$ の Bose-Einstein 分布であると仮定すると、 $x_e \ll 1$ に対する定常状態のボルツマン方程式 (2) は以下の式で書ける。以下 $\mu/k_B T_e$ を μ とする。

$$0 \sim -K_C \frac{\partial}{\partial x_e} \left(x_e^2 \frac{\partial \mu}{\partial x_e} \right) + (K_{br} + K_{dC}) \frac{\mu}{x_e^2} \quad (23)$$

$\mu(x_e) = \mu_C e^{-x_C/x_e}$ は $\mu(0) = 0$ を満たす (23) の解である。ここで μ_C は $x_C \ll x_e \ll 1$ のときの μ の値である。また、 $x_C = \left(\frac{K_{br} + K_{dC}}{K_C} \right)^{\frac{1}{2}}$ は $\mu(x_e)$ が小さくなる典型的な周波数 (x_e) を表す。よって $x_e \gtrsim x_C$ のとき $\mu \neq 0$ であり光子数は保存し、逆に $x_e \lesssim x_C$ のときは μ が小さくなるので光子の生成や消滅が効いてくる。

3 Generation of CMB spectral distortion

2章で求めたパラメータを用いて CMB のスペクトルのズレが生じる時期を見積もる。

宇宙の晴れ上がり前の $2 \times 10^3 \leq z \leq 10^7$ での $x_e = 0.01$ における緩和時間と Hubble time ($1/H$, H: Hubble rate) を図 1 にプロットした。ここで $g_{br} = 2.99$, $g_{dC} = 1.005$, $I_{dC} = 25.976$ とした [7]。各反応が光子スペクトルに影響を与えるには、そのタイムスケールが Hubble time より短くなければならない。図 1 から、 $x_e = 0.01$ ではダブルコンプトン散乱 (黄)、制動放射 (赤) は $z \gtrsim 10^5$ 、コンプトン散乱 (青) は $z \gtrsim 5 \times 10^4$ で効くことが分かる。また、電子温度の緩和時間 (水色) は常に Hubble time より短いので、電子の速度分布は非常に良い精度で温度 $T_e = T_\gamma$ の Maxwell-Boltzmann 分布にあると考えて良い。

次に $x_e < 1$ での x_C の赤方偏移依存性を図 2 に示し、光子分布の周波数、赤方偏移依存性を考える。ここで x_H (赤線) は制動放射とダブルコンプトン散乱の確率が Hubble rate と等しくなる ($t_{br}^{-1} + t_{dC}^{-1} = H$) とときの x_e を表している。制動放射とダブルコンプトン散乱の確率が Hubble rate よりも大きくなる $x_e < x_H$ のときに制動放射とダブルコンプトン散乱が効く。

2.5 章から $x_e > x_C$ のときは化学ポテンシャル $\mu \neq 0$ であり光子数が保存するので、光子の放射や吸収を伴う制動放射やダブルコンプトン散乱は効かな

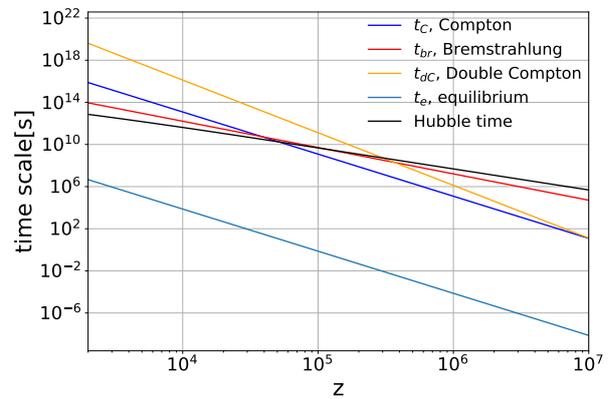


図 1: 各タイムスケールの赤方偏移依存性 ($x_e = 0.01$)

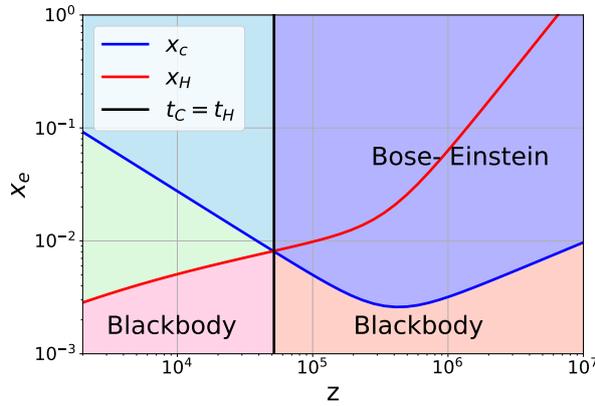


図 2: $x_e = x_{c/H}$ の赤方偏移依存性

い。図2の黒線は $t_c = 1/H$ を表しており、 $z \lesssim 5 \times 10^4$ となる水色の領域ではコンプトン散乱が効かなくなる。一方青色の領域はコンプトン散乱によって熱平衡状態を保つことができ、光子は Bose-Einstein 分布になる。 $x_e < x_C$ のときは $\mu \sim 0$ なので光子の放射や吸収が生じ、さらに $x_e < x_H$ では制動放射とダブルコンプトン散乱によって熱平衡状態を保つことができるので黒体放射のスペクトルを示す。 $z \gtrsim 5 \times 10^4$ ではコンプトン散乱も起こるので、赤色の領域は制動放射やダブルコンプトン散乱による光子の生成、吸収と共にコンプトン散乱による光子のエネルギー再分配も生じる。一方 $z \lesssim 5 \times 10^4$ のピンク色の領域では制動放射とダブルコンプトン散乱のみで Planck 分布を維持している。 $x_H < x_e < x_C$ の緑色の領域ではいずれの散乱過程でも熱平衡状態を保つことができない。

4 Summary and Future work

宇宙膨張と散乱過程のタイムスケールを比較することで、光子がバリオンとの熱平衡状態からずれた時にコンプトン散乱は $z \gtrsim 5 \times 10^4$ 、制動放射とダブルコンプトン散乱は低周波数の方がタイムスケールが短くなり、 $x_e = 0.01$ では $z \gtrsim 10^5$ であれば元の熱平衡状態を復元できることが分かった。また、黒体のスペクトルをつくるのは光子の分布が Planck 分布となる制動放射とダブルコンプトン散乱であり、コンプ

トン散乱のみの熱平衡状態では Bose-Einstein 分布となるため黒体放射のスペクトルを実現できない。コンプトン散乱、制動放射、ダブルコンプトン散乱によって Planck 分布を維持できるのは $x_e \lesssim 0.01$ であれば $z \gtrsim 5 \times 10^4$ であり、 $x_e \gtrsim 0.01$ では $z \sim 10^6 - 10^7$ で黒体からずれ始める。よって晴れ上がり前に光子は Planck 分布を維持できなくなり、CMB スペクトルの黒体からのズレが生じることが分かった。

今後の課題としては、まず CMB スペクトルの黒体からのズレからどのような宇宙論的情報が引き出せるかを明らかにすることが挙げられる。将来的には宇宙背景ニュートリノ (CNuB) スペクトルの黒体からのズレからどのような宇宙論研究が展開できるのかを調べたいと考えている。

5 Reference

1. J. C. Mather et al., *Astrophys. J.* 420, 439 (1994)
2. R. Khatri, R. A. Sunyaev, and J. Chluba, *Astron. Astrophys.*, 540, A124 (2012)
3. Chluba, J., Abitbol, M.H., Aghanim, N. et al., *Exp Astron.*, (2021)
4. L. Danese and G. de Zotti, *Riv. Nuovo Cimento*, 7, 277 (1977)
5. G. B. Rybicki, A. P. Lightman, *Radiative process in astrophysics*, (1985)
6. A. P. Lightman, *Astrophys. J.* 244, 392 (1981)
7. J. Chluba and R. A. Sunyaev, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 419, 1294 (2012)

重字 31

Cosmic Birefringence による Axion-Like Particle の 探
査と制限

京都大学 理学研究科物理学宇宙物理学専攻
笥 嵩文

未提出

重字 32

Fuzzy Dark Matter (FDM) ハローモデルの構築と
FDM の質量制限

東京大学 理学系研究科物理学専攻
河合 宏紀

Fuzzy Dark Matter (FDM) ハローモデルの構築と FDM の質量制限

河合 宏紀 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

Fuzzy dark matter (FDM) は、質量が $m \sim 10^{-24} - 10^{-20}$ eV 程度の、重力場に結合した自己相互作用しないスカラー粒子であり、Cold dark matter (CDM) に代わる有力なダークマター候補として近年注目されている。FDM シミュレーション結果によると、FDM ハローには量子力学的干渉効果に由来する粒状構造が存在することが知られている。この粒状構造が生成する密度揺らぎを調べ、観測データと比較することで FDM 質量に制限をかけられる。そこで我々はまず、FDM ハローを視線方向に射影した密度場の局所的領域における物質パワースペクトルの解析的モデルを構築した。次に、この解析的モデルから得られた Einstein 半径近傍におけるパワースペクトルと、強重力レンズ系の観測結果 SDSS J0252+0039 から得られたパワースペクトルを比較し、FDM 質量制限について議論した。現在の観測結果では、FDM 質量に制限をかけられなかったが、ALMA 望遠鏡を用いた将来の観測で FDM の典型的な質量 $m \sim 10^{-22}$ eV 近傍に対する強い制限をかけられることが分かった。

1 序論

標準的な Λ CDM 宇宙論モデルでは、タックマターとして Cold dark matter (CDM) モデルを仮定しており、宇宙の大規模構造の観測結果を非常によく説明することに成功している。しかし、約 1 Mpc 以下のスケールに注目すると、CDM による理論予言と観測との間に不一致が見られ、総称して小スケール問題と呼ばれる (e.g. Boylan-Kolchin & Bullock 2017, for review)。小スケール問題には、コア・カスプ問題、銀河の回転曲線の多様性問題、ミッシング・サテライト問題、Too-big-to-fail 問題等が挙げられる。これらの小スケール問題を解決するようなダークマターモデルを探す研究が盛んに行われている。

Fuzzy dark matter (FDM) は、小スケール問題を解決する可能性のある有力なダークマター候補の一つとして近年注目を集めている。FDM は、質量が $m \sim 10^{-24} - 10^{-20}$ eV 程度の、重力場に結合した自己相互作用しないスカラー粒子である。FDM は、 $\mathcal{O}(1)$ kpc 程度のドブロイ波長内では波動性が支配的となり、小スケール問題の解決に重要な役割を果たす一方で、それより大きなスケールでは粒子的振る舞いをし、CDM と同じ大規模構造形成を促す。FDM ハローの構造は、FDM シミュレーション (Schive, H.Y. et al. 2014) によって明らかにされた。それによると、

中心付近はドブロイ波長程度の大きさのソリトンコアからなり、その外側領域は CDM ハローと同様に Navarro-Frenk-White (NFW) プロファイルに従うことが分かった。また、FDM ハローの中には、量子力学的干渉効果に由来する粒状構造が無数にできることが分かった。

観測面では近年、宇宙に存在する銀河より小さい構造体の分布を調べるために、強重力レンズ効果を用いる新たな解析手法が開発された。Hezaveh, Y. et al. (2016) は、強重力レンズを用いてレンズ天体の射影密度場の物質パワースペクトルを推定する枠組みを構築した。また、Diaz, R. et.al. (2018) では、収束場のパワースペクトルを推定する手法を構築した。Bayer, D. et al. (2018) は、これらの手法を銀河-銀河の強重力レンズ系 SDSS J0252+0039 に適用し、射影密度場の物質パワースペクトルに対する制限を得た。

我々は FDM モデルの妥当性を調べるために、以下の研究を行った。まず、FDM ハロー射影密度場の局所的領域における物質パワースペクトルの解析的モデルを、シミュレーション結果を参考に構築した。次に、この解析的モデルから得られたパワースペクトルと、強重力レンズ系の観測から得られたパワースペクトルを比較し、FDM の質量制限について議論した。本稿では、これらの研究結果をまとめる。

2 FDM ハロー射影密度場の局所的領域における物質パワースペクトルの解析的モデル

FDM ハローの内部には、ドブロイ波長程度の大きさの粒状構造が無数に存在する。我々は、FDM ハロー内における粒状構造を、密度場のアンサンブル平均がハロープロファイル (e.g. NFW プロファイル) に従うようにランダムに配置するものとした。FDM の分布はこのランダムに配置した粒状構造の重ね合わせで書ける。2.1 節では、上記の FDM ハローを定式化するとともに、この 3 次元密度場を視線方向に射影して得られた射影密度場の、局所的領域における物質パワースペクトルの計算結果を示す。2.2 節ではバリオンを加えた場合について述べる。バリオンは粒状構造に依存せず滑らかなプロファイル (e.g. Hernquist プロファイル) で与えられるものとした。2.3 節では、ダークマターとバリオンのプロファイルとして、それぞれ NFW と Hernquist プロファイルに選んだ場合のパワースペクトルとそのパラメータ依存性について議論する。

2.1 FDM-only の場合

ハロープロファイルを $\rho_h(\vec{r})$ で与えた時に、中心が \vec{r}' にある粒状構造の質量 $M_c(\vec{r}')$ は、粒状構造の体積 V_c を用いて、

$$M_c(\vec{r}') = \rho_h(\vec{r}')V_c \quad (1)$$

と仮定した。粒状構造の半径はドブロイ波長を用いて、

$$V_c = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\lambda_c}{2}\right)^3 \quad (2)$$

で与えるものとする。ここで λ_c は FDM のドブロイ波長を表し、FDM 質量 m 、速度分散 v を用いて、 $\lambda_c = 2\pi\hbar/mv$ と表せる。速度分散 v は定数であると、それゆえ粒状構造の大きさを一定と仮定し計算を進める。

中心が \vec{r}' にある粒状構造内の密度分布は、正規化された質量プロファイル関数 $u(\vec{r}-\vec{r}')$ を用いて、

$$\rho_c(\vec{r};\vec{r}') = M_c(\vec{r}')u(\vec{r}-\vec{r}') \quad (3)$$

で与えられる。正規化条件は、

$$\int_V d^3r u(\vec{r}-\vec{r}') = \int_{V_c(\vec{r}')} d^3r u(\vec{r}-\vec{r}') = 1 \quad (4)$$

である。ここで、 V はハローの体積を表し、 $V_c(\vec{r}')$ は粒状構造より大きく、ハローサイズよりは十分小さいような中心座標 \vec{r}' の球の体積を表す。この体積内ではハロープロファイル $\rho_h(\vec{r})$ は一定とする。

これらの設定から、ハロー内の FDM の密度分布 $\rho_f(\vec{r})$ は、

$$\begin{aligned} \rho_f(\vec{r}) &= \int_V d^3r' \rho_c(\vec{r};\vec{r}')n(\vec{r}') \\ &= \int_V d^3r' \rho_h(\vec{r}')V_cn(\vec{r}')u(\vec{r}-\vec{r}') \end{aligned} \quad (5)$$

と書ける。ここで、 $n(\vec{r})$ は粒状構造の中心の数密度を表す。粒状構造は数密度のアンサンブル平均が $\langle n(\vec{r}) \rangle = 1/V_c$ となるようにランダムに配置する。そうすると、密度場のアンサンブル平均は、ハロープロファイルに一致する。つまり、

$$\langle \rho_f(\vec{r}) \rangle = \rho_h(\vec{r}) \quad (6)$$

を満たす。

3 次元密度場から、視線方向 (z 軸方向) に積分することで射影密度場 $\Sigma_f(\vec{x})$ が得られ、

$$\begin{aligned} \Sigma_f(\vec{x}) &\equiv \int_Z dz \rho_f(\vec{r}) \\ &= \int_Z dz \int_{V_c(\vec{r}')} d^3r' \rho_h(\vec{r}')V_cn(\vec{r}')u(\vec{r}-\vec{r}') \end{aligned} \quad (7)$$

と表せる。ここで \vec{x} は、2 次元射影密度場における座標を表しており、ハローの中心を通るように原点を取っている。また、アンサンブル平均は、

$$\begin{aligned} \langle \Sigma_f(\vec{x}) \rangle &= \int_Z dz \langle \rho_f(\vec{r}) \rangle = \int_Z dz \rho_h(\vec{r}) \\ &\equiv \Sigma_h(\vec{x}) \end{aligned} \quad (8)$$

で与えられる。

2 次元射影密度場のある点 \vec{x} 近傍の密度揺らぎは、

$$\delta(\vec{x}) \equiv \frac{\Sigma_f(\vec{x}) - \Sigma_h(\vec{x})}{\Sigma_h(\vec{x})} \quad (9)$$

と表される。この密度揺らぎをフーリエ変換して得られる $\tilde{\delta}_{\vec{l}}$ を用いて、物質パワースペクトルは、

$$\langle \tilde{\delta}_{\vec{l}} \tilde{\delta}_{\vec{l}'} \rangle \equiv S_{\epsilon} \delta_{\vec{l}+\vec{l}',0}^{(2)} P(l). \quad (10)$$

と定義される。ここで、 S_{ϵ} は、 \vec{x} 近傍の十分小さい 2 次元球領域を表す。物理量 \vec{l} は 2 次元波数ベクトルを表す。異なる点における数密度には相関がない、つまり、 $\langle n(\vec{r})n(\vec{r}') \rangle = \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')$ を仮定して、式 (10) の左辺を計算することで、最終的に求めたいパワースペクトルが得られ、

$$P_{\text{f}}(l) = \frac{V_{\text{c}}}{r_{\text{h}}(\vec{x})} |\tilde{u}_{\vec{l}}|^2 \quad (11)$$

となる。ここで、 $r_{\text{h}}(\vec{x})$ は、ハローの有効半径であり、

$$r_{\text{h}}(\vec{x}) \equiv \frac{\Sigma_{\text{h}}^2(\vec{x})}{\int_{\text{Z}} dz \rho_{\text{h}}^2(\vec{r})} = \frac{(\int_{\text{Z}} dz \rho_{\text{h}}(\vec{r}))^2}{\int_{\text{Z}} dz \rho_{\text{h}}^2(\vec{r})}. \quad (12)$$

と定義した。また、 $\tilde{u}_{\vec{l}}$ は、質量プロファイル関数 $u(\vec{r})$ を 3 次元フーリエ変換して、波数 \vec{k} の z 成分を 0 として得られる関数である。つまり、

$$\tilde{u}_{\vec{l}} \equiv \tilde{u}_{\vec{k}} |_{k_z=0}. \quad (13)$$

である。

以下では簡単のため、球対称系を考えることにする。これまで引数としてベクトル量になっていたものは、球対称系ではベクトルの長さの依存になる。

2.2 バリオンを加えた場合

バリオンは FDM の粒状構造と無関係に滑らかに存在すると考える。バリオンプロファイルを $\rho_{\text{b}}(r)$ とすると、全密度 $\rho(r)$ は

$$\rho(r) = \rho_{\text{f}}(r) + \rho_{\text{b}}(r). \quad (14)$$

で表され、射影密度場は、

$$\begin{aligned} \Sigma(x) &= \Sigma_{\text{f}}(x) + \int_{\text{Z}} dz \rho_{\text{b}}(r) \\ &\equiv \Sigma_{\text{f}}(x) + \Sigma_{\text{b}}(x) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。2.1 節と同じ過程で計算を進めることによって、バリオンを含めた FDM ハロー射影密度場の局所的領域における物質パワースペクトルは、

$$P(l) = \left(\frac{\Sigma_{\text{h}}(x)}{\Sigma_{\text{h}}(x) + \Sigma_{\text{b}}(x)} \right)^2 P_{\text{f}}(l) \quad (16)$$

となる。

2.3 パラメータ依存性

ハロープロファイル、バリオンプロファイルをそれぞれ NFW プロファイルと Hernquist プロファイルに選んだ。NFW プロファイルの質量集中度および Hernquist プロファイルの有効半径は、それぞれハローの全質量 M_{h} とバリオン全質量 M_{s} と関係式が知られている。我々はこれらを利用し、2つのプロファイルを一意に決めるパラメータを、ハローの全質量 M_{h} と質量比 $M_{\text{s}}/M_{\text{h}}$ とした。

ドブロイ波長 $\lambda_{\text{c}} = 2\pi\hbar/mv$ は、速度分散 v を

$$v = \sqrt{\frac{3GM_{\text{tot}}}{2R_{\text{vir}}}}, \quad (17)$$

で決めることにより、一定値に定めた。ここで、 M_{tot} は全質量、 R_{vir} はハローのビリアル半径である。質量プロファイル関数 $u(r)$ は、分散がドブロイ波長の半分であるような正規化されたガウス関数とした。フーリエ変換すると、

$$\tilde{u}_l = \exp\left(-\frac{\lambda_{\text{c}}^2 l^2}{8}\right). \quad (18)$$

となる。ここで必要になるパラメータは FDM 質量 m だけである。

最後に射影密度場のハローの中心からの距離 x を決めれば、パワースペクトルが得られる。図 1 では、 $M_{\text{h}}, M_{\text{s}}/M_{\text{h}}, m, x$ の 4 パラメータの内、FDM 質量 m を変えた時のパラメータ依存性を示した。式 (11),(16) より、パワースペクトルの平らな部分の高さは粒状構造の体積 $V_{\text{c}} \propto m^{-3}$ に比例し、実際にそのような依存性が見られている。また、落ち始めは $l \sim 1/\lambda_{\text{c}} \propto m$ となっている。このようにパワースペクトルが FDM 質量に対して大きく依存することから、局所的領域における物質パワースペクトルを調べることは、FDM 質量を決めるための有効な手法であることが示唆される。

3 観測結果との比較

2 章で構築したパワースペクトルモデルと、強重力レンズ系の観測から得られたパワースペクトルの制限を比較することで、FDM 質量の制限を得る。3.1 節ではまず、物質パワースペクトルを無次元収束場

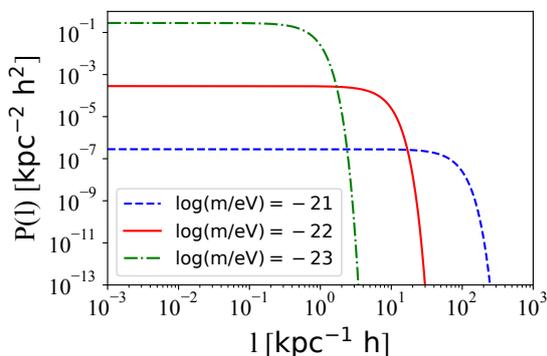


図 1: パワースペクトルの FDM 質量依存性。他の 3 つのパラメータは $M_h = 10^{13} h^{-1} M_\odot$, $M_s/M_h = 0.01$, $x = R_{\text{vir}}/10$ とした。ここで h はハッブル定数である。

パワースペクトルに変換する。3.2 節では、この無次元収束場パワースペクトルを用いて、FDM 質量の制限について議論する。

3.1 無次元収束場パワースペクトル

無次元収束場パワースペクトルは、物質パワースペクトルから

$$\Delta_{\delta\kappa}^2(l) = 2\pi l^2 \left(\frac{\Sigma(x)}{\Sigma_{\text{cr}}} \right)^2 P(l) \quad (19)$$

によって変換できる。ここで、 Σ_{cr} は臨界面密度である。物理量 D_s, D_d, D_{ds} をそれぞれ、観測者からレンズ天体、観測者から光源天体、レンズ天体から光源天体までの角径距離とすると、臨界面密度は、

$$\Sigma_{\text{cr}} = \frac{c^2}{4\pi G} \cdot \frac{D_s}{D_d D_{\text{ds}}} \quad (20)$$

で表せる。

3.2 FDM 質量の制限

銀河-銀河間の強重力レンズ系 SDSS J0252+0039 の解析から、Einstein 半径近傍では、波長 0.5 kpc の密度揺らぎに対して $\Delta_{\delta\kappa}^2 < 1$ 、1 kpc に対して $\Delta_{\delta\kappa}^2 < 0.1$ 、3 kpc に対して $\Delta_{\delta\kappa}^2 < 0.01$ の制限が得られている (Bayer, D. et al. 2018)。

図 2 の橙色の領域は、現在の制限を表している。異なる線は、上記のパラメータと異なる FDM 質量に対して得られた解析的モデルによる計算結果である。この図から、現在の観測結果からは、FDM 質量に制限がかけられないことが分かる。一方、黒色の領域は、将来的に ALMA 望遠鏡を用いて観測したときに期待される制限である (Hezaveh, Y. et al. 2016)。将来的に FDM の典型的な質量 $m \sim 10^{-22}$ eV 近傍に厳しく制限がかけられることが分かる。

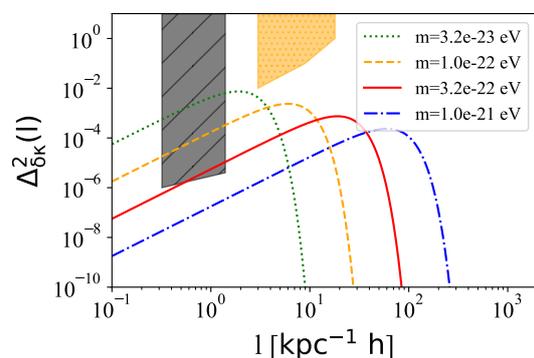


図 2: SDSS J0252+0039 観測による FDM 質量の制限。橙色領域は現在のパワースペクトルの制限 (Bayer, D. et al. 2018) であり、黒色領域は将来の観測から期待される制限 (Hezaveh, Y. et al. 2016) である。理論線には $M_h = 6.3 \times 10^{12} h^{-1} M_\odot$, $M_s = 2.0 \times 10^{11} h^{-1} M_\odot$, $x = 3.1 h^{-1}$ kpc を用いた。

Reference

- Boylan-Kolchin, M., Bullock, J. S., & Kaplinghat, M. 2011, MNRAS, 415, L40
- Schive, H.-Y., Chiueh, T., & Broadhurst, T. 2014, NaturePhysics, 10, 496
- Hezaveh, Y., Dalal, N., Holder, G., et al. 2016, JCAP, 2016,048
- Diaz Rivero, A., Cyr-Racine, F.-Y., & Dvorkin, C. 2018, PhRvD, 97, 023001
- Bayer, D., Chatterjee, S., Koopmans, L. V. E., et al. 2018, arXiv e-prints, arXiv:1803.05952.

重字 33

Early Dark Energyによる Hubble Tension の解決

名古屋大学 理学研究科素粒子宇宙物理学専攻
林 慎太郎

Early Dark Energy による Hubble Tension の解決

林 慎太郎 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

標準宇宙論モデル (ΛCDM モデル) は、モデルに依存するかどうかによって、現在の宇宙膨張率を表すハッブル定数、 H_0 の観測による見積もりが異なることが指摘されている。この問題は Hubble Tension と呼ばれている。また、バリオン音響振動 (BAO) の観測は、ΛCDM モデルにおける CMB 最終散乱面での音響ホライズン r_s^* の見積もりが大きすぎるのが Hubble Tension と関係していることを示唆している。そのため、Hubble Tension を解決するモデルは、 r_s^* を ΛCDM モデルより小さくするような、新しい物理を要請すると考えられる。[1]

その一つとして提案されている Early Dark Energy (EDE) は、再結合前のエネルギー密度を増やすことで、ΛCDM モデルよりも r_s^* を小さくし、 H_0 を大きくする。本発表では従来の EDE モデル [2] 及び、[2] とは異なる EDE モデルとして、再結合前に短寿命の偽真空崩壊を連続して起こすという Chain EDE モデル [3] を紹介するとともに、従来のモデルの Hubble Tension 解決の問題点と改善点、Chain EDE モデルによる Hubble Tension 解決の可能性について議論する。

1 Introduction

H_0 の見積もりについて、さまざまな観測が行われている。CMB や BAO+ビッグバン元素合成のような、初期宇宙における観測は宇宙論モデルに依存し、ΛCDM モデルにおいては全て低い H_0 を示す。これに対し、距離はしごをメインにしたモデルに依存しないもの (例えば SH_0ES は $H_0 = 74.03 \pm 1.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [4]) は高い H_0 を示している。初期、後期ともに一貫しているため、系統誤差でこの問題を説明することは難しい。そのため ΛCDM モデルを変更し、モデル依存する観測による H_0 を大きくする必要があると考えられる。

2 Sound Horizon Problem

ある redshift での音響ホライズン $r_s(z)$ は音速を $c_s(z)$ とすると、

$$r_s(z) = \int_z^\infty dz \frac{c_s(z)}{H(z)} \quad (1)$$

音響ホライズンの角スケール θ_s を観測することができれば、

$$\theta_s(z) = \frac{r_s(z)}{d_A(z)} \quad (2)$$

$$d_A(z) = \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \quad (3)$$

を用いることで、その redshift までの角直径距離 $d_A(z)$ 、さらにはそのモデルにおける、各 redshift での $H(z)$ の値を知ることができる。

宇宙初期において、バリオンが光子との結合によってひきづられる、バリオン音響振動 (BAO) の終了時の redshift を z^{drag} とし、その時の音響ホライズンを $r_s^{drag} = r_s(z^{drag})$ とすると、 $\theta_s^{drag} = \theta_s(z^{drag})$ の観測結果は $c/(H_0 r_s^{drag}) = 29.54 \pm 0.406$ の制限を与える。ここで、横軸に r_s^{drag} 、縦軸に H_0 をとった $r_s^{drag}-H_0$ 平面を考える。

図 1 から明らかのように、ΛCDM モデルでは、 SH_0ES 、BAO、CMB の三つを同時に一致させることはできない。Hubble Tension 解決には、CMB から見積もられる H_0 を大きくするだけでは十分でなく、音響ホライズンも標準モデルよりも約 7% 小さくする必要がある。

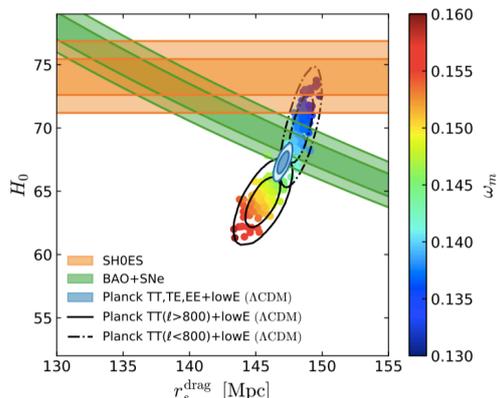


図 1: $r_s^{\text{drag}}-H_0$ plane. オレンジのバンドは SH0ES、緑のバンドは BAO、そして青のコントアが CMB である。ここで、CMB はそのデータによって ($l < 800$ か $l > 800$) ω_m の見積もりが変わり、 $r_s^{\text{drag}} - H_0$ 平面上での制限が異なる [1]

3 Early Dark Energy

Hubble Tension 解決のモデルの一つとして提案されているのが Early Dark Energy (EDE) である。これは再結合前のエネルギー密度を標準モデルよりも増やすことで $H(z)$ を大きくし、式 (1) より、最終散乱面での音響ホライズン $r_s^* = r_s(z^*)$ を小さくする。ここで z^* は最終散乱面での redshift である。この r_s^* は先程の r_s^{drag} よりも少し小さいが、この違いは Hubble Tension を扱う上では重要ではない。観測から $\theta_s^* = \theta_s(z^*)$ は正確に測られているため、式 (2)、(3) より H_0 が大きくなる。

全体のエネルギー密度 ρ_{tot} に対する EDE のエネルギー密度 ρ_{EDE} を $f_{\text{EDE}} = \rho_{\text{EDE}}/\rho_{\text{tot}}$ とする。Hubble Tension を解決するために、EDE は、常に subdominant で、再結合前に $f_{\text{EDE}} \simeq 0.1$ になり、low-redshift の cosmic 進化を変えないように放射と同じかそれより早く崩壊し切らなければならない。

3.1 Original EDE

EDE のモデルとして、まず [2] のモデルについて紹介する。EDE の崩壊時間から軽いスカラー場である必要があり、そのようなモデルは axion のみであ

る。そのため、axion のポテンシャルを一般化したポテンシャル、

$$V(\phi) = V_0 \left(1 - \cos\left(\frac{\phi}{f}\right)\right)^n \quad (4)$$

を考える。崩壊スピードの関係から $n \geq 2$ であることが要請される。

3.2 Chain EDE

Chain EDE モデル [3] の ρ_{EDE} は、偽の真空に蓄えられたスカラー場のエネルギー密度 ρ_ϕ と暗黒放射のエネルギー密度 ρ_{DR} の和 ($\rho_{\text{EDE}} = \rho_\phi + \rho_{\text{DR}}$) で表される。 ρ_ϕ は真空崩壊によって減少し、減少分は暗黒放射 (例えば重力波) となると考えられる。そして、暗黒放射は状態方程式パラメータ w_{DR} に従って減少する。

偽真空にある間により安定な真空のバブルが生まれ、成長し、非等方性となる。そのような非等方性が CMB には見られないため、一つ一つの偽真空は短寿命でなければならない。そのため、十分な時間、真空崩壊が続くためには 600 回以上の偽真空崩壊が起こる必要がある。この連続した真空崩壊を可能にするために、ポテンシャルとして、

$$V(\phi) = -\mu^3 \phi + \lambda^4 \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) + V_0 \quad (5)$$

のような、傾いたコサインを考える。ただし、このままでは真空崩壊がずっと続いてしまうため、もう一つのスカラー場を導入することによるストップメカニズムが考えられている。

3.3 f_{EDE}

二つのモデルの f_{EDE} は図 2 のようになる。 w_{DR} については $1/3 < w_{\text{DR}} < 1$ であると考えられる。[5]

真の w_{DR} は二つの極値 $1/3$ と 1 の間にあると推測されるため、図 2 より、chain EDE と original EDE の f_{EDE} は同じような振る舞いをするのが考えられる。ただし、chain EDE モデルはスカラー場の零点振動がないため f_{EDE} には振動する特徴がない。original EDE モデルの $r_s^{\text{drag}} - H_0$ plane は図 3 のようになる。この図からは original EDE モデルでは 2σ で

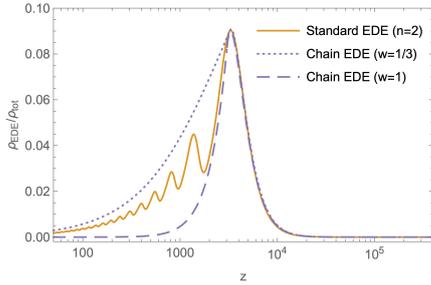


図 2: Original EDE 及び Chain EDE の f_{EDE} 。 $w \equiv w_{DR}$ 。 [1]

も SH_0ES 、BAO、CMB は重なっておらず、Hubble Tension の完全な解決はできていないことがわかる。

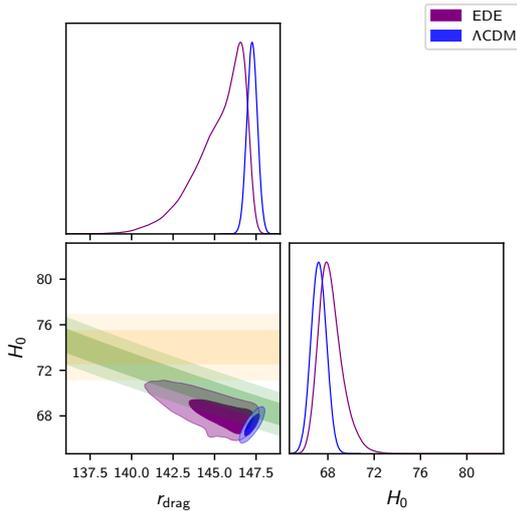


図 3: Original EDE の $r_s^{drag} - H_0$ plane。青は planck2015+LambdaCDM、紫が planck2018+Original EDE。EDE の計算結果は先行研究のもの [6]

4 Discussion

Original EDE モデルで完全な解決に至らなかった理由として考えられるのが CMB の high- l の「シルクダンピング」からの制限である。EDE は θ_s を fix することができるモデルであるが、シルクダンピングについては考慮していなかった。シルクダンピングは最

終散乱面での音響ホライズン r_s^* と photon diffusion のスケール (damping scale) $r_d^* = 1/k_d^*$ の比によって決まっている。そのため、この比を変えるようなモデルは high- l データと合わなくなってしまう。図 4 は音響ホライズンと photon diffusion スケールの $H(z)$ の変化への依存性を示している。そのため両方の変化が同じになるような f_{EDE} の形を作るモデルならばうまくいく可能性がある。

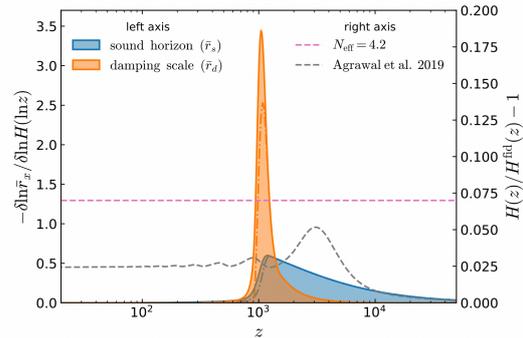


図 4: r_s と r_d の $H(z)$ の変化への依存性。 [1]

5 参考

CMB による制限について。

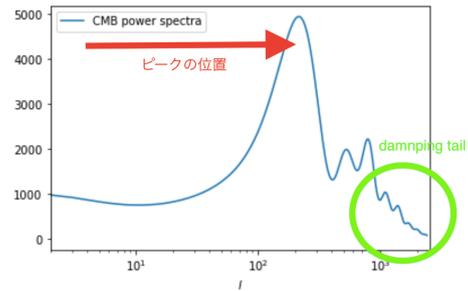


図 5: CMB からくる制限。赤矢印で示したピーク位置は θ_s^* で決まっており、緑の丸で囲われた部分 (damping tail) がシルクダンピングである。

Reference

1. L. Knox and M. Millea 2020, Phys. Rev. D 101, 043533
2. T. L. Smith, V. Poulin and M. A. Amin 2020, Phys. Rev. D 101, 063523
3. Katherine Freese and Martin Wolfgang Winkler 2021, arXiv:2102.13655 [astro-ph.CO]
4. A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri and D. Scolnic 2019, arXiv:1903.07603 [astro-ph.CO]
5. F. Niedermann and M. S. Sloth, Phys. Rev. D 102, 063527 (2020), 2006.06686
6. https://users.flatironinstitute.org/~chill/H20_data/

重字 34

後期宇宙での暗黒物質崩壊によるハッブルテンション の緩和

富山大学 理工学教育部物理学専攻
井上 直樹

後期宇宙での暗黒物質崩壊によるハッブルテンションの緩和

井上 直樹 (富山大学大学院 理工学教育部)

Abstract

宇宙の膨張率をあらわすハッブル定数 H_0 は、推定方法の違いで値が異なっており、この問題はハッブルテンションと呼ばれる。ハッブルテンションを解消するため、ダークエネルギーや暗黒物質のモデルの修正などが提案されている。本講演では論文 (K. Vattis et al. 2019) のレビューを行い、暗黒物質が質量ゼロの粒子と質量のある重い粒子へ崩壊する過程が、ハッブルパラメーターへどのように影響するかをみる。もし生成された重い粒子が温かい粒子であれば、ハッブルテンションを緩和することができる。また、DESI などの将来のサーベイ観測により、この暗黒物質崩壊のシナリオの検証ができる。

1 Introduction

宇宙論パラメータの一つであるハッブル定数 H_0 は現在の宇宙の膨張率をあらわす。しかし、この値は初期宇宙の観測からの推定値と局所宇宙の直接的な測定値の間で違いがあり、この問題をハッブルテンションと呼ぶ。前者では宇宙論の標準モデルである Λ CDM モデルを仮定し、宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) の観測から $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ と推定されている (N. Aghanim et al. 2021)。後者は Ia 型超新星などを使った距離はしごの観測から $H_0 = 74.03 \pm 1.42 \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ と測定されており、二つの値のズレは 4.4σ になる (A. G. Riess et al. 2019)。

二つの測定ではそれぞれ、宇宙初期の物理と恒星の物理が基礎となっている。値のズレを説明するために、どちらか一方または両方の修正が考えられる。特に宇宙論的立場からのハッブルテンション解消へのアプローチとしては、ダークエネルギーや暗黒物質のモデルを修正する提案がなされている。例として、ダークエネルギーが負の宇宙定数をもつモデル (K. Dutta et al. 2020) や暗黒物質とダークエネルギーの相互作用を考えたモデル (S. Kumar et al. 2019) があり、どちらも Λ CDM からの簡単な拡張でハッブルテンションを解消することが出来る。他にも初期宇宙 ($z \gtrsim 3000$) でのダークエネルギーの振る舞いに基づいたモデル (V. Poulin et al. 2019) や量子重力効果を考慮した真空相転移を扱ったモデル (A. Banihashemi et al. 2019) などもある。暗黒物質からのアプローチ

としては、暗黒物質が隠れた電荷を持つモデル (P. Ko et al. 2017) や、3つの粒子が散乱し2つの粒子が出てくるような散乱過程を考えるカンニバル暗黒物質と呼ばれるモデル (M. A. Buen-Abad et al. 2018) が存在する。隠れた電荷を持つ暗黒物質であれば直接探査による観測が可能である。宇宙初期の QCD 相転移時期に作られたアクシオンを用いてハッブルテンションを解消するモデル (F. D'Eramo et al. 2018) も存在する。

本講演では文献 (K. Vattis et al. 2019) のレビューを行い、暗黒物質の崩壊を含めた宇宙論モデルを考えることによるハッブルテンションの解消を紹介する。暗黒物質崩壊によるハッブルテンションの解消には暗黒物質からニュートリノへ崩壊するモデル (L. A. Anchordoqui et al. 2016) や、相対論的粒子に崩壊するモデル (K. L. Pandey et al. 2020) などが存在する。ここでは暗黒物質が質量ゼロの相対論的粒子と質量を持つ重い粒子への二体崩壊を考える。崩壊は宇宙の再結合時以降に起こると仮定する。パラメーターの数とそれぞれのパラメーターが相関していることを考慮して、マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC) を使用し、ハッブルテンションの解消を見る。

2 Methods

暗黒物質の二体崩壊を考える。この時生成される粒子として、質量ゼロの相対論的粒子と質量をもつ

重い粒子を考える。以下では親粒子を”0”、生成された相対論的粒子を”1”、質量を持つ粒子を”2”とラベル付けしておく。これらの粒子の4元運動量は、親粒子の静止エネルギー m_0 と親粒子から相対論的粒子へ移るエネルギーの割合 ϵ を使って、 $p_{\mu,0} = (m_0, 0)$ 、 $p_{\mu,1} = (\epsilon m_0, \mathbf{p}_1)$ 、 $p_{\mu,2} = ([1 - \epsilon] m_0, \mathbf{p}_2)$ で与えられる。また、親粒子と相対論的粒子の時間発展は、親粒子の崩壊率 $\Gamma (= 1/\tau)$ を使って

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_0}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_0 &= -\Gamma\rho_0 \\ \frac{d\rho_1}{dt} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_1 &= \epsilon\Gamma\rho_0 \end{aligned} \quad (1)$$

と書ける。ここで、宇宙の再結合時 $z_{rec} \approx 1090$ より前には崩壊が起こっていないと仮定し、暗黒物質密度の初期条件として再結合時の値を $\rho_0(a_{rec}) = \rho_{crit}\Omega_{DM}a_{rec}^{-3}$ とする。また、生成された重い粒子に対しては、エネルギー密度を以下のように書ける。

$$\rho_2(a) = \frac{\mathcal{C}}{a^3} \int_{a_{rec}}^a \frac{e^{-\Gamma t(a_D)}}{a_D H_D} \left[\frac{\beta_2^2}{1 - \beta_2^2} \left(\frac{a_D}{a} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} da_D \quad (2)$$

ここで $\beta_2 \equiv v_2/c = \epsilon/(1 - \epsilon)$ 、 $\mathcal{C} = \rho_{crit}\Omega_{DM}\Gamma \exp[\Gamma t(a_{rec})] \sqrt{1 - 2\epsilon}$ である。

今回の暗黒物質崩壊のシナリオを定性的に理解することができる。暗黒物質の密度パラメータ Ω_{DM} と寿命 τ を固定し相対論的粒子が持つエネルギーの割合 ϵ を増加させた場合、 $H(z=0)$ は減少する。これは物質密度が宇宙膨張に対し希釈されやすい放射密度へより多く移るためである。一方で ϵ を固定し τ を減少させると、暗黒物質が多く崩壊することによって、物質とダークエネルギーの等密度時が早まる。またこの時、上記と同様の理由で $H(z=0)$ は小さくなる。このように、 ϵ と τ がとる値によってハッブルパラメータが変化し、CMB と Ia 型超新星などの観測から得られている H_0 を説明できる。

実際の宇宙に対応する平坦な宇宙に対して、フリードマン方程式は以下のように書ける。

$$H^2(a) \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i(a) \quad (3)$$

ここで

$$\begin{aligned} \sum_i \rho_i(a) &= \rho_0(a) + \rho_1(a) + \rho_2(a) \\ &\quad + \rho_r(a) + \rho_\nu(a) + \rho_b(a) + \rho_\Lambda \quad (4) \end{aligned}$$

である。再結合時では宇宙は Λ CDM のように振る舞うと考えることができ、再結合時を初期条件とすることでこの方程式が解ける。ここで得られた $H(z)$ に対し初期宇宙と後期宇宙の観測が説明できるようなパラメータを探す。複数のパラメータ同士の相関を考慮して、マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC) を使用してサンプリングする。

今回 τ 、 ϵ 、 Ω_{DM} 、 $h = H_0/(100\text{km/sMpc}^{-1})$ の4つを自由パラメータとし、事前分布は次の範囲で平坦に分布すると仮定する。

$$\begin{aligned} -4 \leq \log_{10} \epsilon < \log_{10}(0.5) & \quad -3 \leq \log_{10} \tau \leq 4 \\ 0 \leq \Omega_{DM} \leq 1 & \quad 0.5 \leq h \leq 1 \end{aligned}$$

ここでサンプルされる Ω_{DM} と h は暗黒物質のエネルギー密度に初期条件を与える。光子とバリオンのエネルギー密度 ρ_r 、 ρ_b に関しては、Planck TT,TE,EE+lowE+lensing モデルから得られるものを使用する。また ρ_ν についてはニュートリノの質量を考慮して扱い (E. Komatsu et al. 2011)、ダークエネルギーのエネルギー密度 ρ_Λ については宇宙の平坦性から得られる。

3 Results

図1がMCMCを実行した結果である。それぞれ各パラメータ同士の相関関係を表しており、内側の線が68%、外側の線が96%の信頼区間である。また、一番上の分布はMCMCで得られた各パラメータの確率密度に対応する。 h と Ω_{DM} の関係を見ると、負の相関を持っていることがわかる。観測のように後期宇宙で宇宙膨張が早くなるためには、物質とダークエネルギーの等密度時が早い時期に移ればよい。つまり h の値が大きくなるには Ω_{DM} の値が小さくなる必要があり、負の相関を持つことがわかる。同じ効果が τ 、 h 、 Ω_{DM} との間の相関にも見られ、 τ の値が小さく、 ϵ の値が大きいような場合に

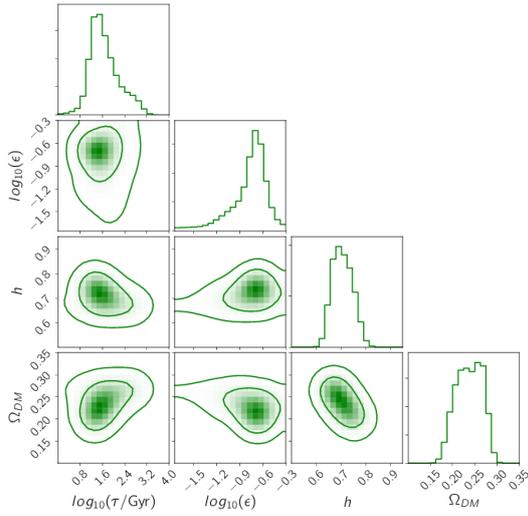


図 1: 暗黒物質崩壊のシナリオで実行した MCMC の結果 (K. Vattis et al. 2019)

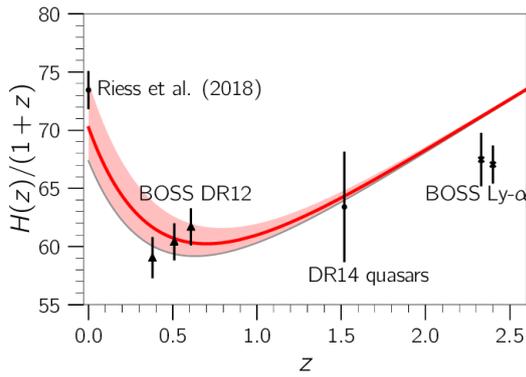


図 2: ハッブルパラメーターの発展。縦軸の単位は $\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ である。(K. Vattis et al. 2019)

は、 h と Ω_{DM} の取れる値の幅が大きく、観測量と一致させるために調整する必要がある。また、 τ が小さい場合には、大きな値の ϵ が要求される。これは物質成分から放射成分へ多くのエネルギーが遷移することが必要とされ、 Λ CDM からの離脱を早めることを意味する。ここで、 h と Ω_{DM} については、暗黒物質崩壊のシナリオから得られているわけではなく、初期条件を設定するために使われる。

図 2 はハッブルパラメーターの赤方偏移発展をあらわす。細いグレーの線が Λ CDM モデルで期待される発展で、赤い線が暗黒物質崩壊を含めたときの

発展である。また、濃い赤い線は中央値を表し、赤い影の部分が 68% の信頼区間である。宇宙初期では CMB の測定から推測される Λ CDM モデルの振る舞いに一致する。後期宇宙では暗黒物質の崩壊によって膨張速度が上がることで h の値が大きくなる。したがって、CMB を使った Λ CDM の予測より h の値が大きくなり、ハッブルテンションが緩和される。

図 1 の一番上の分布がそれぞれのパラメーターの確率分布をあらわしており、68% の信頼限界で $\log_{10} \epsilon = -0.78^{+0.14}_{-2.10}$ 、 $\log_{10}(\tau/[\text{Gyr}]) = 1.55^{+0.63}_{-0.25}$ と値が得られる。つまり、暗黒物質から相対論的粒子へ移ったエネルギーの割合 ϵ が比較的大きく、暗黒物質の寿命 τ が宇宙年齢よりも十分長い場合にハッブルテンションが緩和できる。今回得られた結果に対し、生成された重い粒子の状態方程式の発展を考えると、エネルギー密度が $\rho_2 \propto a^{-3.15}$ で発展する。それゆえ、この重い粒子は相対論的と非相対論的の中間の温かい粒子として振舞う。

暗黒物質の崩壊は構造形成にも影響を与える。宇宙の密度ゆらぎの成長をあらわす線形成長因子 $D(z)$ を計算することで、構造形成への影響を定量的に評価できる。 $D(z)$ は方程式

$$\frac{d^2 D}{da^2} + \left(\frac{d \ln H}{da} + \frac{3}{a} \right) \frac{dD}{da} - \frac{4\pi G \rho_m}{\dot{a}^2} = 0 \quad (5)$$

に従う。ここで $\rho_m = \rho_0 + \rho_2 + \rho_b$ であり、暗黒物質の崩壊が反映されることがわかる。この量は DESI などの将来のサーベイ観測によって測定され、今回の暗黒物質の崩壊シナリオを検証することが可能である。

4 Conclusion

本講演では文献 (K. Vattis et al. 2019) のレビューを行い、暗黒物質の崩壊を考えることでハッブルテンションを解消するシナリオを紹介した。このモデルでは暗黒物質が相対論的粒子と質量を持つ重い粒子への崩壊を考えており、暗黒物質から相対論的粒子へ移ったエネルギーの割合 ϵ が比較的大きく、暗黒物質の寿命 τ が長い場合にはハッブルテンションの解消が期待される。また、このシナリオは DESI などによる将来のサーベイ観測で検証可能である。

Acknowledgement

本講演に際して、議論、助言して下さった富山大学理論物理学研究室の皆様にご感謝いたします。

Reference

- K. Vattis, S. M. Koushiappas, and A. Loeb, *Phys.Rev.D* 99(2019)12, 121302
- Planck Collaboration, N. Aghanim et al., *Astron.Astrophys.* 641(2020)A6, *Astron.Astrophys.* 652(2021)C4(erratum)
- A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri, and D. Scolnic, *Astrophys. J.* 876(2019)1, 85
- K. Dutta, Ruchika, A. Roy, A. A. Sen, and M. M. Sheikh-Jabbari, *Gen.Rel.Grav.* 52(2020)2, 15
- S. Kumar, R. C. Nunes, and S. K. Yadav, *Eur.Phys.J.C* 79(2019)7, 576
- V. Poulin, T. L. Smith, T. Karwal, and M. Kamionkowski, *Phys.Rev.Lett.* 122(2019)22, 221301
- A. Banihashemi, N. Khosravi, and A. H. Shirazi, *Phys.Rev.D* 99(2019)8, 083509
- P. Ko, N. Nagata, and Y. Tang, *Phys.Lett.B* 773(2017)513-520
- M. A. Buen-Abad, R. Enami, and M. Schmaltz, *Phys.Rev.D* 98(2018)8, 083517
- F. D’Eramo, R. Z. Ferreira, A. Notari, and J. L. Bernal, *JCAP* 11(2018)014
- L. A. Anchordoqui, V. Barger, H. Goldberg, X. Huang, D. Marfatia, L. H. M. da Silva, and T. J. Weiler, *Phys.Rev.D* 92(2015), 061301, *Phys.Rev.D* 94(2016) 6,069901(erratum)
- K. L. Pandey, T. Karwal, and S. Das, *JCAP* 07(2020)026
- WMAP Collaboration, E. Komatsu et al., *Astrophys.J.Suppl.* 192(2011)19

重字 35

観測的効果を考慮したコズミックシアバイスペクトル
の測定手法

東京大学 理学系研究科物理学専攻
谷口 貴紀

未提出

重字 36

separate universe simulation を用いた長波長密度揺らぎ
への応答の測定

東京大学 理学系研究科物理学専攻
寺澤 凌

separate universe simulation を用いた長波長密度揺らぎへの応答の測定

寺澤 凌 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

後期宇宙の宇宙構造形成では、重力の非線形性により、異なる波長の密度揺らぎは互いに影響を与え合う(モードカップリング)。実際の観測領域や数値宇宙論シミュレーションの体積は有限だが、この有限体積を超える超長波長の密度揺らぎ (super-survey mode) は、有限体積内の密度揺らぎに影響を与える。この超長波長モードとのモードカップリングによる共分散を Super sample covariance (SSC) という。超長波長モードは直接測定できない量であるが、近年の研究の指摘により SSC の重要性が認識され、SSC の効果を考慮した物理解析が通例になっている。超長波長モードの共分散への寄与を測定する手法として、separate universe simulation(以下 SU シミュレーション) という数値的手法が開発された。この手法では超長波長モードの影響を背景宇宙の変化に取り入れることで、構造形成への影響を非線形領域まで正しく評価できる。SU シミュレーションを用いると、物理量の超長波長モードへの応答を測定することができる。SSC はパワースペクトルの応答で記述できる。Baldauf et al.(2016) では、SU シミュレーションを行って SSC だけでなくハローの数密度の応答である、一次のハローバイアスも測定した。発表者は、多数回の SU シミュレーションを行い、任意の宇宙論パラメータに対してパワースペクトルの応答を出力するエミュレータの開発を進めている。本発表では Baldauf et al.(2016) のレビューを行う。発表者がシミュレーションで得た結果も併せて紹介する。

1 Introduction

観測領域やシミュレーションボックスの大きさは有限だが、その大きさを超える長波長の密度揺らぎが有限体積の中の揺らぎにも影響を与える。この超長波長揺らぎとのモードカップリングによるパワースペクトルの誤差共分散を Super Sample covariance といい、S/N や宇宙論パラメータ推定の精度に影響を与えることが知られている。

この長波長の揺らぎの有限体積の中の揺らぎへの影響を調べるため、Separate universe simulation という手法が開発された。

この手法を用いて超長波長揺らぎへのパワースペクトルの応答を測ることで、SSC を計算できる。また、同様にハローの数など、任意の物理量の応答も測ることができる。Baldauf et al.(2016) ではこれを用いてハローバイアスを求めている。

以下では、Baldauf et al.(2016) のうち、Separate universe simulation の方法、パワースペクトルの応答とバイアスの結果について述べる。

2 Separate universe methods

サーベイ領域またはシミュレーションボックスより十分長波長の揺らぎは、観測領域からは定数として見えるため、背景宇宙の密度が定数分変化したとみなせる。

つまり、宇宙全体の平均密度を ρ_G とすると、等方的な超長波長揺らぎ δ_l が乗っている Local な領域の平均密度 ρ_L は、

$$\rho_L = \rho_G(1 + \delta_l) \quad (1)$$

と書ける。以下、Global な量を G, Local な量を L の添字で表す。また、 δ_l の 1 次の項までを考える。

物理的な質量は $\rho_L a_L^3 = \rho_G a_G^3$ と表せるため、この平均密度の変化は膨張速度の違いとして現れる：

$$a_L = a_G \left(1 - \frac{\delta_l}{3}\right) \quad (2)$$

つまり、平均密度が高い(低い)宇宙ほど、膨張が遅く(速く)なる。同様に、ハッブルパラメータや密

度パラメータも変更を受け、宇宙全体が平坦でも長波長揺らぎのある Local な宇宙は曲率を持つ。

$$H_L^{(G)}(a_G) = \frac{a_L}{a_G} = H_G^{(G)}(a_G) \left(1 - \frac{f\delta_l}{3}\right) \quad (3)$$

$$\Omega_{m,L} = \frac{8\pi G\rho_L}{3H_L^2} = \Omega_{m,0} \left[1 + \left(\Omega_{m,0} + \frac{2}{3}f_0\right)\delta_{l,0}\right] \quad (4)$$

$$\Omega_{K,L} = -\frac{K}{a^2H^2} = -\left(\Omega_{m,0} + \frac{2}{3}f_0\right)\delta_{l,0} \quad (5)$$

$$\Omega_{\Lambda,L} = \frac{\Lambda}{3H_L^2} = (1 - \Omega_{m,0}) \left[1 + \left(\Omega_{m,0} + \frac{2}{3}f_0\right)\delta_{l,0}\right] \quad (6)$$

ここで、 $\delta_{l,0}$ は現在の長波長揺らぎの大きさ、 $f = d\ln D/d\ln a$ 、 f_0 は Global な宇宙で $a_G = 1$ の時の f である。

以上の議論から、背景宇宙のパラメータを変化させることで長波長揺らぎの効果を取り込めることがわかる。

平均密度が宇宙全体よりも高い(低い)宇宙でそれぞれ N 体シミュレーションを行い、パワースペクトル等を測定すれば、その差分を取ることで長波長揺らぎへの観測量の応答を測ることができる。

2.1 Simulation

長波長揺らぎへの応答を数値的に調べるため、fiducial flat simulation($\delta_{l,f} = 0$), overdense simulation($\delta_{l,+} = 0.1$), underdense simulation($\delta_{l,-} = -0.1$) の3つのシミュレーションを行った。

同じ初期条件を用いることで、Cosmic Variance をキャンセルすることができる。

3 Overdensities and Power Spectrum

物質の密度揺らぎの線形成長は、Growth factor D で記述される。物質のみの Einstein-de Sitter(EdS)

表 1: シミュレーションで用いた宇宙論パラメータ。

	-	f	+
δ_l	-0.100	0.00	0.100
Ω_m	0.263	0.28	0.297
Ω_b	0.038	0.04	0.042
Ω_c	0.225	0.24	0.255
Ω_K	0.061	0.	-0.061
Ω_Λ	0.676	0.72	0.764
$a_L(a_G = 1)$	1.033	1.	0.967
h	0.721	0.7	0.679

時空で考えると、 $D_G(a_G) \propto a_G$ より、Growth factor の長波長揺らぎに対する変化は、

$$\left(\frac{\partial D}{\partial \delta_l}\right)_{a_G} = \frac{13}{21}a_G \quad (7)$$

よって、

$$\delta_L(\mathbf{x}) \propto D_L(a_G) = D_G(a_G)(1 + 13/21\delta_l) \quad (8)$$

となり、小スケールの揺らぎの成長が長波長揺らぎによって加速されることがわかる。Local な Growth factor は Λ CDM 宇宙で計算しても 1% 以下の違いしかない。

また、物理的な距離は $r = a_G x_G = a_L x_L$ と書けるから、Local な共動座標は Global な共動座標で

$$x_G(x_L) = x_L \left(1 - \frac{\delta_l}{3}\right) \quad (9)$$

と表せる。以上の議論から、Local な宇宙で測った密度揺らぎは

$$\delta_L(\mathbf{x}) = \left(1 + \frac{13}{21}\delta_l\right)\delta_B \left[\mathbf{x} \left(1 + \frac{\delta_l}{3}\right)\right] \quad (10)$$

と表せる。 δ_B は Global な宇宙で線形成長する密度揺らぎである。

これを Global な宇宙での観測量に書き直すと、

$$\begin{aligned} \delta_G(\mathbf{x}) &= (1 + \delta_l)\delta_L(\mathbf{x}) \\ &= \left(1 + \frac{13}{21}\delta_l\right)(1 + \delta_l)\delta_B \left[\mathbf{x} \left(1 + \frac{\delta_l}{3}\right)\right] \end{aligned} \quad (11)$$

comoving coordinate が式 9 のように変更を受け
るため、Local に観測される波数は

$$k_G(k_L) = k_L \left(1 + \frac{\delta_l}{3} \right) \quad (12)$$

となる。よって、長波長揺らぎが存在する領域の
パワースペクトルは Global な観測量として

$$P_G \left[k \left(1 + \frac{\delta_l}{3} \right) \right] = \left(1 + \frac{47}{21} \delta_l \right) P_B(k) \quad (13)$$

、または

$$P_G(k) = \left(1 + \frac{47}{21} \delta_l \right) P_B \left[k \left(1 - \frac{\delta_l}{3} \right) \right] \quad (14)$$

$$\sim \left(1 + \frac{47}{21} \delta_l - \frac{\delta_l}{3} \frac{d \ln P}{d \ln k} \right) P_B(k) \quad (15)$$

と書ける。パワースペクトルの応答には二つの寄
与がある。

$$\frac{d \ln P(k)}{d \delta_l} \sim \frac{47}{21} - \frac{1}{3} \frac{d \ln P}{d \ln k} \quad (16)$$

第 1 項は小スケールの揺らぎの成長が促進される
効果 (Growth effect)、第 2 項は膨張が遅くなること
により対応するスケールがシフトする効果 (Dilation
effect) である。

図 1 はパワースペクトルの応答をプロットしたも
のである。 $d \ln P_G [k (1 + \frac{\delta_l}{3})] / d \delta_l$ が非線形領域で
21/47 からずれるのは、overdense universe と un-
derdense universe で形成されるハローの数が変わっ
てくるためである。

4 Bias from the Separate Uni- verse Simulations

一般に、ハローの分布は、背景のダークマターの
密度や速度、重力場の長波長揺らぎで展開できる：

$$\delta_n(x) \sim \sum_i b_i^{(E)} \mathcal{O}^{(i)}(x) + \epsilon^{(i)} \quad (17)$$

ここで、 $\epsilon^{(i)}$ はダークマターと関係しない寄与で、
stochastic bias と呼ばれる。このバイアス展開の主
要な項は物質の密度揺らぎ δ に比例する項で、係数
は b_1 と書くことが多い。

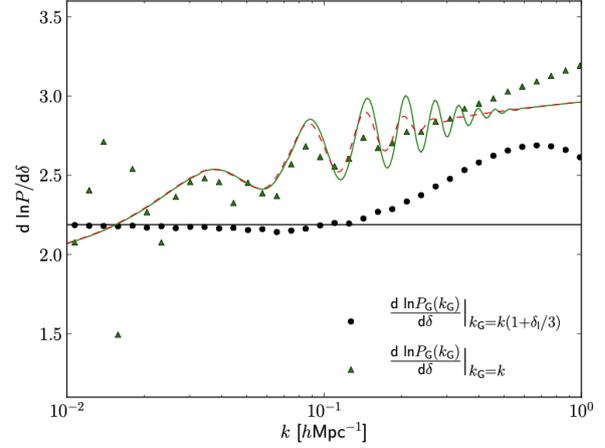


図 1: [1] より、Separate universe simulation で測つ
たパワースペクトルの応答。実線と点線は線形理論
の理論線。

b_1 は δ_l を用いて

$$b_1^{(E)} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \delta_l} \quad (18)$$

と書ける。この微分は 3 つのシミュレーションの結果
から数値微分で求めることができる。

$$b_{\delta, sim}^{(E)} = \frac{N_{\delta_+} / V_{\delta_+} - N_{\delta_-} / V_{\delta_-}}{N_{\delta_f} / V_{\delta_f} (\delta_+ - \delta_-)} \quad (19)$$

$$b_{\delta, sim}^{(L)} = \frac{N_{\delta_+} - N_{\delta_-}}{N_{\delta_f} (\delta_+ - \delta_-)} \quad (20)$$

ここで、 n はハローの密度、 N_δ はハローの個数、
 V_δ はシミュレーションの体積である。また、(E),(L)
はそれぞれ Eulerian space, Lagrangian space を表
している。

図 2、3 は separate universe simulation で求めた
 b_1 を理論曲線と比較したものである。ハロー質量が
小さいところを除いて、よく一致している。

5 Super Sample Covariance

パワースペクトルの誤差共分散は、パワースペク
トルの応答を用いて、

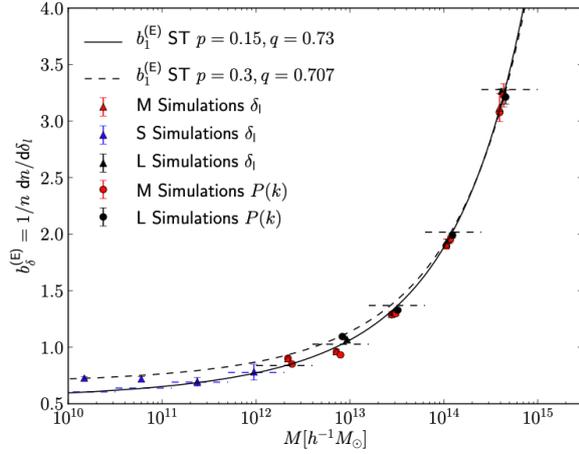


図 2: [1] より、1 次の Eulerian バイアスパラメータ。エラーバー付の三角の点が separate universe simulation で求めた値、丸の点がパワースペクトルから求めた値、実線と点線はある mass function を仮定した場合の理論線である。

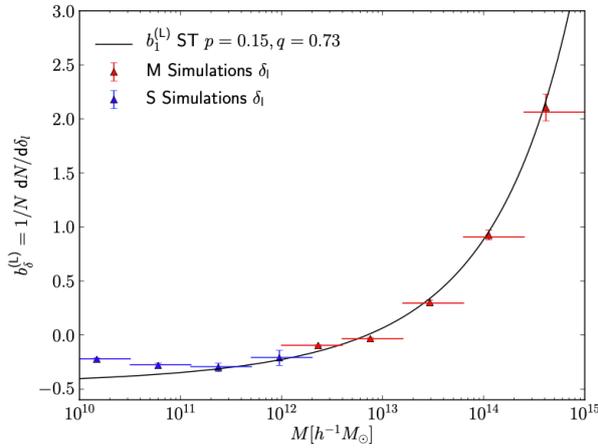


図 3: [1] より、1 次の Lagrangian バイアスパラメータ。エラーバー付の三角の点が separate universe simulation で求めた値、実線はある mass function を仮定した場合の理論線である。

$$Cov[P(k_i)P(k_j)] = P(k_i)P(k_j)V^{-1} \times \left[\frac{4\pi^2}{k_i^2 \Delta k} \delta_{ij}^{(K)} + \frac{d \ln P(k_i)}{d \delta_1} \frac{d \ln P(k_j)}{d \delta_1} \sigma_V^2 \right] \quad (21)$$

と書ける。

第一項は観測領域内のガウシアン揺らぎによる共分散、第 2 項が super sample covariance(SSC) である。

σ_V はシミュレーションの大きさや観測領域の形状から計算できる量である。

パワースペクトルの応答は宇宙論パラメータに依存するため、尤度計算の際は多数の宇宙論に対して SSC を計算する必要がある。

これを全て separate universe simulation で求めるのは計算時間の面で不可能であるため、発表者は任意の宇宙論パラメータの組に対して SSC を高速に出力できるエミュレータの開発を目指している。separate universe simulation を多数の宇宙論パラメータの組に対して行い、得られたパワースペクトルのデータから学習を行う。

6 Conclusion

Separate universe simulation は、超長波長揺らぎの影響を非線形領域まで正しく評価できる方法であることがわかる。また、Cosmic Variance を打ち消すようにシミュレーションをデザインすることができるため、よりロバストな結果が得られる。

Reference

Baldauf, T., Seljak, U., Senatore, L., & Zaldarriaga, M. 2016, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016, 007–007.

重字 37

大スケール非一様性を持つ宇宙での構造形成について

九州大学 理学府物理学専攻
山下 晃毅

大スケール非一様性を持つ宇宙での構造形成について

山下 晃毅 (九州大学大学院 理学府物理学専攻)

Abstract

標準宇宙モデルでは背景時空の空間的一様等方性 (宇宙原理) を仮定しており、宇宙初期の CMB パワースペクトル等の様々な観測を概ね再現している。しかし一方で、CMB パワースペクトルの半球非対称性 (Eriksen et al.) や、宇宙膨張率の方向依存性 (K. migkas et al.2020) 等、大スケールでの一様等方性の破れを指摘する報告もある。Aoki らによって提案された暗黒エネルギーの理論モデルは、超曲率スケールのダイナミカルなスカラー場に基づいた暗黒エネルギーモデルである (Aoki et al. 2018, Nan, et al. 2019)。この研究を動機として、暗黒エネルギーが超ホライズン大スケールの非一様等方性を持つ宇宙モデルの研究が行われている (Nan Yamamoto 2021)。このモデルでは、現在のホライズンスケールより十分大きなスケールで暗黒エネルギー密度が $O(1)$ の非一様性を持つランダムスカラー場のポテンシャルエネルギーが、加速膨張を説明している。また、このモデルは一般に大スケールでの非一様性を持ち宇宙原理を破るモデルであるが、スカラー場の非一様性のスケールが現在のホライズンスケールより十分大きいので、観測からの制限を回避できる可能性がある。本発表では、この理論モデルにおける、暗黒エネルギーと物質密度の非一様性の進化を摂動論により調べた結果について述べる。次に、暗黒エネルギーの非一様性が、大規模構造の形成に与える影響について解析を行った結果を報告する。

1 Introduction

現在、Ia 型超新星や宇宙マイクロ波 (CMB) の観測によって、私達は加速膨張する宇宙に住んでいることが確認されている。この宇宙の膨張率は遷移赤方偏移と呼ばれるある特定の赤方偏移で減速膨張から加速膨張へ変化していることが分かっているが、この相転移の実際の原因は未だ不明なままである。一般相対性理論 (GR) では現在の宇宙の加速膨張は、一般にダークエネルギーと呼ばれる何らかのエキゾチックなエネルギーによって駆動されていることが分かっている。このダークエネルギーは 1990 年代後半から、冷暗黒物質 (CDM) に加えて宇宙論の重要なテーマとなっている。

加速膨張を説明する最も単純で最も一般的なモデルであるダークエネルギーとしての宇宙定数モデルは、広範な観測の結果と矛盾しておらず、現在でも有力なものと考えられている。しかし、標準的な宇宙論的モデルは大規模なスケールでの等方性と均質性を前提 (宇宙原理) としている一方で、この一様等方な宇宙モデルから逸脱している可能性を示唆する研究が存在するので、いくつか例を上げて紹介する。

(i) CMB power spectrum の半球非対称性。 ([Eriksen et al. 2004]) CMB power spectrum を南天と北天で得られたデータを別々に解析した。その結果、2 つの間にパワー非対称性が存在することを示唆する結果が得られた。これにより、南天と北天という大きなスケールでのパワー半球非対称性の存在が議論されている。

(ii) ハッブルパラメーター H_0 の方向依存性 [K.Migkas et al. 2020]. 銀河団の X 線輝度 - 温度関係を用いて、宇宙の膨張率を示すハッブル定数を全天で調査した結果、膨張率に方向依存性があることを示唆された。

そこで、今回のモチベーションは、もしこのような大スケール非一様性を持つ宇宙モデルを考えた時、そのモデルは観測と矛盾しないのか、そのモデルが示す理論予言は何なのか解明することにある。中でも特に銀河の大規模構造に非一様がどのような影響を与えるのかという点に着目した。

近年、加速する宇宙の様々な側面を研究するために、多数の異方性を持つ宇宙論モデルが構築されている。今回はそのような異方性を持つ宇宙論モデルの中でも、Supercurvature mode dark energy model と

いう特定のインフレーションシナリオに関連した開いた宇宙を仮定した確率的な大規模非一様性を持つダークエネルギーの模型 [H. Aoki et al. (2018)] を単純化したもの考える。この模型には、現在のホライズンスケールより十分大きなスケール (supercurvature scale) で $\mathcal{O}(1)$ の揺らぎを持つスカラー場のポテンシャルエネルギーが加速膨張を説明する模型であり、大スケールでの非一様性を持つため宇宙原理を破る模型である。今回は簡単のため、この模型での空間曲率 K を $K = 0$ とした模型の superhorizon mode dark energy model を考える。以降はまずこの模型の紹介のために先行研究 [Nan&Yamamoto et al. 2021] のレビューを行い、大規模構造への摂動項が従う方程式と摂動項の解、power spectrum の解を求めた後、 σ_8 の数値解と観測を比較する。

2 Basis of the formulation

Superhorizon dark energy (SH-DE) を考慮した際、物質密度揺らぎの進化の定式化とその解がどのように変化するかを計算する。以降は、LSS (large scale structure) matter power spectrum のような観測可能である、宇宙後期での大規模構造に主に着目する。

この章では、非一様模型を記述する方程式系を紹介する。また、一様等方な宇宙の大規模構造形成は宇宙論的摂動論により良く知られている。そのため、これを用いて非一様な宇宙模型での宇宙論的摂動論の定式化を行う。

2.1 Basic equations

宇宙論的摂動論は以下の式によって記述される。

$$G_{\nu}^{\mu} = 8\pi G(T_{\nu}^{\mu (m)} + T_{\nu}^{\mu (\phi)}) \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\phi) - m^2\phi = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + 3\rho(H + \dot{\Phi}) + \frac{1}{a}\partial_i(\rho v^i) = 0 \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 4(H + \dot{\Phi})\right)\rho v^i + \frac{1}{a}\partial_j(\rho v^i v^j) + \frac{\rho}{a}\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} = 0 \quad (4)$$

今回は物質がダークマターのみであるとして、流体近似を用いた。

ここで $T_{\nu}^{\mu (m)}$ は物質のエネルギー運動量テンソルであり、 $T_{\nu}^{\mu (\phi)}$ はスカラー場のエネルギー運動量テンソルである。

一様等方な宇宙の一般化として、 ϕ の揺らぎによる非一様性は上記の基本方程式系によって記述される。

2.2 Superhorizon mode

具体的な計算の前に Superhorizon mode (SH-mode) の摂動について紹介する。

2.2.1 Properties of SH-mode

SH-mode による摂動項に関する量として、スカラー場 ϕ 、重力ポテンシャル Ψ 、曲率ポテンシャル Φ 、密度揺らぎ δ 、速度場 v^i がある。これらの摂動項にはそれぞれ

$${}^{\text{SH}}\phi_{\text{H}} = \epsilon {}^{\text{SH}}\phi(t, \mathbf{x}), \quad (5)$$

$${}^{\text{SH}}\Psi_{\text{H}} = \epsilon {}^{\text{SH}}\Psi(t, \mathbf{x}), \quad (6)$$

$${}^{\text{SH}}\Phi_{\text{H}} = \epsilon {}^{\text{SH}}\Phi(t, \mathbf{x}), \quad (7)$$

$${}^{\text{SH}}\delta_{\text{H}} = \epsilon {}^{\text{SH}}\delta(t, \mathbf{x}), \quad (8)$$

$${}^{\text{SH}}v_{\text{H}}^i = \epsilon {}^{\text{SH}}v^i(t, \mathbf{x}). \quad (9)$$

と書ける。ここで添え字 “H” は観測可能宇宙のホライズン内での影響を表している。SH-mode は非常に大スケールな揺らぎなので、ホライズンスケールではその振幅は微小量となる。今回はその微小量を ϵ で表し、 $\mathcal{O}(\epsilon)$ の 2 次以上の項を無視して考える。

次に SH-mode はべき展開して以下のように書き直すことができる。

$${}^{\text{SH}}\phi(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=1}^3 \phi_1^{(n)}(t) T_i^{(n)} x^i + \sum_{n=1}^5 \phi_2^{(n)}(t) T_{ij}^{(n)} x^j x^i \quad (10)$$

右辺 1 項目は dipole を表し、2 項目は quadrupole を表している。ここで出てきた $T_i^{(n)}$ とは、具体的に

$$T_i^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ と書けるような } x \text{ 成分の dipole}$$

を表すものである。同様にして他の量もべき展開すると

$$\begin{aligned}\text{SH}v^i &= \sum_{n=1}^3 V_1^{(n)}(t)T_i^{(n)} + \sum_{n=1}^5 V_2^{(n)}(t)T_{ij}^{(n)}x^j \\ \text{SH}\delta &= \sum_{n=1}^3 \delta_1^{(n)}(t)T_i^{(n)}x^i + \sum_{n=1}^5 \delta_2^{(n)}(t)T_{ij}^{(n)}x^jx^i \\ \text{SH}\Phi &= \sum_{n=1}^3 \Phi_1^{(n)}(t)T_i^{(n)}x^i + \sum_{n=1}^5 \Phi_2^{(n)}(t)T_{ij}^{(n)}x^ix^j\end{aligned}$$

と書ける。

最後に、初期時刻 $t = 0$ で $\text{SH}\Phi(0, \mathbf{x}) = \text{SH}\Psi(0, \mathbf{x}) = 0$ である (isocurvature)。

2.3 SH-DE model が従う式

次は、今回の模型が従う式について紹介していく。スカラー場の運動方程式 (Klein-Gordon 方程式)、Einstein 方程式、膨張宇宙での流体の保存則より、まず background は

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_0(t) + 3H(t)\dot{\phi}_0(t) + m^2\phi_0(t) &= 0 \\ 3H^2 &= 8\pi G\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2 + \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \rho_0\right) \\ \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2\right) &= 8\pi G\left(\frac{1}{2}m^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}_0^2\right) \\ \dot{\rho}_0 + 3H\rho_0 &= 0\end{aligned}$$

に従う。ここで ρ_0 : 密度の background、 m : スカラー場の質量

SH-mode のべき展開係数も同様に ($l = 1, 2$)

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_l + 3H\dot{\phi}_l + m^2\phi_l + (4\dot{\Phi}_l - 6H\Psi_l)\dot{\phi}_0 - 2\Psi_l\ddot{\phi}_0 &= 0 \\ \dot{\Phi}_l - H\Psi_l &= \frac{4\pi G}{3H}(\rho_0 M_l + m^2\phi_0\phi_l - \dot{\phi}_0^2\Psi_l + \dot{\phi}_0\dot{\phi}_l) \\ \dot{\Phi}_l - H\Psi_l &= -4\pi G(\rho_0 V_l' + \dot{\phi}_0\dot{\phi}_l) \\ \Psi_l + \Phi_l &= 0 \\ \delta_l + 3\Phi_l &= 0 \\ \dot{V}_l - \Psi_l &= 0 \\ V_l' &\equiv -aV_l\end{aligned}$$

に従う。これらの解は数値計算を用いて既に知られている。

3 非一様な宇宙での notation

次は、非一様な宇宙での大規模構造を説明するために必要な notation を説明する。前述の SH-mode を考慮して、密度揺らぎ δ 、速度場 v^i 、曲率ポテンシャル Φ 、重力ポテンシャル Ψ 、スカラー場 ϕ は

$$\begin{aligned}\delta &= \text{LSS}\delta + \epsilon \text{SH}\delta \\ v^i &= \text{LSS}v^i + \epsilon \text{SH}v^i \\ \Phi &= \text{LSS}\Phi + \epsilon \text{SH}\Phi \\ \Psi &= \text{LSS}\Psi + \epsilon \text{SH}\Psi \\ \phi &= \phi_0 + \epsilon \text{SH}\phi\end{aligned}$$

と表す。ここで $\text{LSS}\delta$ は、LSS-mode (large scale structure mode) の密度揺らぎを表しており、大規模構造への摂動を表す密度揺らぎである。そのため、短波長モードであるという特徴を持つ。さらに LSS-mode を

$$\text{LSS}\delta = \text{AD}\delta + \epsilon \text{ISO}\delta$$

というように、SH-mode がない場合の密度揺らぎ $\text{AD}\delta$ と SH-mode による LSS-mode の変化 $\text{ISO}\delta$ に分けて書くことができる。 $\text{AD}\delta$ は一様等方宇宙での断熱密度揺らぎに対応しているため、よく調べられている。 $\text{ISO}\delta$ は SH-mode に由来するため、振幅は微小量であると考えられる ($\mathcal{O}(\epsilon)$)。また、LSS-mode のため波長は小スケールである。

4 Specific calculation

ここからは以下の流れで具体的に非一様な宇宙での密度揺らぎの進化を求めて行く。(i) notation を Eq. (3) と (4) に代入。(ii) 摂動展開の 1 次までのフーリエ展開。(iii) 連立方程式を解き、非一様宇宙での物質密度揺らぎと power spectrum の解を得る。

5 Construct

計算の結果、物質密度揺らぎ解は

$$\begin{aligned} \text{ISO } \delta_1(t, \mathbf{p}) &\simeq \frac{2}{5} \sum_{n=1}^3 T_i^{(n)} D_1(a') \frac{(ip^i)}{H_0 \sqrt{\Omega'_m}} \delta_L(\mathbf{p}) \\ &\times \left(Q_1^{(n)}(a) - Q_2^{(n)}(a) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

となった。ここで

$$\begin{aligned} Q_1^{(n)}(a) &\equiv \frac{D_2(a)}{D_1(a)} \int_0^a da' D_1(a') \left\{ V_1^{(n)}(a') [D_1(a') \right. \\ &\quad \left. - 2^{\text{AD}} \theta_1(a')] + D_1(a') a' \frac{dV_1^{(n)}(a')}{da'} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Q_2^{(n)}(a) &\equiv \int_0^a da' D_2(a') \left\{ V_1^{(n)}(a') [D_1(a') \right. \\ &\quad \left. - 2^{\text{AD}} \theta_1(a')] + D_1(a') a' \frac{dV_1^{(n)}(a')}{da'} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

D_1, D_2 は成長モードと減衰モード、 Ω'_m は密度パラメータ、 p^i, k_1^i は波数、 δ_L は初期密度揺らぎ依存の定数である。

同様に power spectrum $P(a, \mathbf{k})$ は

$$\begin{aligned} P(a, \mathbf{k}) &= \langle \text{LSS } \delta(a, \mathbf{k}_1) \text{LSS } \delta(a, \mathbf{k}_2) \rangle \\ &= P_0(a, k) \left(1 + \epsilon^2 \sum_{n'=1}^3 \sum_{n=1}^3 T_j^{(n')} T_i^{(n)} \frac{(k_1^i k_1^j)}{H_0^2} Q^{(n)}(a) \right) \end{aligned} \quad (14)$$

である。ここで

$$Q^{(n)}(a) \equiv \frac{4}{25} \frac{1}{\Omega'_m} \left(Q_1^{(n)}(a) - Q_2^{(n)}(a) \right)^2 \quad (15)$$

$P_0(a, k) = D_1^2(a) P_m(k)$ は一様等方な宇宙での power spectrum である。

6 Conclusion

今回は宇宙論原理を破るような非一様を持つ SH-DE model による大規模構造への影響について理論モデルを構築し、影響の大きさを数値的に計算した。その結果を図 1 となった。この結果から、 $a=1$ では

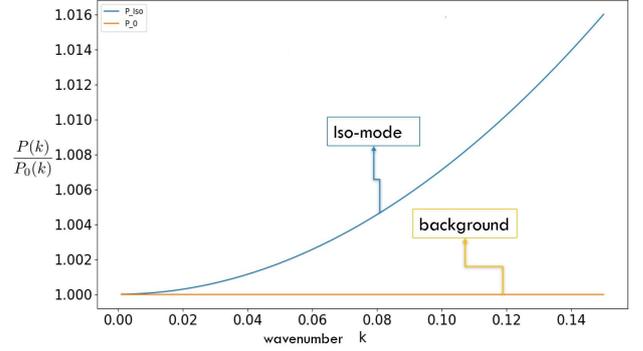


図 1: 現在 ($a = 1$) での SH-mode による $P(a, \mathbf{k})$ への影響

$k \sim 0.1$ では 0.6% 程度の影響を大規模構造へ与える事が分かった。

更に、構造形成の特徴的な宇宙論パラメータである σ_8 を計算すると、一様等方な宇宙に比べて 0.9% 程度の修正がかかる事が分かった。

計算の結果、SH-mode による影響を考慮すると $\sigma_8 = 0.809$ となった。観測結果では、WMAP では $\sigma_8 = 0.821 \pm 0.023$ 、SDSS では $\sigma_8 = 0.785 \pm 0.044$ という結果が得られているため、現在の観測と今回の計算は矛盾しているわけではないという事が分かった。

Reference

- [1] H. K. Eriksen, A. J. Banday, K. M. Gorski, F. K. Hansen, P. B. Lilje, *Astrophys. J.* 660, L81 (2007)
- [2] K. Migkas, G. Schellenberger, T. H. Reiprich, F. Pacaud, M. E. Ramos-Ceja, L. Lovisari, arXiv:2004.03305
- [3] H. Aoki, S. ISO, D.-S. Lee, Y. Sekino, and C.-P. Yeh, *Phys. Rev. D* 97, 043517 (2018).
- [4] Y. Nan, K. Yamamoto, H. Aoki, S. ISO, and D. Yamauchi, *Phys. Rev. D* 99, 103512 (2019).
- [5] Y.Nan, K. Yamamoto submitted to PRD (2021)
- [6] K.Yamashita, et al.in preparation

重字 38

Dispersion Measure による宇宙論的距離の推定

名古屋大学 素粒子宇宙物理学専攻
中沢 准昭

dispersion measure による宇宙論的距離の推定

中沢 准昭 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

宇宙論全般の議論において距離の指標について議論することは重要である。本講演では、宇宙論で用いる距離指標の一つとして dispersion measure (DM) を取り上げる。天体から放射された電波が自由電子と相互作用することによって、電波の周波数に依存した観測時間の遅延が生じることが知られている。DM はこの観測に比例する量として定義され、したがってこれは観測者と天体との間にある自由電子の存在量に比例する。これまで観測の分野において DM は距離の観測と併せることで、視線方向の電子の平均密度を推定するために用いられてきた。一方で宇宙論において DM は自由電子密度がよくモデルされる状況で電波の放射源までの距離を推定する手法として使用できる。しかし大きい赤方偏移において、DM を用いた距離の推定が有効ではなくなる。これは再電離時期よりも過去の領域には中性気体しか存在せず DM が再電離完了以前の高赤方偏移では変化しなくなること起因している。一方で、この性質から再電離時期の推定に利用できる。本講演では、DM を使った赤方偏移の推定方法とその有効性を Zhang et al (2020) を中心に議論する。また、高赤方偏移での DM の振る舞いに着目して、再電離時期の推定についても議論する予定である。DM に関してハローや天の川銀河からの寄与など様々考えられるが、今回は IGM からの寄与のみを考えていく。

1 Introduction

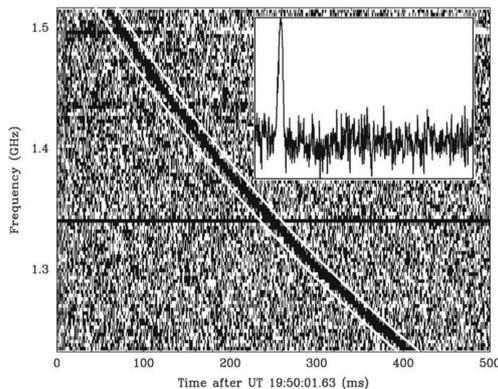


図 1: 実際の観測における遅延時間の周波数依存性 (Lorimer et al (2007)): データは 2001 年 8 月 24 日のもの。横軸は観測時間 [ms]、縦軸は周波数 [GHz] となっている。図中に書かれている白線はパルスが観測され始めた時刻と終了した時刻を表しており、それぞれが周波数に依存している事がわかる。

宇宙論では銀河分布や年代を特定する上で距離指標の議論が重要である。距離指標には見た目の大き

さから決定する角度距離、明るさから決定する輝度距離など様々な指標が用いられてきた。本発表では天体と観測者間にある電子の量を利用した dispersion measure (DM) を議論する。DM は周波数に依存した観測時間の遅れ (遅延時間) を観測することで測る事ができる量で、Lorimer et al (2007) でミリ秒ほどの時間で電磁波が放出される現象である fast radio burst (FRB) の観測 (図 1 参照) が報告されて以来注目されるようになってきた。DM は観測者と天体の間にどれくらい自由電子が存在するかを表す量で、密度分布が分かれば DM によって距離を測る事ができる。DM の観測に際し、天の川銀河中や銀河間、母銀河中などでは電子密度が異なるため、DM は以下のように分割される。

$$DM(z) = DM_{IGM} + DM_{MW} + DM_{halo} + \frac{DM_{host} + DM_{source}}{1+z} \quad (1)$$

DM_{IGM} は銀河間物質からの寄与、 DM_{MW} は天の川銀河中の星間物質による寄与、 DM_{halo} は天の川銀河のハローによる寄与、 DM_{host} は観測する天体の母銀河のハローによる寄与、 DM_{source} は天体の母銀河中

の星間物質からの寄与である。今回は DM_{IGM} のみを議論していくことにする。

2 章では遅延時間との DM の関係について説明し、3 章では膨張宇宙における遅延時間と DM の取扱いについて説明する。4 章では DM_{IGM} による赤方偏移の推定について数値計算と観測の両方から議論する。DM による赤方偏移の推定にあたって、自由電子密度の赤方偏移依存性の議論も重要となる。電子密度に大きく影響を与えた出来事として、宇宙誕生初期にあったビッグバンによる元素合成 (4 分くらい)、電子が陽子に捉えられ中性水素が形成されて宇宙が中性になる再結合 ($z \sim 1300$)、初代天体の形成 ($z \sim 30$)、そして天体が発する紫外線によって中性水素が光電離する再電離 ($6 \lesssim z \lesssim 10 - 20$) がある。初代天体形成以降では再電離時期があるため、再電離よりも前の時期の天体の DM はほぼ一定になり、赤方偏移の推定を行う事ができない。しかし、逆に高赤方偏移の天体の DM を測ることによって再電離時期の制限に利用する事ができる。そこで、5 章では DM_{IGM} を用いた再電離時期の制限について説明する。

2 遅延時間と DM の関係

この章では遅延時間と DM の関係について宇宙論的な影響が小さい $z \ll 1$ のときを考える。

プラズマで構成されている IGM 中に電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$ をもつ電磁波が通過することを考える。プラズマは電子と陽子で構成されるが陽子は電子に比べて約 1800 倍もの質量があるので基本的に電子が運動している状態である。ここで電磁波の干渉を受けている電子 (質量 m_e) の運動方程式は

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E}_0 \cos \omega t \quad (2)$$

となり、積分を行って電流密度 \mathbf{i} を求めると

$$\mathbf{i} = n_e e \mathbf{v} = \frac{n_e e^2 \mathbf{E}_0}{m_e} \frac{\sin \omega t}{\omega} \quad (3)$$

となる。一方で変位電流は

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\epsilon_0 \mathbf{E}_0 \omega \sin \omega t \quad (4)$$

であるので、Ampere-Maxwell 方程式より

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \omega \mathbf{E}_0 \sin \omega t \quad (5)$$

を得ることができる。ここで $\omega_p = \sqrt{n_e e^2 / m_e \epsilon_0}$ はプラズマ振動数と呼ばれるものである。(5) より IGM 中の比誘電率 ϵ^* は $\epsilon^* = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$ と見ることができ。ここで比透磁率 μ^* を $\mu^* \simeq 1$ とすると屈折率 n は $n = \sqrt{\epsilon^* \mu^*} \simeq \sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2}$ となるので、IGM 中を電磁波が伝搬する速度 v_g は

$$v_g = cn = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \sim c \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right) \quad (6)$$

となる。最後の近似では多くの観測においてプラズマ振動数が極端に小さくなることを用いた。これによって電磁波が IGM 中を通過することによって生じる遅延時間 Δt を求めることができる。

$$\begin{aligned} \Delta t(r) &= \int_0^r \frac{dl}{v_g} - \frac{r}{c} \\ &\simeq \frac{1}{c} \int_0^r \left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right) dl - \frac{r}{c} \\ &= \frac{e^2}{2m_e c \epsilon_0 \omega^2} \int_0^r n_e dl \end{aligned} \quad (7)$$

遅延時間はプラズマ中を電磁波が伝搬したときに、真空中を伝搬した場合に比べて観測者によって観測される時間にどれほどの差があるのかを示している。最後の等式にある積分は後に説明する dispersion measure (DM) と呼ばれるものである。これを DM と表す事にすると

$$\Delta t(r) = \frac{e^2}{2m_e c \epsilon_0 \omega^2} DM(z) \propto \frac{DM(z)}{\omega^2} \quad (8)$$

と表される。遅延時間は DM に比例し振動数 (周波数) の 2 乗に反比例することが分かる。遅延時間の周波数依存性は変位電流に起因するものであり、遅延時間は電磁波が視線方向の電子とどれくらい散乱したかを示す端的な指標となることが分かる。

3 膨張宇宙における遅延時間

説明に入る前に、宇宙論での議論でよく用いられる赤方偏移と距離の関係について説明しておく。

赤方偏移 z は観測者から物理的距離 l だけ離れた位置で発せられた電磁波の波長 $\lambda(l)$ と観測者がその電磁波を観測した時に測定する波長 λ_{obs} によって

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda(l)} = \frac{\omega(l)}{\omega_{\text{obs}}} \quad (9)$$

の関係で定義される。具体的な関係は光速を c 、Hubble パラメータを $H(z)$ として以下の式で表される。

$$dl(z) = \frac{c dz}{H(z)(1+z)} \quad (10)$$

ここまでの議論において物理的線素と周波数（振動数）が赤方偏移に依存するという点は遅延時間の議論に少々の変更を加えることになる。以下では赤方偏移 z の天体から発せられた電磁波が観測者によって観測されるとき遅延時間 $\Delta t(z)$ は

$$\begin{aligned} \Delta t(z) &= \frac{e^2}{2m_e c \epsilon_0} \int_0^{r(z)} \frac{n_e(z')}{\omega(z')^2} dl_{\text{obs}} \\ &= \frac{e^2}{2m_e c \epsilon_0} \int_0^{r(z)} \frac{n_e}{\omega_{\text{obs}}^2 (1+z')^2} dl(z') \quad (11) \end{aligned}$$

となる。ここで dl_{obs} は観測者にとっての物理的線素であり、(9) の関係により

$$dl_{\text{obs}} = (1+z)dl(z) \quad (12)$$

となることを用いている。また、振動数が赤方偏移 z に依存するために積分の中に組み込まれることに注意する。したがって膨張宇宙における遅延時間の観測において実効的な DM は

$$DM(z) = \int_0^{r(z)} \frac{n_e(z')}{1+z'} dl(z') = \int_0^z \frac{n_e(z') c dz'}{H(z)(1+z')^2} \quad (13)$$

であることが分かる。これにより膨張を考慮した遅延時間は

$$\Delta t(z) = \frac{e^2}{2m_e c \epsilon_0 \omega_{\text{obs}}^2} DM \propto \frac{DM}{\omega_{\text{obs}}^2} \quad (14)$$

のように表すことができる。

4 DM による赤方偏移の推定

この章では DM の数値計算によって IGM の寄与分の DM による赤方偏移の推定がどれほど有効なの

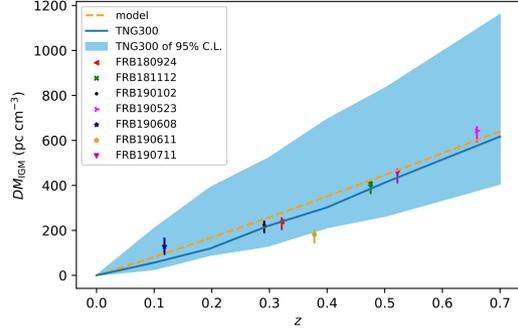


図 2: IllustrisTNG によるシミュレーションと FRB の観測の $DM_{\text{IGM}}-z$ 関係：青線は Illustris シミュレーションの結果で水色の領域はシミュレーションの 95% 信頼区間である。点とエラーバーは観測の結果である。(Zhang et al (2020))

かを見ていく。

IGM の寄与の DM は (13) より

$$DM_{\text{IGM}}(z) = \int_0^z \frac{n_e(z') c dz'}{H(z)(1+z')^2} \quad (15)$$

となる。ここで $n_e(z)$ は IGM の電子密度であり、Hubble パラメータは

$$H(z) = H_0 \sqrt{(1+z')^3 \Omega_m + (1+z')^2 \Omega_K + \Omega_\Lambda} \quad (16)$$

である。ここで $\Omega_m, \Omega_K, \Omega_\Lambda$ はそれぞれ物質、曲率、宇宙項の現在の密度パラメータであり、それぞれ $\Omega_m = 0.3089, \Omega_K = 0.0, \Omega_\Lambda = 0.6911$ としている。Hubble 定数は $H_0 = 67.74 [\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}]$ とした。(Planck Collaboration et al. (2016))

自由電子密度の計算は宇宙論流体シミュレーション IllustrisTNG を用いて行われ、各赤方偏移においてそれぞれ柱密度の平均値を求めてそれをその赤方偏移での自由電子密度として計算している。

IGM 中の自由電子の密度がある程度わかっているならば、 DM_{IGM} と赤方偏移を一意に関連づける事ができる。図 2 は $z < 1$ の領域での観測とシミュレーションによる結果の比較である。この図では観測とシミュレーションが一貫しており、DM による赤方偏移 z の推定ができていることが分かる。しかし赤

方偏移 z が大きくなると、再電離時期 z_{re} を境にして $n_e \simeq 0$ となって DM が赤方偏移の増加に伴って大きくなることはなくなる。したがって再電離時期によって DM のものさしとしての有効性がどの範囲まで有効なのかを見る必要がある。

5 DM による再電離時期の制限

この章ではシミュレーションによって DM による再電離時期の制限に対する有効性を議論する。

バリオンに対する水素の質量存在比 X_{H} 、水素原子 1 個あたりの自由電子の数 $x_e(z)$ を用いると自由電子密度は

$$n_e(z) = \rho_{\text{cr}} \Omega_b X_{\text{H}} (1+z)^3 m_{\text{p}}^{-1} x_e(z) \quad (17)$$

と表される。 $\rho_{\text{cr}}, \Omega_b$ はそれぞれ現在における臨界密度、バリオンの密度パラメータであり、 m_{p} は陽子の質量である。ここで再電離の z 依存性について、Lewis (2008) で用いられている tanh モデル

$$x_e(z) = \frac{f}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{y_{\text{re}} - y}{\Delta y} \right) \right] \quad (18)$$

を適用する。ここで $y = (1+z)^{3/2}$, $y_{\text{re}} = (1+z_{\text{re}})^{3/2}$, $\Delta y = 1.5\sqrt{1+z}\Delta z$ であり、 z_{re} は再電離が起こった時の赤方偏移であり、 Δz は再電離時期の幅である。また、 f は水素とヘリウムの個数比であり、 $f = 1 + f_{\text{He}} = 1 + n_{\text{He}}/n_{\text{H}}$ である。この図では再電離時期があることによって DM が $4000[\text{pc}/\text{cm}^3]$ より大きい値をとる場合には赤方偏移の測定に用いることができないことを示している。逆に遠方の天体の DM を観測することによって再電離時期の制限を行うことが期待できる。今後より遠方の天体の DM の観測が多くなれば、再電離時期を観測的により精密に制限することができると期待できる。

6 Conclusion

本研究では IllustrisTNG シミュレーションによって得られた IGM からの寄与分の DM による赤方偏移 z の推定が、赤方偏移が特定されている FRB の観測結果と一貫していることを示し、 $DM_{\text{IGM}} <$

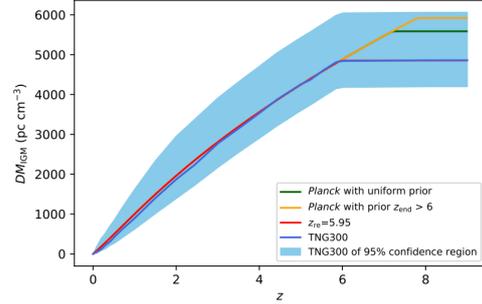


図 3: IllustrisTNG によるシミュレーションの DM_{IGM} の赤方偏移依存性と Planck からのデータの比較 (Zhang et al (2020)): 青線はシミュレーションの結果で水色の領域は 95% 信頼区間となっている。赤線は tanh モデルの $z_{\text{re}} = 5.95, \Delta z = 0.05$ の線である。緑線、オレンジ線は Planck Collaboration et al. (2016) のデータで、それぞれ再電離が終了する時の赤方偏移 z_{end} に関して一様分布、 $z_{\text{end}} > 6$ に偏った分布を事前分布とした時の結果である。この図では緑線、オレンジ線でそれぞれ $z_{\text{re}} = 7.2, 7.8$ を与えている。

$4000[\text{pc}/\text{cm}^3]$ の範囲で赤方偏移の推定に有効であることを示した。さらに再電離モデルとして tanh モデルを適用し、DM の赤方偏移依存性を IllustrisTNG シミュレーションによって調べることで遠方の天体の DM を調べることによって再電離時期の制限を行うことができることを示した。

Reference

- Z. J. Zhang, K. Yan, C. M. Li, G. Q. Zhang, and F. Y. Wang, The Astrophysical Journal, Nov 2020, Vol.906, Issue 1, id.49, 7 pp.
- D. R. Lorimer, M. Bailes, M. A. McLaughlin, D. J. Narkevic, F. Crawford, Science 02, Nov 2007, Vol.318, Issue 5851, pp. 777-780
- Lewis, A. 2008, Phys.Rev.D 78, July 2008, 023002
- Planck Collaboration Ade P. A. R. ,et al.,2016,A&A, 594, A13
- Planck Collaboration, Adam, R., Aghanim, N., et al. 2016, A&A, 596, A108

重字 39

ボソン星の動的発展

大阪市立大学 理学研究科

村上 由三

ボソン星の動的発展

村上 由三 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

本講演では、(Edward Seidel & Wai-Mo Suen 1990) のレビューを行う。

(Edward Seidel & Wai-Mo Suen 1990) では、自己重力相互作用をする複素スカラー場としてボソン星を考え、基底状態に摂動を加えたときの動的な発展を数値計算によって調べている。主な結果は以下のとおりである。

- (i) (総質量 M と粒子数 N の) 有限な摂動の下では、基底状態の形状が安定、もしくは不安定になる。その分岐点は $M=0.633(M_{Plank}^2/m)$ の critical mass に対応する。 m はスカラー場の質量で、考えられる摂動によって決まる。
- (ii) 安定な場合は、摂動を加えられると振動して、固有振動数を持つスカラー場を放射し、より質量の少ない、大きな半径を持つ形状へと安定化する。
- (iii) 不安定な場合に摂動を加えられると、ブラックホールに崩壊、もしくは別の状態へと変化し最終的には安定な場合に落ち着く。

1 Introduction

素粒子物理学による宇宙論への重要な一つに、ボソンが宇宙の形成に重要な役割を果たす、というものがあ。多くの素粒子理論は、初期宇宙で弱い相互作用をするボソンが大量に作られたと予測している。また、銀河形成や原始元素合成の研究によると、ダークマターはバリオンよりも多く、ダークマターはボソン粒子で作られている可能性がある。従って、ボソンで作られた天体であるボソン星を研究することによって、宇宙物理、天文学に何らかの示唆を与えることが期待される。

以前の研究によって、ボソン星の平衡な基底状態に無限小摂動を加えたときの振る舞いが既に調べられている。参考文献 [1] では、星への物質の降着や、カップリングによるスカラー粒子の消滅のような天文学的・物理学的な環境下での振る舞いを調べるために、ボソン星の総質量 M と粒子数 N を変化させるような有限の摂動を考えている。調べる時空は球対称とする。

2 作用・計量

自己重力相互作用をする複素スカラー場 $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ を表すため、作用を以下のように定める。

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R - \int d^4x [\sqrt{-g} (\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi + \frac{1}{2} m^2 \Phi^* \Phi + \frac{1}{4} \lambda |\phi|^4)] \quad (1)$$

第一項目が重力による作用で、第二項目がスカラー場の作用である。この作用から、スカラー場の方程式

$$g^{\mu\nu} \phi_{;\mu\nu} - m^2 \phi - \lambda (\phi * \phi) \phi = 0 \quad (2)$$

と、アインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (3)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} [L_M] \quad (4)$$

が求められる。(L_M は作用第二項のラグランジアン密度)

また、ハミルトン拘束条件

$$G_{tt} - 8\pi G T_{tt} = 0 \quad (5)$$

を満たすものとする。球対称時空を考えるため、計量は以下のように定める。

$$ds^2 = -(N^2 - S^2)dt^2 + 2Sdt dr + r^2 d\Omega^2 \quad (6)$$

ここで、 S はシフト、 N はラプス関数である。 N と S には自由度があるが、polar-slicing 条件を課し、シフト $S(t, r) = 0$ とする。

3 平衡状態

まず、ボソン星の平衡状態について説明する。ボソン星は、半径方向に n 個の節を持つとき、 n 次励起状態といわれる。今回は基底状態でのボソン星の振る舞いについて説明する。図 1 は $r=0$ でのスカラー場 $\phi(0)$ に対する質量の分布を表したグラフである。質量のピーク $M_c = 0.633(M_{Plank}^2/m)$ をとる $\phi(0)$ を $\phi(0)_c$ と呼び、これよりも $\phi(0)$ が小さい場合は安定となり (S-branch(stable-branch))、大きい場合は不安定となる (U-branch(unstable-branch)) ことが知られている。

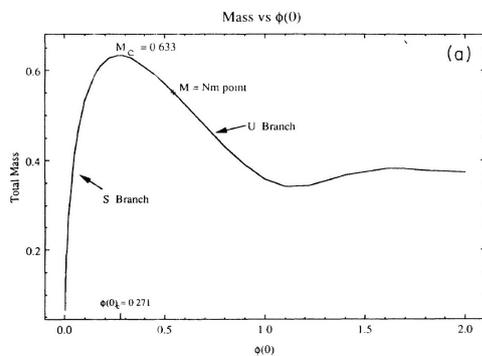


図 1: $\phi(0)$ に対する質量の分布

平衡状態の解について考える。スカラー場 Φ が時間依存しないような解は存在しないため、代わりに Φ が固定された振動数 ω_0 で振動するものとする。

$$\Phi(t, r) = \Phi_0(/bmr)e^{-i/\omega_0 t} \quad (7)$$

4 発展方程式

計量 (6) を用いて、スカラー場の方程式 (2)、アインシュタイン方程式 (3)(4)、ハミルトン拘束条件 (5) を書き直し、数値計算をするための発展方程式を求める。平衡状態の振動数を用いて、変数を以下のように無次元化する。

$$r \equiv mr, t = \omega_0 t, \phi = \sqrt{4\pi G} \Phi, N \equiv N \frac{m}{\omega_0} \quad (8)$$

また、計算のため、以下のような変数変換を行う。

$$\psi_1 \equiv r\phi_1, \psi_2 \equiv r\phi_2, \pi_1 \equiv \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi_1}{\partial t}, \pi_2 \equiv \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \quad (9)$$

$$\alpha \equiv \frac{N}{g}$$

これらの変数を用いて、発展方程式は以下のように表せる。

$$\dot{g} = N(\pi_1 \phi'_1 + \pi_2 \phi'_2), \quad (10)$$

$$N' = \frac{N}{2} \left[\frac{g^2 - 1}{r} + r [(\phi'_1)^2 + (\phi'_2)^2 - g^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)] + \frac{\pi_1^2 + \pi_2^2}{r} \right] \quad (11)$$

$$\dot{\pi}_i = \alpha' \psi'_i + \alpha \psi''_i - \psi_i \left[gN + \frac{\alpha'}{r} \right], i = 1, 2, \quad (12)$$

$$\dot{\psi}_i = \alpha \pi_i, i = 1, 2 \quad (13)$$

$$\frac{2g'}{rg^3} + \frac{g^2 - 1}{r^2 g^2} - \frac{\pi_1^2 + \pi_2^2}{r^2 g^2} - \frac{\phi_1'^2 + \phi_2'^2}{g^2} - (\phi_1^2 + \phi_2^2) = 0 \quad (14)$$

5 境界条件・初期条件

$r = 0$ と $r = \infty$ での境界条件を設定する。

$r = 0$ では、時空が特異的でないという条件を課す。これにより、 $g(r = 0) = 1$ となること、 g, N, ϕ_1, ϕ_2 の空間微分が $r = 0$ 付近で 0 になること、 $\psi_1, \psi_2, \pi_1, \pi_2$ が $r = 0$ に関して反対称であることがわかる。

$r = \infty$ では、ラプス N が初期値から固定されており、スカラー場は outgoing であるものとする。

6 S-branch

S-branch に摂動を加えることを考える。例として、図 2 のような摂動を加えると、(実線が元の状態、破

線が摂動を加えた状態) 星の持つ総質量は図 3 のようになる。

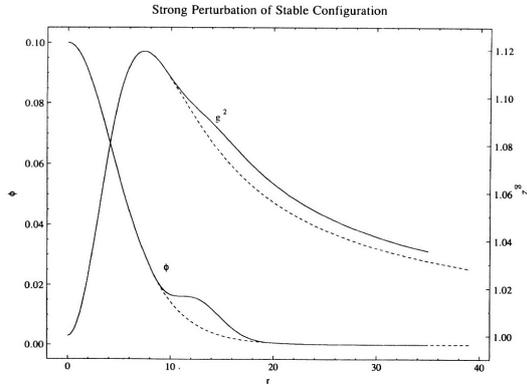


図 2: Stable branch に与える摂動

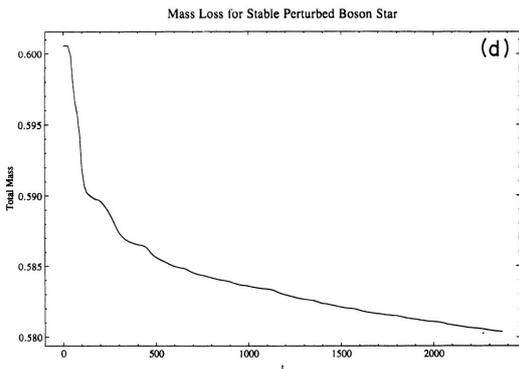


図 3: 質量の変化

図 2 より、星はスカラー場を放出しながら振動し、元の状態よりも総質量の小さい別の S-branch へと移る。

7 U-branch

U-branch に摂動を加えることを考える。例として、質量 $M = 0.609 < M_c$ を持つ U-branch の星の中心密度を増加させて $M = 0.615 < M_c$ にするような摂動を加えると、図 4 のような結果が得られる。 $t = 0$ では g^2 の値はほとんど 0 であったのに対し、 $t = 48$ では大きな値を持っている。これは、ボソン星がブラックホールへと崩壊したことを示している。

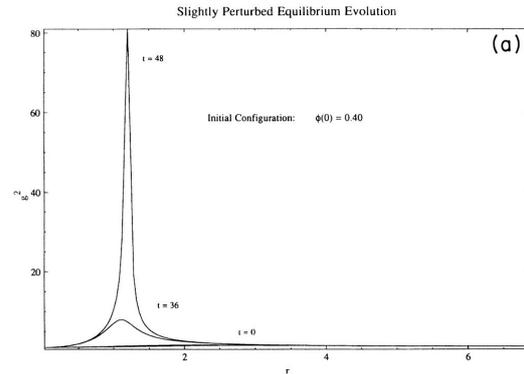


図 4: U-branch の中心密度を減少させた場合の g の変化

別の例として、U-branch の星の密度を減少させた場合を考える。この変化によって、状態は図 1 の曲線を左に移動するため、もしも M_c よりも小さくなった時には、S-branch に移動することになる。図 5 では、Unstable-branch に上記の摂動を加えた場合の状態と、Stable-branch の状態が比較されている。

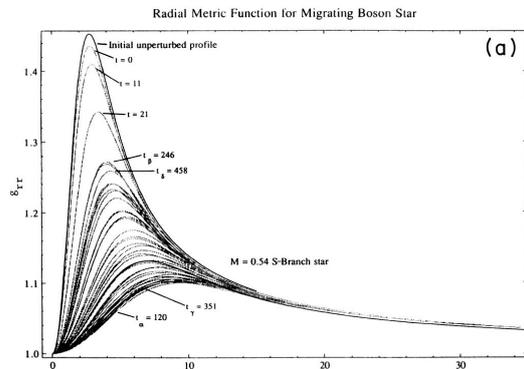


図 5: 質量の変化

したがって、U-branch の星は、星の密度を増加させるか、減少させるかによって、崩壊するか、S-branch に移動するかが決まることが分かった。

8 Conclusion

第 3 節 (平衡状態) より、ボソン星には安定な状態 (S-branch) と不安定な状態 (U-branch) が存在する。第 6 節 (S-branch) より、S-branch に小さな摂動を加

えると、星はスカラー場を放出しながら振動し、元の状態よりも総質量の小さい別の S-branch へと移る。第 7 節 (U-branch) より、U-branch に摂動を加えたとき、加える摂動により、(1) 星の外へスカラー場をほとんど放出せずブラックホールを形成するか、(2) 安定な S-branch へと移る。

Acknowledgement

本発表にあたり、ご指導いただいた宇宙物理・重力研究室の皆様、講演の機会を与えてくださった夏の学校の運営の皆様に深く感謝申し上げます。

Reference

Seidel, & Suen 1990, physical review D

重字 40

Post-Newtonian 効果を考慮した Eccentric Kozai-Lidov
時間

東京大学 理学系研究科物理学専攻
稲熊 穂乃里

Post-Newtonian 効果を考慮した Eccentric Kozai-Lidov 時間

稲熊 穂乃里 (東京大学大学院 理学系研究科)

Abstract

ブラックホールの連星が、他の少し遠方にある天体 (3 体目と呼ぶ) に束縛されており、系が階層的 3 体系となっている場合、Eccentric-Kozai-Lidov メカニズムによる連星の離心率の成長によって、連星の合体率が大きくなると予想される。Eccentric-Kozai-Lidov メカニズムによる連星の離心率や連星の軌道平面と 3 体目の軌道平面のなす角度の変化は振動的であり、その時間スケールを EKL 時間と呼ぶ。従って、本研究では離心率の変化率を調べるため、EKL 時間を 3 体目の質量を様々に変化させ、離心率の変化率への 3 体目の寄与を調べ、3 体目の質量が 0.2 倍になると EKL 時間は 3.5 倍長くなるという結果を得た。さらに、階層的三体系に対する近似の octupole 項までとった場合や Post-Newtonian 効果が EKL 時間にどのような影響を及ぼすかを調べ、それらが離心率の変化率にどのように影響するかを確かめた。その結果、系が安定な限り、2.5Post-Newtonian 効果は EKL 時間に影響しないことがわかった。1Post-Newtonian や octupole 項の影響による EKL 時間の、連星の軌道平面と 3 体目の軌道平面のなす角度や連星の質量比への依存性について、さらなる研究が必要である。

1 Introduction

Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory(LIGO) の観測によって、2つの恒星質量ブラックホールの合体は頻繁に起きていることが証明された。しかし、恒星質量ブラックホールよりもはるかに大きな、約 $10^5 \sim 10^{10}$ 太陽質量もの質量をもつ巨大ブラックホールは、独立した2つの巨大ブラックホールの系において、宇宙年齢以内に合体できないことが明らかとなっている (Begelman M. C. et al. 1980)。しかし、近年、連星をなす2つの巨大ブラックホール以外に、それに束縛されている3体目の巨大ブラックホールが少し遠方に存在し、系が階層的3体系となっている場合には、巨大ブラックホールの合体が起きることが明らかとなった (Iwasawa M. et al. 2006)。(Iwasawa M. et al. 2006) によると、この合体が起きる一つの大きな要因は、Eccentric-Kozai-Lidov メカニズムによって、2つの巨大ブラックホールの連星の離心率が急激に大きくなることによって2つの巨大ブラックホールが接近し、重力波を放出することである。ここで、Eccentric-Kozai-Lidov(EKL) メカニズムとは、階層的3体系において、遠方にある3体目の影響で、連星の軌道離心率や、連星の軌道平面と3体目の軌道平面のなす角度がある時間で振動

的に変化することをいう。また、この振動の時間スケールを EKL 時間と呼ぶ。

従って、恒星質量ブラックホール連星においても、この EKL メカニズムによって、合体率が上昇すると考えられる。さらに、連星ブラックホールの合体は、連星の軌道離心率が急激に変化し大きな値をとった時に起きるため、離心率の変化率が大きい場合、すなわち、EKL 時間が短く、短い時間スケールで離心率が大きくなる場合に合体率が上昇すると考えられる。本研究では、3体目の質量を様々に変化させた場合の EKL 時間を調べることで、離心率の変化率と3体目の質量の関係を調べた。さらに階層的三体系に対する近似の高次までとった場合や Post-Newtonian 効果が EKL 時間にどのような影響を及ぼすかを調べ、それらが離心率の変化率にどのように影響するかを確かめた。

2 Methods/Instruments

本研究は、Secular コード (Okinami) と、直接 N 体計算コード (Tsunami) を用いて行った。

2.1 階層的 3 体系の永年近似

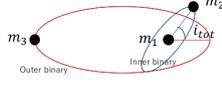


図 1: 階層的三体系の概略図. m_1 は 1 体目の質量, m_2 は 2 体目の質量, m_3 は 3 体目の質量, i_{tot} は内連星 (図中の Inner binary, 青の楕円) の軌道平面と外連星 (図中の Outer binary, 赤の楕円) の軌道平面のなす角度を表す.

図 1 は階層的三体系の概略図である. m_1 を 1 体目の質量, m_2 を 2 体目の質量, m_3 を 3 体目の質量, i_{tot} を内連星の軌道平面と外連星の軌道平面のなす角度 (以下, inclination と呼ぶ) とする. また, e_1 , e_2 をそれぞれ内連星, 外連星の離心率, a_1 , a_2 をそれぞれ内連星, 外連星の長軸半径 ($a_1 \ll a_2$) とし, また, 1 体目から 2 体目を結ぶベクトル \mathbf{r}_1 と, 内連星の重心から 3 体目を結ぶベクトル \mathbf{r}_2 のなす角を Φ とする. Post-Newtonian 効果を考慮しないとき, この階層的三体系のハミルトニアン \mathcal{H}_0 を $\frac{a_1}{a_2}$ で展開すると (e.g. (Naoz S. et al. 2013a)),

$$\mathcal{H}_0 = \frac{k^2 m_1 m_2}{2a_1} + \frac{k^2 m_1 m_2}{2a_1} + \frac{k^2}{a_2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n M_n \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^n \left(\frac{a_2}{r_2}\right)^{n+1} P_n(\cos \Phi) \quad (1)$$

となる. ここで, k^2 は万有引力定数であり,

$$M_n = m_1 m_2 m_3 \frac{m_1^{n-1} - (-m_2)^{n-1}}{(m_1 + m_2)^n} \quad (2)$$

である. 式 (1) の $n = 2$ の項を quadrupole 項, $n = 3$ の項を octupole 項と呼ぶ. さらに, Post-Newtonian(PN) の効果を考慮すると, 近日点移動の効果 (1PN), 重力波の効果 (2.5PN, 重力波の効果を含む最低次の項), また, quadrupole 項, octupole 項の効果は, 階層的三体系のハミルトニアン \mathcal{H} に,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{1\text{PN}} + \mathcal{H}_{2.5\text{PN}} \\ &= \mathcal{H}_{\text{kepler}} + \mathcal{H}_{\text{quad}} + \mathcal{H}_{\text{oct}} + \mathcal{H}_{1\text{PN}} + \mathcal{H}_{2.5\text{PN}} \end{aligned} \quad (3)$$

のように現れる (e.g. (Naoz S. et al. 2013a), (Naoz S. et al. 2013b), (Liu B. & Lai D. 2018)). ただし,

$$\mathcal{H}_{\text{kepler}} = \frac{k^2 m_1 m_2}{2a_1} + \frac{k^2 m_1 m_2}{2a_1} \quad (4)$$

とおいた. 従って, ハミルトン力学に則ってハミルトニアン \mathcal{H} から計算された内連星の離心率 e_1 の変化率は, 各項の影響を

$$\frac{de_1}{dt} = \left. \frac{de_1}{dt} \right|_{\text{quad}} + \left. \frac{de_1}{dt} \right|_{\text{oct}} + \left. \frac{de_1}{dt} \right|_{1\text{PN}} + \left. \frac{de_1}{dt} \right|_{2.5\text{PN}} \quad (5)$$

のように反映する.

本研究では, 上記の定式化に則った Secular コード (Okinami) を使用して EKL 時間を調べ, 各項の影響について議論した. さらに, 同じ系に対して Okinami コードの結果と直接 N 体計算コード (Tsunami) の結果を比較し, 議論した.

2.2 EKL 時間の算出

階層的 3 体系において, 3 体目の影響により, e_1 と内連星と i_{tot} はある時間で振動的に変化する. これを Koza-Lidov メカニズムと呼び, その振動の時間スケールを EKL 時間と呼ぶ. 本研究では, e_1 が極大値をとる時間を記録し, その時間間隔を EKL 時間と定義し, Okinami コードや Tsunami コードで得られた計算結果を用いてこの EKL 時間がどのように変化するかを調べた.

まず, 2.5PN の効果まで取り入れた Okinami コードで 3 体目の質量 m_3 を変化させ, EKL 時間の変化を議論した. 次に, i_{tot} の初期値を変化させ, EKL 時間の変化を議論した. さらに, Okinami コードで quadrupole 項のみを取り入れた場合, octupole 項までを取り入れた場合, 1PN 項までを取り入れた場合, 2.5PN 項までを取り入れた場合の 4 種類の結果を比較し, 2.1 で述べた各項がどのように影響しているか議論した.

3 Results & Discussion

3.1 3 体目の質量を変化させた場合の EKL 時間の変化

2.2 節の手法で、2.5PN の効果まで含む Okinami コードで得られた計算結果をもとに EKL 時間を計算した。 m_3 を様々に変化させ、 $m_3 = 10.5$ 太陽質量以上にした時、系が不安定となり 2.5×10^7 年以内に 1 体目と 2 体目の衝突が起こった。

図 2 は m_3 を様々に変化させた時に得られた e_1 の時間変化の様子と得られた EKL 時間の一例である。図 2 の上段の e_1 の時間変化のグラフにおいて、ここでは、 m_3 以外のパラメータの初期値は、 $a_1 = 23$ au、 $a_2 = 502$ au、 $e_1 = 0.001$ 、 $e_2 = 0.6$ 、 $i_{tot} = 94^\circ$ 、 $m_1 = 10$ 太陽質量、 $m_2 = 8$ 太陽質量に固定した。ここでの解析により、 m_3 が 0.2 倍になると、EKL 時間は約 3.5 倍に長くなることがわかった。

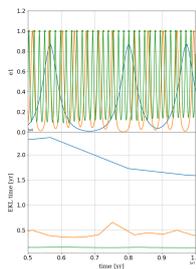


図 2: m_3 を変化させた時の e_1 の時間変化の様子と EKL 時間 (青線は $m_3 = 1$ 太陽質量, オレンジ線は $m_3 = 5$ 太陽質量, 緑線は $m_3 = 10$ 太陽質量の場合を表す。また、他のパラメータの初期値は $a_1 = 23$ au, $a_2 = 502$ au, $e_1 = 0.001$, $e_2 = 0.6$, $i_{tot} = 94^\circ$, $m_1 = 10$ 太陽質量, $m_2 = 8$ 太陽質量に固定した。)

また、同様の計算を Tsunami コードで行ったところ、Okinami コードに比べ、EKL 時間が短いという結果が得られた。さらに、 $m_3 = 10.5$ 太陽質量以上にした時、 2.5×10^7 年以内に 1 体目と 2 体目の衝突は起きなかった。これは Okinami には含まれていないより高次の PN などの効果によるものだと考えられるが、今後さらなる研究が必要である。

3.2 EKL 時間への Post-Newtonian 効果

ここでも、2.2 節の手法で、Okinami コードで得られた計算結果をもとに EKL 時間を計算した。quadrupole 項の効果、octupole 項の効果、1PN の効果、2.5PN の効果の影響を個別に調べるため、quadrupole 項の効果のみを取り入れた Okinami コード、octupole 項の効果まで取り入れた Okinami コード、1PN の効果まで取り入れた Okinami コード、2.5PN の効果まで取り入れた Okinami コードの 4 種類のコードで得られた結果を比較した。各パラメータの初期値は、 $a_1 = 23$ au, $a_2 = 502$ au, $e_1 = 0.001$, $e_2 = 0.6$, $i_{tot} = 94^\circ$, $m_1 = 10$ 太陽質量, $m_2 = 8$ 太陽質量に固定し、 $m_3 = 1$ 太陽質量の場合と、 $m_3 = 10$ 太陽質量の場合について各コードの結果を比較した。図 3 は $m_3 = 1$ 太陽質量の場合の e_1 の時間変化の様子と得られた EKL 時間であり、図 4 は $m_3 = 10$ 太陽質量の場合の e_1 の時間変化の様子と得られた EKL 時間である。

まず、図 3 と図 4 を比較すると、図 3 では 1PN まで取り入れた場合と 2.5PN まで取り入れた場合で EKL 時間に違いがないのに対し、図 4 では 1PN まで取り入れた場合と 2.5PN まで取り入れた場合で、2.5PN を取り入れた場合の方が 2.5PN を取り入れない場合の EKL 時間よりも短いという違いがある。ここで、 $m_3 = 10$ 太陽質量とした時、1PN まで取り入れた場合と 2.5PN まで取り入れた場合の内連星の長軸半径 a_1 の時間変化を比較すると、図 5 のように、1PN まで取り入れた場合では a_1 は時間変化していないのに対し、2.5PN まで取り入れた場合では a_1 は時間とともに小さくなっていることがわかる。これは、3 体目の影響が大きくなったことにより系が不安定となり、内連星が重力波を放出してエネルギーを失っていることによるものである。一方で、 $m_3 = 1$ 太陽質量とした場合は、2.5PN まで取り入れた場合でも a_1 の値は時間変化していなかった。従って、 e_1 の時間変化において、2.5PN の効果は系が不安定になり重力波を放出している場合にのみ効くものであり、系が安定な場合は 2.5PN の効果は現れない。

次に、1PN の効果について議論する。図 4 より、1PN まで取り入れた場合の EKL 時間は octupole 項

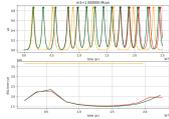


図 3: $m_3 = 1$ 太陽質量の場合の e_1 の時間変化の様子と EKL 時間 (オレンジ線は quadrupole 項のみ, 赤線は octupole 項まで, 青線は 1PN まで, 緑線は 2.5PN まで取り入れた場合を表す.)

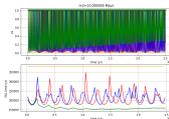


図 4: $m_3 = 10$ 太陽質量の場合の e_1 の時間変化の様子と EKL 時間 (オレンジ線は quadrupole 項のみ, 赤線は octupole 項まで, 青線は 1PN まで, 緑線は 2.5PN まで取り入れた場合を表す.)

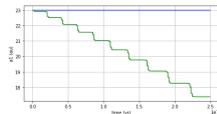


図 5: $m_3 = 10$ 太陽質量の場合の a_1 の時間変化の様子 (青線は 1PN まで, 緑線は 2.5PN まで取り入れた場合を表す.)

まで取り入れた場合の EKL 時間より、EKL 時間の振動的変動の周期が短くなっていることがわかる。(Naoz S. et al. 2013b) より、1PN の効果を入れた場合と入れない場合では、inclination i_{tot} の振る舞いに違いが出るということがわかっている。従って、EKL 時間は i_{tot} に依存すると考えられる。

最後に、octupole 項の効果について議論する。図 4 より、quadrupole 項のみ取り入れた場合の EKL 時間は、octupole 項を取り入れた場合に比べ長く、さらに時間変化もしていない。従って EKL 時間の時間変化は octupole 項の効果によるものである。octupole 項は $m_1 = m_2$ の時に 0 となるから、EKL 時間は m_1 と m_2 の質量比にも依存することと考えられる。

4 Conclusion

以上の結果と考察より、EKL 時間、すなわち離心率の変化率において、系が安定な限りは 2.5PN の効果は重要ではないこと、EKL 時間は m_3 の関数であることが確かめられた。また、EKL 時間は i_{tot} や m_1 と m_2 の質量比にも依存することが示唆された。従って、離心率の変化率をより詳しく調べるためには、 i_{tot} や m_1 と m_2 の質量比を変化させた時の EKL 時間についても議論するの必要があり、これが今後の課題である。

Acknowledgement

本発表にあたり、計算コードを提供してくださった理化学研究所 Alessandro Alberto Trani 博士、議論してくださった吉田直紀教授をはじめ東京大学宇宙理論研究室吉田研究室の皆様、また夏の学校関係者の皆様に感謝いたします。

Reference

- Begelman M. C., Blandford R. D. & Rees M. J. 1980, Nature, 287
- Iwasawa M., Funato Y. & Makino J. 2006, ApJ, 651, 1059
- Naoz S., Farr W., Lithwick Y., Rasio F. A., & Teyssandier J. 2013a, MNRAS, 431, 2155.
- Naoz S., Kocsis B., Loeb A. & Yunes N. 2013b, ApJ, 773, 187.
- Liu B. , & Lai D. 2018, ApJ, 863, 68.

重宇 poster1

重力波を用いたダークエネルギー探索

京都大学基礎物理学研究所 理学研究科物理学専攻
窪田 圭一郎

重力波を用いたダークエネルギー探索

窪田 圭一郎 (京都大学基礎物理学研究所 M2)

Abstract

2015 年に LIGO によって初めて観測された重力波は、強重力場や高密度天体の研究のみならず宇宙論研究においても重要である。重力波は伝搬中に加速膨張の影響を受けるため、ダークエネルギーや大きいスケールでの重力の性質を調べるための新しい道具として使うことができる。そのうちの 1 つとして標準音源と呼ばれるものがある。経験的に真の明るさが分かっている標準光源 (Standard Candle) では、観測された標準光源の見かけの明るさと真の明るさを比較することで光源までの光度距離が見積もることができる。この標準光源と相補的になるものが標準音源である。中性子星やブラックホールの連星によって生成された重力波は、波源までの光度距離が見積もることができる。そのため光度距離が分かる標準光源になぞらえて、この重力波源を標準音源 (Standard Siren) と呼んでいる。本集録では標準音源とこれを用いた重力理論のテストについてレビューする。

1 Standard Siren

中性子星やブラックホールからなる連星によって生成された重力波は、重力波の観測のみで重力波源までの光度距離が見積もられる。まずどのようにして重力波観測から光度距離が見積もられるかを簡単にレビューする。

円運動をしている連星から放出された重力波が FRLW 背景時空を伝搬してきた場合、観測される重力波の四重極成分は以下で与えられる [[1] の (4.194) 式]。

$$h_{+, \times}(\tau_{\text{obs}}) \propto \frac{4}{d_{\text{GW}}} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{\text{gw}}^{(\text{obs})}(t_{\text{obs}})}{c} \right)^{2/3} \quad (1)$$

ここで M_c は連星の質量をそれぞれ m_1, m_2 , 重力波源の赤方偏移を z としたとき

$$M_c = (1+z) \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} \quad (2)$$

で与えられる量であり、 d_{GW} は重力波源までの光度距離である。また周波数の時間微分は以下で与えられる [[1] の (4.196) 式]。

$$\dot{f}_{\text{gw}}^{(\text{obs})} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \left(\frac{GM_c(z)}{c^3} \right)^{5/3} \left[f_{\text{gw}}^{(\text{obs})} \right]^{11/3} \quad (3)$$

(3) 式から、周波数 $f_{\text{gw}}^{(\text{obs})}$ とその時間微分 $\dot{f}_{\text{gw}}^{(\text{obs})}$ が

観測されると M_c がわかる。周波数 $f_{\text{gw}}^{(\text{obs})}$ と重力波の振幅 $h_{+, \times}(\tau_{\text{obs}})$ が観測されると既知の M_c と組み合わせることで、(1) 式から光度距離 d_{GW} が見積もられる。

2 Running Planck mass

一般相対性理論では電磁波と重力波それぞれから見積もられた光度距離は等しいが、スカラー場が重力場と結合しているような理論では重力波の伝搬が変更され一般に等しくならない。スカラー場と重力場との結合は超弦理論の低エネルギー極限や高次元のコンパクト化などから提案され、簡単で多くの動機がある一般相対性理論の拡張である。ここでは以下で与えられるような作用を考え、[2] を基に電磁波と重力波それぞれから見積もられた光度距離の違いを見積もる。

$$\mathcal{L} = G_2(\phi, X) + G_3(\phi, X)\square\phi + G_4(\phi)R + (\text{Matter}) \quad (4)$$

ここで X は運動項で $X = -g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi/2$ である。この作用では重力波の伝搬速度は光速と等しく、連星中性子星合体由来の重力波 GW170817 等によってかけられている制限を満たしている。右辺第 3 項 $G_4(\phi)R$ が今注目しているスカラー場と重力場の結合である。

重力波を計算したいので計量 $g_{\mu\nu}$ を背景時空 $\bar{g}_{\mu\nu}$

と摂動 $h_{\mu\nu}$ に分ける。

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll |\bar{g}_{\mu\nu}|. \quad (5)$$

同様にスカラー場 ϕ も空間的に一様な部分 $\bar{\phi}(t)$ と摂動 φ に分ける。

$$\phi(t, x^i) = \bar{\phi}(t) + \varphi(t, x^i), \quad |\varphi| \ll |\bar{\phi}|. \quad (6)$$

本集録ではテンソル型摂動にのみ注目しそれを h_A とかくことにする。 $A = +, \times$ である。背景時空 $\bar{g}_{\mu\nu}$ を FLRW 時空にして作用をテンソル型摂動の二次まで展開すると以下になる。

$$\begin{aligned} S &= \int \sqrt{-g} G_4(\phi) R + \dots \\ &\simeq \frac{1}{2} \int d^3x d\eta M_{\text{Pl}}^2(\bar{\phi}(\eta)) a(\eta)^2 (h_A'^2 - \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_A) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $M_{\text{Pl}}(\bar{\phi})$ は Planck mass であり、ここではスカラー場の関数で $M_{\text{Pl}}^2(\bar{\phi}) := 2G_4(\bar{\phi})$ である。また η は conformal time、 $a(\eta)$ は scale factor、 h_A' はテンソル型摂動を conformal time で偏微分したものである。この摂動の二次まで展開された作用をテンソル型摂動 h_A について変分すると以下を得る。

$$h_A'' + [2 + \alpha_M(\eta)] \mathcal{H} h_A' + \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_A = 0 \quad (8)$$

ここで \mathcal{H} はハッブル定数であり $\mathcal{H} = a'/a$ である。また α_M は一般相対性理論からのズレをあらわすパラメータであり $\alpha_M = 2M_{\text{Pl}}' / (\mathcal{H} M_{\text{Pl}})$ で与えられ、一般相対性理論では $\alpha_M = 0$ である。(8) 式は重力波が摩擦を受けながら伝搬することを意味する。摩擦項である第二項に注目すると、一般相対性理論の場合と重力場がスカラー場と結合する場合とでは摩擦項の大きさが違い振幅の減衰具合が異なることをあらわしている。そのため実際の物理が重力場がスカラー場と結合している場合は、観測装置に到達したときの重力波の振幅から一般相対性理論を仮定して見積もられる光度距離は誤って見積もられることになる。

次に重力場がスカラー場と結合している場合の重力波から見積もられた光度距離は、一般相対性理論を仮定して見積もられた光度距離からどれだけずれる

のかを見積もる。そのためにまず h_A を $a_{\text{GW}}(\eta) = a(\eta)M_{\text{Pl}}(\eta)/M_{\text{Pl}}(\eta_0)$ で normalize する*1。

$$\hat{h}_A := a_{\text{GW}} h_A. \quad (9)$$

\hat{h}_A すると (8) 式はフーリエ空間で以下のようにかける。

$$\hat{h}_A'' + \left(k^2 - \frac{a_{\text{GW}}''}{a_{\text{GW}}} \right) \hat{h}_A = 0 \quad (10)$$

短波長 ($k \gg a_{\text{GW}}''/a_{\text{GW}}$) の重力波では $a_{\text{GW}}''/a_{\text{GW}}$ は無視することができる。従って短波長の重力波では \hat{h}_A は振幅が定数の平面波解になる。つまり \hat{h}_A は伝搬中常に定数なので、normalize してない重力波の振幅は $h_A \propto 1/a_{\text{GW}} \propto 1/(a(\eta)M_{\text{Pl}}(\eta))$ となる。一般相対性理論では Planck mass は定数なので $h_{A,\text{GR}} \propto 1/a_{\text{GW}} \propto 1/(a(\eta)M_{\text{Pl}}(\eta_0))$ となる。これらを組み合わせると、重力場がスカラー場と結合している場合と一般相対性理論の場合の重力波の振幅の関係は

$$h_{A,\text{ST}} = \frac{M_{\text{Pl}}(\bar{\phi}(\eta_{\text{source}}))}{M_{\text{Pl}}(\bar{\phi}(\eta_0))} h_{A,\text{GR}} \quad (11)$$

となる。 $h_A \propto 1/d_{\text{GW}}$ だったので、重力場がスカラー場と結合している場合と一般相対性理論の場合の重力波から見積もられた光度距離の関係は

$$d_{\text{GW,ST}} = \frac{M_{\text{Pl}}(\bar{\phi}(\eta_0))}{M_{\text{Pl}}(\bar{\phi}(\eta_{\text{source}}))} d_{\text{GW,GR}} \quad (12)$$

となる。重力場とスカラー場の結合は重力波のみ変更するため、重力場とスカラー場の結合がある場合でも電磁波から見積もられた光度距離は一般相対性理論と等しくなる。つまり重力場とスカラー場の結合がある場合、重力波と電磁波から見積もられた光度距離の関係は

$$d_{\text{GW,ST}} = \frac{M_{\text{Pl}}(\bar{\phi}(\eta_0))}{M_{\text{Pl}}(\bar{\phi}(\eta_{\text{source}}))} d_{\text{EM}} \quad (13)$$

となる。重力波と電磁波それぞれから精度よく光度距離を見積もることができれば重力理論のテストを行うことができる。

*1 η_0 は現在の conformal time である

2021 年度 第 51 回 天文・天体物理若手夏の学校

本集録では重力場と結合しているスカラー場の空間的に一様な部分だけを考えていたが、ポスター発表ではスカラー場の摂動も取り入れ、スカラー場の空間的ゆらぎが重力波から見積もられる光度距離に及ぼす影響について考える。

Acknowledgement

夏の学校の運営に尽力していただいた全ての方に感謝申し上げます。

Reference

- [1] M. Maggiore, "Gravitational waves: Volume 1: Theory and experiments", Oxford University Press (2007).
- [2] M. Lagos et al., *Physical Review D* **8**, 083504 (2019).

[indexへ戻る](#)

重宇 poster2

Analogue Gravity

大阪市立大学 理学研究科数物系専攻
佐田 彩夏

Analogue Gravity

佐田 彩夏 (大阪市立大学大学院 理学研究科)

Abstract

一般相対論やその拡張理論 (修正重力・量子化) の検証のために Black Hole の存在を確認したいがそれ自身を直接観測することは原理的に不可能であるため、代わりに Black Hole に関連して起こると予想される現象を観測する必要がある。しかし、そのような現象の一つである Hawking radiation は宇宙背景放射に比べて非常に微弱なため観測は殆ど不可能だと考えられている。そこで 1980 年に Unruh が地球上の流体でつくった Black Hole に類似した環境 (Analogue Black hole) によって観測することを提案した。[1] このように Hawking radiation の類似現象の観測を目的として誕生した Analogue Black Hole だが、現在ではその限りでなく superradiance や重力波の類似現象も研究されている。[2,3] 本研究では本学の超低温研究室で実現されている超流動の吸い込み渦 [4,5] を Kerr Black Hole の類似として考察する。

1 Introduction

一般相対論において Einstein 方程式が予言する非自明な真空解に Black Hole 解がある。Black Hole はその定義より内部から外部へ情報が伝搬しない。一般相対論によると光よりも速い速度を持つものは存在しないため光速より速く情報を伝えることはできないが、そんな光でさえも抜け出すことはできない領域が Black Hole である。つまり Black hole を直接観測することは原理的に不可能であるため、Black Hole の検証のためには、その近傍で起こりうる現象を理論予測し、観測しなければならない。現在 Black Hole に関連して予測されている主な現象として

・光の湾曲, Black Hole shadow, 散乱, 干渉現象, ・penrose process (Kerr Black Hole からの粒子によるエネルギー引き抜き) ・Superradiance (Kerr Black Hole からの波動によるエネルギー引き抜き) ・Hawking radiation (Black Hole 近傍での粒子生成による熱放射) が挙げられる。ここで Hawking radiation は曲がった時空上での量子論を考えることにより予測される Black hole からの熱放射であるが、その温度 (10^{-7}K 程度) は宇宙背景放射の温度 (3K 程度) に比べ微弱であるゆえに観測は絶望的である。そこで 1981 年に Unruh が流体を時空に、音波を massless scalar 場に見立て、Black Hole に類似した状況 (Analogue Black Hole[1]) が作れることを提案した。実際の観測が絶望的な Hawking radiation も Analogue Black

Hole ならば観測できるというアイデアである。(図 1) このことのレビューは 2 章と 3 章で紹介する。

そこで私たちは、本学の超低温研究室において唯一、超流動ヘリウム巨大吸い込み渦 [4,5] が実現していることからこの渦により Kerr Black Hole の Analogue Black Hole が再現できると予測した。この渦をつくる超流動ヘリウムは超流動成分と常流動成分で構成されていると考えられている。このモデルを二流体モデルという。二流体モデルの場合は圧力と密度の波である通常の音波 (第 1 音波) だけでなく温度とエントロピーの波である第 2 音波も存在する。第 2 音波の方が伝搬速度の幅が広く、背景流に超音速領域をつくりやすいため Analogue Black Hole を実現しやすい。しかしこれまで考えられてきた Acoustic metric は第一音波を massless scalar 場と見立てているため、第 2 音波を用いる場合は従来の Acoustic metric からの変更が必要であるが、この場合にも同様に考えられることを 4 章で提案する。

2 Analogue Black Hole

流体は次の仮定

- $\rho = \rho(P)$:barotropic,
- $\nabla \times \mathbf{v} = 0$:irrotation
; ($\mathbf{v} = \nabla\Phi$, Φ : velocity potential),
- inviscid fluid,

を満たすとき、次の方程式

- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$
:equation of continuity,
- $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho}$
:Euler's equation

に従う。また式 (2) を次の式変形

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 = \frac{1}{2} \nabla (\nabla \Phi)^2, \quad (3)$$

$$\frac{\nabla P}{\rho} = \nabla \int_0^P \frac{dP'}{\rho(P')} \quad (4)$$

を用いることで

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \int_0^P \frac{dP'}{\rho(P')} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 = \text{const} \quad (5)$$

:Bernoulli's principle

を得る。次に第 1 音波をつくる圧力の摂動と速度ポテンシャルの摂動

$$\begin{aligned} P &\simeq P_0 + \epsilon P_1, \\ \Phi &\simeq \Phi_0 + \epsilon \Phi_1 \end{aligned}$$

を考える。ここで添え字 0 は given 関数、添え字 1 は変数を表す。これに伴って、

$$\begin{aligned} \rho &\simeq \rho(P_0) + \epsilon \frac{d\rho_0}{dP_0} P_1, \equiv \rho_0 + \epsilon \rho_1, \\ \int_0^P \frac{dP'}{\rho(P')} &\simeq \int_0^{P_0} \frac{dP'}{\rho(P')} + \epsilon \frac{P_1}{\rho_0}, \\ \mathbf{v} &= \nabla \Phi_0 + \epsilon \nabla \Phi_1 \equiv \mathbf{v}_0 + \epsilon \mathbf{v}_1 \end{aligned}$$

となるので、式 (5) の ϵ の 1 次より

$$P_1 = -\rho_0 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \Phi_1 \right)$$

を得る。さらに

$$\rho_1 = \frac{d\rho_0}{dP_0} P_1 = -\frac{d\rho_0}{dP_0} \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \Phi_1 \right)$$

であるのでこれを式 (1) の ϵ の 1 次

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_0 + \rho_0 \mathbf{v}_1) = 0$$

に代入することで、波動方程式

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{d\rho_0}{dP_0} \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \Phi_1 \right) \right] \\ &+ \nabla \cdot \left[-\frac{d\rho_0}{dP_0} \rho_0 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \Phi_1 \right) \mathbf{v}_0 + \rho_0 \mathbf{v}_1 \right] \end{aligned} \quad (1)$$

を得る。さらに音速 $c_1^2 \equiv \frac{dP_0}{d\rho_0}$ と $\Phi_1 \rightarrow \Phi$, $t \rightarrow x^0$, $(x, y, z) \rightarrow x^i$, $i = 1, 2, 3$ の書き換えにより

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\rho_0}{c_1^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\rho_0}{c_1^2} v^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \\ &- \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\rho_0}{c_1^2} v^j \frac{\partial \Phi}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\rho_0}{c_1^2} (c_1^2 \delta^{ij} - v^i v^j) \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \end{aligned}$$

とでき、次のテンソル

$$f^{\mu\nu} \equiv \frac{\rho_0}{c_1^2} \begin{pmatrix} -1 & -v^j \\ -v^i & (c_1^2 \delta^{ij} - v^i v^j) \end{pmatrix}$$

を用いると

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0$$

と表せる。ここで Φ を massless scalar 場の波動関数と見立てるため、Klein Gordon 方程式

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla^\mu \Phi &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0 \\ ;g &= \det(g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

と同一視することで、

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{c_1} \begin{pmatrix} -(c_1^2 - v^2) & -\delta_{ij} v^j \\ -\delta_{ij} v^i & \delta_{ij} \end{pmatrix}$$

を得る。よって Acoustic metric は

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_1} \left[-(c_1^2 - v^2) dt^2 - 2v^i dx^i dt + (dx^i)^2 \right]$$

となる。

次に液体流体で Kerr Black Hole の再現をすることを考える。 ρ は定数、静的で軸対称、超音速領域を

もつという条件により、背景流の速度は、 B を定数、 r_H を Horizon 半径として

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \hat{v}^r(r) \hat{\mathbf{e}}_r + \hat{v}^\phi(r) \hat{\mathbf{e}}_\phi \\ &= -c_1 \frac{r_H}{r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{B}{r} \hat{\mathbf{e}}_\phi \end{aligned}$$

と書けるので Acoustic metric は

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left[1 - \frac{r_H^2 + B^2/c_1^2}{r^2} \right] c_1^2 dt^2 \\ &\quad - 2B dt d\phi + \left(1 - \frac{r_H^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \end{aligned}$$

となる。この model を Draining bathtub model という。

3 Null geodesics

波長が振幅の変化スケールに比べて十分に短く、平面波とみなせる場合、波動関数は $\Phi = Ae^{iS}$ と表すことができ、Klein Gordon 方程式に代入した実部は

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} \simeq 0$$

となる。ここで波数ベクトル $k^\mu \equiv g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu}$

$$g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0, \quad k^\nu \nabla_\nu k_\gamma = 0$$

を満たすことから波数ベクトルが null vector に同一視でき、流体中の第 1 音波が時空中の光の類似と考えられることが分かる。

4 For 2nd sound

超流動ヘリウムは転移温度以下でエントロピーを持たない超流動成分とエントロピーを持つ常流動成分の 2 成分に分離させて記述できることが知られており、これを超流動の二流体モデルという。二流体モデルは 2 章での仮定に加えて

- $\rho = \rho_n + \rho_s$, n : 常流動成分, s : 超流動成分
- $\sigma = \sigma(T)$: 単位質量当たりのエントロピー

のとき次の方程式

$$\bullet \quad \frac{\partial(\rho\sigma)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho\sigma\mathbf{v}_n) \quad (6)$$

:entropy conservation,

$$\bullet \quad \frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_n = -\frac{\nabla P}{\rho} - \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma \nabla T \quad (7)$$

:Euler's equation for normal fluid component,

$$\bullet \quad \frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s = -\frac{\nabla P}{\rho} + \sigma \nabla T \quad (8)$$

:Euler's equation for superfluid component

に従う。また式 (2) を式 (3,4) と次の式変形

$$\sigma \nabla T = \nabla \int_0^T \sigma(T') dT',$$

$$\frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma \nabla T = \nabla \int_0^T \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma \right) (T') dT'.$$

を用いることで

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_n}{\partial t} + \int_0^P \frac{dP'}{\rho(P')} + \frac{1}{2} (\nabla\Phi_n)^2 \\ + \int_0^T \left(\frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma \right) (T') dT' = \text{const} \end{aligned} \quad (9)$$

を得る。次に第 2 音波をつくる温度の摂動と速度ポテンシャルの摂動を考え、2 章と同様のステップを踏むことで式 (7) の ϵ の 1 次より

$$T_1 = -\frac{1}{\sigma_0} \frac{\rho_{n0}}{\rho_{s0}} \left(\frac{\partial\Phi_{n1}}{\partial t} + \mathbf{v}_{n0} \cdot \nabla\Phi_{n1} \right)$$

が得られ、

$$\sigma_1 = \frac{d\sigma_0}{dT_0} T_1 = -\frac{1}{\sigma_0} \frac{\rho_{n0}}{\rho_{s0}} \frac{d\sigma_0}{dT_0} \left(\frac{\partial\Phi_{n1}}{\partial t} + \mathbf{v}_{n0} \cdot \nabla\Phi_{n1} \right)$$

を式 (6) の ϵ の 1 次に代入することで以下の波動方程式

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho_0}{\sigma_0} \frac{\rho_{n0}}{\rho_{s0}} \frac{d\sigma_0}{dT_0} \left(\frac{\partial\Phi_{n1}}{\partial t} + \mathbf{v}_{n0} \cdot \nabla\Phi_{n1} \right) \right] \\ &\quad - \nabla \cdot \left[\rho_0 \sigma_0 \mathbf{v}_{n1} - \frac{\rho_0}{\sigma_0} \frac{\rho_{n0}}{\rho_{s0}} \frac{d\sigma_0}{dT_0} \left(\frac{\partial\Phi_{n1}}{\partial t} + \mathbf{v}_{n0} \cdot \nabla\Phi_{n1} \right) \mathbf{v}_{n0} \right] \end{aligned}$$

を得るため第 2 音波の速度 $c_2 \equiv \sigma_0 \sqrt{\frac{\rho_{s0}}{\rho_{n0}} \frac{dT_0}{d\sigma_0}}$ と $t \rightarrow x^0$, $(x, y, z) \rightarrow x^i$, $i = 1, 2, 3$ と書き換えることで

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\rho_0 \sigma_0}{c_2^2} \frac{\partial\Phi}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\rho_0 \sigma_0}{c_2^2} v^i \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\rho_0 \sigma_0}{c_2^2} v^j \frac{\partial\Phi}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\rho_0 \sigma_0}{c_2^2} (c_2^2 \delta^{ij} - v^i v^j) \frac{\partial\Phi}{\partial x^j} \end{aligned}$$

を得る。これは第 1 音波の場合に c_1 を c_2 に、 ρ_0 を $\rho_0\sigma_0$ に置き換えることにより同様の Acoustic metric を使って考えて良いことが分かった。さらに第 1 音波よりも第 2 音波の方が遅い速度領域を持つことから、背景流の超音速領域をつくりやすいため Analogue Black Hole を実現しやすい。

5 Discussion and Future Work

Draining bathtub model を本学の超低温研究室で実現されている超流動ヘリウムの吸い込み渦に適用することを考えると Event Horizon はないが Ergo region の類似ができることが予想されるため、Superradiance が可能かどうか検討したい。

またコンピュータシミュレーションが発展している現在における Analogue Gravity の立場についても検討したい。本研究においては、超流動ヘリウムの渦の速度を測ることは困難であり現在も不明であることから、流体力学に幾何学的な見方を与えることで明らかになる音波の軌道の湾曲や予想される増幅を通して、超流動ヘリウムの性質を解明できる可能性があると考えられる。

Acknowledgement

毎週ゼミナールに参加していただいた石原秀樹教授と小川達也氏をはじめ、アドバイスをくださった本学の重力理論研究室の方々と、質問や議論する時間をくださった小原顕教授をはじめとする本学の超低温研究室の方々に深く感謝申し上げます。

Reference

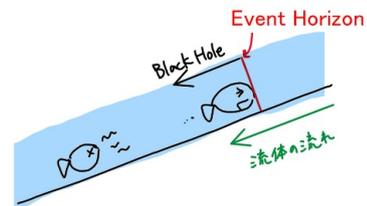
- [1].W. G. Unruh, Phys.Rev.Lett. 46 1351-1353, 1981
- [2].T.Torres, S.Patrick ,et al, Nature Physics 13, 833-836 ,2017
- [3].S. Datta, U. R. Fischer, arXiv:2011.05837 ,2020
- [4].H Yano et al 2018 J. Phys.: Conf. Ser. 969 012002
- [5].I.Matsumura, K.Ohyama, K.Sato, et al. J Low

Temp Phys 196, 204–210 ,2019

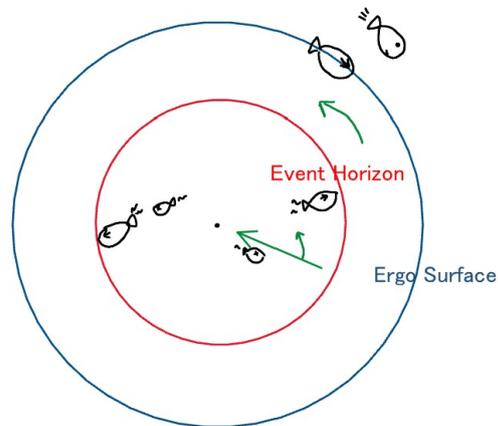
6.C.Barcelo, et al, Living Rev.Rel. 14 ,2011

7.Y Okura, master's thesis ,2021

8.L. D. Landau, E. M. Lifshitz, fluid mechanics2



魚で流体中の音波や時空中の光を表し、これ以上進めなくなる領域の境界をEvent Horizonに類似させている。



2次元にし緑の矢印で示すように動径方向の流体の流れだけでなく回転方向の流体の流れのある系ではEvent Horizonだけでなく、流体の回転方向に逆らっては進めなくなる領域の境界がKerr Black HoleのErgo Surfaceと類似される。

図 1: Analogu Black Hole のイメージ図

重宇 poster3

非線形 teleparallel gravity における GR との等価性

立教大学 理学研究科物理学専攻
齋藤 仁

非線形 teleparallel gravity の GR との等価性

齋藤 仁 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

重力を記述する最も標準的な理論は、曲率により表される一般相対性理論 (GR) である。一方で、より一般的な多様体を考えて異なる幾何学量を用いられる重力理論も存在していて、Torsion を用いる metric teleparallel gravity (TEGR)、Non-metricity を用いる symmetric teleparallel gravity (STTEGR)、Torsion, Non-metricity の両方を用いる general teleparallel gravity (GTEGR) などが存在する。これら三つの理論は、teleparallel スカラーの一次では GR と等価な理論となっていることが知られている。しかし、非線形に拡張した理論においても透過であるかどうかは全く非自明な問題となっている。今回レビューする論文 [1] では、非線形理論において GR とどのような関係性があるのかについて調べている。

1 Introduction

重力を記述する理論としてよく知られたものは GR であるが、その他にも全く別のアプローチから重力を考えることもできる。GR は、Torsion と Non-metricity を 0 にする Levi-Civita 接続を用いて Ricci スカラー R を用いて重力を記述している。一方で、別の試みとしてより一般の接続を考えることで、Torsion や Non-metricity を用いて重力を記述しようとする試みが teleparallel gravity (TEGR) である。この理論では、Ricci スカラーの代わりに、Torsion や Non-metricity の関数である teleparallel スカラーが用いられる。一般の接続の場合には、計量とは独立に決定することができる。この TEGR では、Ricci スカラー R を 0 にするような条件を課していて、これによって Einstein-Hilbert 作用を teleparallel スカラーを用いて表すことができるという点で TEGR と GR は等価な理論ということができる。しかし、teleparallel スカラーの高次の項まで考えた場合にも GR と等価な理論となっているかどうかは非自明なことなので、非線形に拡張した場合にどのような性質が現れてくるのかが今回知りたいことである。ここでは、TEGR、STTEGR、GTEGR の三つの非線形に拡張した理論をそれぞれ $f(\mathbb{T})$, $f(\mathbb{Q})$, $f(\mathbb{G})$ 理論と呼んでいる。また、この三つの非線形理論は適切な conformal 変換を施すことによって Einstein frame に移すことができる。レビューする論文 [1] では、非線形理論の Einstein frame について考え、自由度の観点から GR

と比較しどのような関係を持っているかについて調べているが、今回の発表では特に $f(\mathbb{T})$, $f(\mathbb{G})$ 理論の二つについて考えていく。非線形理論では、一般座標変換のゲージ対称性や Local Lorentz 対称性など破れてしまう対称性が存在する。しかし、Minkowski 時空の周りで線形な運動方程式の範囲で摂動を施すと破れていた対称性が回復し accidental な対称性として現れてくる。この accidental な対称性のおかげで GR と等しい自由度にまで落とすことができることが分かっている。ここから、運動方程式の線形の範囲においては少なくとも GR と等価な理論になっていることを示すことができたことをみる。

2 幾何学的構造と Local Lorentz 変換

2.1 Torsion と Non-metricity

より一般の多様体を考えた場合、Torsion と Non-metricity という二つの幾何学量が現れてくる。これらはそれぞれ、

$$Q_{\alpha\mu\nu} \equiv \nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} \quad (\text{Non-metricity}) \quad (1)$$

$$T^{\alpha}_{\mu\nu} \equiv \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \quad (\text{Torsion}) \quad (2)$$

と定義されている。ここで、 $g_{\mu\nu}$ は計量を表し、 ∇_{α} は一般の接続における共変微分を表している。(1)、

(2) 式から一般の接続を表すことができ、

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(T^\lambda_{\mu\nu} + T^\lambda_{\nu\mu} - T^\lambda_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(Q^\lambda_{\mu\nu} + Q^\lambda_{\nu\mu} - Q^\lambda_{\mu\nu}) \quad (3)$$

と書くことができる。 $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ は Levi-Civita 接続を表す。また、この一般の接続で書かれる Ricci スカラーは、

$$R = \mathcal{R} - \mathbb{G} + \mathcal{D}_\mu(Q^\mu - \bar{Q}^\mu + 2T^\mu) \quad (4)$$

と表すことができる。ここで、 \mathcal{R} は Levi-Civita 接続で書かれた Ricci スカラー、 \mathcal{D}_μ は Levi-Civita 接続での共変微分である。また $-\mathbb{G}$ は teleparallel スカラーであり、

$$-\mathbb{G} \equiv \frac{1}{4}T_{\mu\nu\rho}T^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2}T_{\mu\nu\rho}T^{\nu\mu\rho} - T_\mu T^\mu + Q_{\mu\nu\rho}T^{\rho\mu\nu} - Q_\mu T^\mu + \bar{Q}_\mu T^\mu + \frac{1}{4}Q_{\mu\nu\rho}Q^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{2}Q_{\mu\nu\rho}Q^{\nu\mu\rho} - \frac{1}{4}Q_\mu Q^\mu + \frac{1}{2}Q_\mu \bar{Q}^\mu \quad (5)$$

で書かれる。

2.2 Local Lorentz 変換

多様体上のある点 x における 4 脚場 (tetrad) e^a_μ を考える。ここで、アルファベット a は tetrad の添字、ギリシャ文字 μ を時空の添字とする。tetrad には、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu \quad (6)$$

の関係性がある。 η_{ab} は Minkowski 時空の計量を表し、 $\eta_{ab} = (-, +, +, +)$ で表す。ある場 Φ に対する Local Lorentz 変換を、

$$\delta\Phi = \frac{1}{2}\Lambda^{ab}S_{ab}\Phi \quad (7)$$

とする。 Φ は、スカラー場やスピノル場、ベクトル場などである。Local Lorentz 変換に対して微分は共変的でないので共変微分を考える必要がある。今、共変微分を、

$$D_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi + \frac{1}{2}A^{ab}_\mu S_{ab}\Phi \quad (8)$$

と定義する。 $A^a_b{}^\mu$ はスピン接続と呼ばれ、Local Lorentz 変換に対して、

$$\delta A^a_b{}^\mu = \Lambda^a_c A^{cb}{}^\mu + \Lambda^b_c A^{ac}{}^\mu - \partial_\mu \Lambda^{ab} \quad (9)$$

と変換するものとする。tetrad に対する Local Lorentz 変換に対する共変微分を、

$$D_\mu e_{a\nu} = \partial_\mu e_{a\nu} + A_{ab\mu} e^b_\nu \quad (10)$$

とする。この場合、tetrad の時空の添字について何も考えていないので考える必要がある。ここで、全共変微分を、

$$\mathcal{D}_\mu e_{a\nu} = D_\mu e_{a\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} e_{a\rho} \quad (11)$$

と定義する。また、計量に対する全共変微分は 0 になるものとする。これにより、 Γ は、

$$\Gamma^\rho_{\nu\mu} = e^{a\rho}(D_\mu e_{a\nu}) \quad (12)$$

と表すことができる。

3 teleparallel gravity

TEGR には、3つの種類が存在することが知られている。TEGR では、空間が flat であることを条件として与えるので (4) 式において $R = 0$ を課す。それによって、

$$\mathcal{R} = \mathbb{G} + (\text{全微分項}) \quad (13)$$

となる。従って作用は全微分項をのぞいて、

$$\int_{\text{E-Haction}} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{R} = \int_{\text{TEGRaction}} d^4x \sqrt{-g} \mathbb{G} \quad (14)$$

となり、作用において Einstein-Hilbert(E-H) 作用とTEGRの作用が等しくなるので GR と等価な理論を作ることができる。 $R = 0$ という条件を課すことで接続の形を決めることができ、任意の $GL(4, \mathbb{R})$ の元 Λ^μ_ν を用いることによって、

$$\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = (\Lambda^{-1})^\lambda_\rho (\partial_\mu \Lambda^\rho_\nu) \quad (15)$$

と定めることができる。TEGR は 3種類存在している、

- metric TEGR $\rightarrow R = 0, Q = 0$
- symmetric TEGR $\rightarrow R = 0, T = 0$
- general TEGR $\rightarrow R = 0$

がある。それぞれ、重力を表すための幾何学量が異なるだけで全て GR と等価である。

4 Non-linear teleparallel gravity

非線形に TEGR を拡張していく。非線形に拡張した場合にも GR ($f(R)$ 理論) と等価な理論かどうかを調べることで一般相対論との関係性などについて調べることができる。また、TEGR において高次の項が関係する高エネルギー領域でどのような性質が現れるのか、また非線形理論の低エネルギー極限で TEGR を再現するのかについて見る事ができる。

4.1 $f(T)$ 理論

まず、metric TEGR の非線形拡張を行う。ここで、torsion スカラーは $R = 0, Q = 0$ を課すことで、

$$T = \mathcal{R} + \mathcal{D}_\mu(2T^\mu) \quad (16)$$

となる。ここで、

$$S = \int d^4x f(T) \quad (17)$$

を考える。ここから、Einstein frame に移していく。補助場 ϕ, χ を導入すると、

$$S = \frac{1}{2} M_{\text{pl}}^2 \int d^4x \sqrt{-g} [\psi \mathcal{R} - 2(\partial_\mu \psi) T^\mu - U(\psi)] \quad (18)$$

$$U(\psi) = \psi \chi - f[\chi(\phi)] \quad (19)$$

と書き換えることができる。また、 $g_{\mu\nu} = \frac{1}{\psi} q_{\mu\nu} = e^{-2\phi} q_{\mu\nu}$ と conformal 変換を施し、(15) 式を代入すると、

$$S = \frac{1}{2} M_{\text{pl}}^2 \int d^4x \sqrt{-q} [\mathcal{R} + 6(\partial\phi)^2 - \tilde{U}(\phi) - 8q^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \phi) (\tilde{\Lambda}^{-1})^\mu{}_\rho \partial_{[\beta} \tilde{\Lambda}^\rho{}_{\mu]}] \quad (20)$$

となる。ここで、 $\tilde{\Lambda}^\alpha{}_\mu = e^\phi \Lambda^\alpha{}_\mu, \tilde{U}(\phi) = e^{-4\phi} U(\phi)$ である。(20) 式を見ると、 $f(T)$ 理論の懸念点をみて取ることが出来る。それは、

- 作用第二項のスカラー場の運動項の符号が正
- $f(T)$ 理論は Local Lorentz 対称性を破る。

である。一つ目は、運動項が正なのでゴーストスカラー場となり、エネルギー条件を破ることになるので、 $f(T)$ 理論が正常であるためには、第四項によって、ゴーストでなくなって欲しいことになる。また、二つ目は、そもそも (15) 式のような接続では Torsion が Local Lorentz 対称性を破ってしまうことに起因している。

4.2 $f(G)$ 理論

metric TEGR の $Q = 0$ の条件を取り除いた一般的な理論である GTEGR の非線形拡張である。teleparallel スカラーは (15) 式そのものを用いて考えると、 $f(T)$ 理論と同様の計算を行えば、作用は、

$$S = \frac{1}{2} M_{\text{pl}}^2 \int d^4x \sqrt{-q} [\mathcal{R} + 6(\partial\phi)^2 - \tilde{U}(\phi) - 2\{ (q^{\alpha\beta} q^{\mu\nu} - q^{\alpha\mu} q^{\beta\nu}) \tilde{\nabla}_\beta q_{\mu\nu} + \frac{2\tilde{T}^\alpha}{f(T)\text{theory}} \} \partial_\alpha \phi] \quad (21)$$

のようになる。この式は、 $f(Q), f(T)$ 理論による特別な寄与が両方とも含まれている。

5 Minkowski 時空周りでの摂動

5.1 $f(T)$ 理論の場合

$f(T)$ 理論が正常な理論であるか見るために、ここでは Minkowski 時空周りで摂動をして考えていく。今、

$$q_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (22)$$

$$\phi = \phi_0 + \pi \quad (23)$$

$$\tilde{\Lambda}^\alpha{}_\mu = \delta^\alpha{}_\mu + \lambda^\alpha{}_\mu \quad (24)$$

と摂動をする。ここで、 ϕ_0 は Minkowski background でのスカラー場の値で Const である。摂動の二次まで考慮すると二次の項のみをまとめた部分は、

$$S^{(2)} = \int d^4x \left[\mathcal{L}_{\text{GR}}(h) + 3(\partial\pi)^2 - \frac{1}{2}m_\pi^2\pi^2 - (\partial^\alpha h - \partial_\beta h^{\alpha\beta})(\partial_\alpha \pi) \right] \quad (25)$$

と求められる。ここで、 $\mathcal{L}_{\text{GR}}(h)$ は Fierz-Pauli 作用、 $m_\pi^2 = \frac{1}{2}M_{\text{pl}}^2 U''(\phi_0)$ である。摂動の二次では、 $R = 0$ という条件から自発的に破れていた Local Lorentz 対称性が回復する。さらに、場の再定義 $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + 2\pi\eta_{\mu\nu}$ を行うことによって、最終的に $S^{(2)}$ は、

$$S^{(2)} = \int d^4x \left(\mathcal{L}_{\text{GR}}(h) - \frac{1}{2}m_\pi^2\pi^2 \right) \quad (26)$$

となり、スカラー場の運動項が作用から消去されることによって自由度で無くなるのがわかる。従って、 $f(T)$ 理論は、少なくとも Minkowski 時空周りの運動方程式の線形の範囲では、GR と等価な massless-spin2 の自由度を持つという結果が得られる。

5.2 $f(G)$ 理論の場合

$f(G)$ 理論で同様に摂動を行った場合について考える。Minkowski 時空周りで摂動を施し、 $S^{(2)}$ を取り出すと、

$$S^{(2)} = \int d^4x \left[\mathcal{L}_{\text{GR}}(h) + 3(\partial\pi)^2 - \frac{1}{2}m_\pi^2\pi^2 - (\partial^\alpha h - \partial_\beta h^{\alpha\beta})(\partial_\alpha \pi) - 2\partial_\beta \lambda^{[\alpha\beta]} \partial_\alpha \pi \right] \quad (27)$$

となる。ここから、 $f(T)$ 理論と同様に場の再定義を行えば、最終的に $f(T)$ 理論と同じ massless-spin2 のみの自由度を持つという結果に帰着することがわかる。

6 Conclusion and Discussion

TEGR や GTEGR は GR と等価な理論とであるが、これら理論を非線形に拡張した $f(T)$, $f(G)$ 理論では一般に等価な理論となるかは非自明であったので、この非線形理論がどのような性質を持つのかを

調べた。結果としては、理論全体では破れてしまう一般座標変換による対称性や Local Lorentz 対称性が運動方程式の線形の範囲で摂動を施すと回復する。これによって Minkowski 時空周りでは少なくとも、GR と同じ massless-spin2 のみ自由度として持つという結果を得ることができた。よって、低次の寄与が優勢となる低エネルギー領域では GR になることがわかった。しかし、より高次の項が寄与してくる高エネルギー領域の話や、具体的な宇宙論の話などについてはここでは言及できなかったため、これ以降の研究ではこれらのより発展的な内容について取り組んでいきたいと思う。

Acknowledgement

今回、発表の機会を設けていただいた天文・天体物理夏の学校関係者の皆様にここで深く御礼申し上げます。また、今回の研究について多くの時間を作っていただいた立教大学理論物理学研究室宇宙グループの皆様、特に同じく立教大学理論研の池田さんにはたくさんの議論やアドバイスの数々、心から感謝申し上げます。

Reference

- [1] J. B. Jiménez and T. S. Koivisto, Universe **7**, no.5, 143 (2021) doi:10.3390/universe7050143 [arXiv:2104.05566 [gr-qc]].
- [2] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, doi:10.1007/978-94-007-5143-9
- [3] S. Bahamonde, K. F. Dialektopoulos, C. Escamilla-Rivera, G. Farrugia, V. Gakis, M. Hendry, M. Hohmann, J. L. Said, J. Mifsud and E. Di Valentino, [arXiv:2106.13793 [gr-qc]].
- [4] J. B. Jiménez, L. Heisenberg and T. S. Koivisto, Universe **5**, no.7, 173 (2019) doi:10.3390/universe5070173 [arXiv:1903.06830 [hep-th]].

[indexへ戻る](#)

重宇 poster4

静的な二体ブラックホール時空中の円軌道の解析

大阪市立大学 理学研究科数物系専攻

田村 悠陽

静的な二体ブラックホール時空中の null 円軌道の解析

田村 悠陽 (大阪市立大学大学院 宇宙物理・重力研究室 修士 1 年)

Abstract

力波による天体の観測が可能になってから、一つの天文学的な観測対象に対して複数の信号で観測することが非常に重要となっている。重力波により観測された連星ブラックホールの合体は、連星ブラックホールが宇宙の中に存在することを示唆したが、ブラックホールの定義より、ブラックホールそのものの電磁波による観測は困難である。

本研究では K.Nakashi and T.Igata(2019) の論文をもとに、アインシュタイン方程式の特殊な厳密解である静的な最大電荷の二体ブラックホール解を用いて、等質量の連星ブラックホール時空を表す計量を構築し、その時空中の null 測地線を解析した。

連星ブラックホール間の null 円軌道の安定性について解析し、それらの円軌道がブラックホール間の距離によってどのように変化するかを調べた。

1 静的な二体ブラックホール時空の計量

質量と同じ大きさの電荷を持つ二つのブラックホールが時空中 $z = a, -a$ に存在するとき、計量とベクトルポテンシャル A_μ は K.Nakashi and T.Igata(2019) の論文より以下で与えられる。

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\frac{dt^2}{U^2} + U^2(d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2)$$

$$A_\mu dx^\mu = U^{-1} dt$$

$$U(\rho, z) = 1 + \frac{M_+}{\sqrt{\rho^2 + (z - \rho)^2}} + \frac{M_-}{\sqrt{\rho^2 + (z + a)^2}}$$

これより、測地線のラグランジアン \mathcal{L} は、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} \left[-\frac{\dot{t}^2}{U^2} + U^2 (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) \right].$$

また、静的かつ軸対称なのでエネルギー E および角運動量 L は測地線に沿って保存するので、

$$E = \frac{\dot{t}^2}{U^2}, \quad L = \rho^2 U^2 \dot{\phi}$$

は定数である。故に、null 条件 $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$ より、有効ポテンシャル V が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + V &= E \\ V(\rho, z; L^2) &= \frac{L^2}{\rho^2 U^4} \end{aligned} \quad (1)$$

2 $z = 0$ 面での null 測地線

(1) 式より、測地線が円軌道になるための条件 $\dot{\rho} = \dot{z} = 0$ を課すと、

$$V_{,z} = 0, \quad V_{,\rho} = 0.$$

これより、

$$U_{,z} = 0, \quad U + 2\rho U_{,\rho} = 0$$

を得る。ここで簡単のため $M_\pm = M$ とし、また、 $z \neq 0$ の領域は Reissner による不安定な円軌道しかないので $z = 0$ の面にのみついて考えることとする。

$U_{,z} = 0$ の条件からは $z = 0$ しか得られないので、

$U + 2\rho U_{,\rho} = 0$ の条件を $z = 0$ で計算すると,

$$(\rho^2 + a^2)^{3/2} + 2M(a^2 - \rho^2) = 0$$

これを解くと, $0 \leq a \leq \sqrt{8/27M}$ (2) のときに

$$\rho_1 = \sqrt{\left(\frac{4M}{3} \cos\left(\cos^{-1}\left(1 - \frac{27a^2}{4M^2}\right)/3\right)\right)^2 - a^2}$$

$$\rho_2 = \sqrt{\left(\frac{4M}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \cos^{-1}\left(1 - \frac{27a^2}{4M^2}\right)/3\right)\right)^2 - a^2}$$

が解をもつ.

3 測地線の解析

前節で得られた解の安定性を評価する. $z = 0$ のとき (1) より, $\frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \rho} = 0$ である.

有効ポテンシャルの z 二階微分に関しては,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(z=0) \propto -2a^2 + \rho^2$$

より, $\rho > \sqrt{2}a$ (3) で $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(z=0) > 0$ より, null 測地線の円軌道が安定となる.

ρ 方向の安定性について, 有効ポテンシャルを $z = 0$ かつ適当な a での概図を書くと,

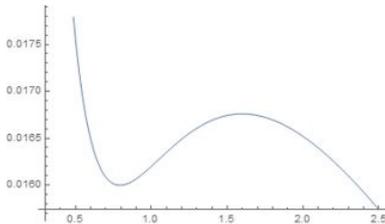


図 1: $z = 0$ かつ適当な a での有効ポテンシャルの概図

故に前節で得た解 ρ_1, ρ_2 の内, より小さい ρ_2 の解が安定な円軌道を表していることが分かる.

ここで, (2),(3) および ρ_1, ρ_2 より null 測地線が安定な円軌道となるための a の条件は図 2 より,

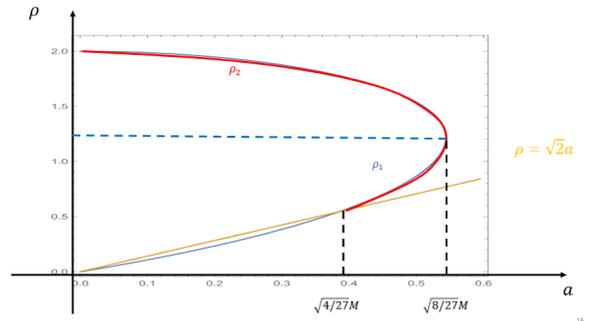


図 2: null 測地線が安定な円軌道となるための a の条件

故に, $\sqrt{4/27M} \leq a \leq \sqrt{8/27M}$ の時に安定な null 円軌道が存在する.

4 まとめ

ブラックホールが二体存在すると $\sqrt{4/27M} \leq a \leq \sqrt{8/27M}$ の時に安定な null 円軌道が存在することが分かった.

Reference

K.Nakashi and T.Igata 2019, DOI: 10.1103/Phys-RevD.99.124033

重宇 poster5

ゴーストスカラー場を用いたワームホールの安定性
解析

立教大学 理学研究科物理学専攻
加藤 翠

ゴーストスカラー場を用いたワームホールの安定性解析

加藤 翠 (立教大学大学院 理学研究科)

Abstract

一般相対論は重力波やブラックホールの存在、初期宇宙のビッグバンといった現代宇宙物理学の主流となる研究対象を多数導いてきた。中でも一般相対論の予言の一つとして、ワームホール解が挙げられる。ワームホールとは、ある時空と別の時空がスロートと呼ばれる部分で結合された時空構造を指す。今回はそのようなワームホール時空の簡単なモデルを用いて、摂動に対する安定性について議論する。安定性はワームホールの観測可能性を議論する上で重要な要素である。不安定なワームホールの場合、摂動の時間発展によってスロートが大きく変形し、ワームホールの崩壊を導くことになる。そこで今回はゴーストスカラー場を用いた静的球対称ワームホール解に線形摂動を加え、その時間発展を追うことでワームホール時空の安定性に関する結論を導く。

1 Introduction

ワームホールの時空構造を図1に示す。ワームホールの存在は一般相対論によって予言されているが、現実的に存在しうるのかは未だ分かっていない。実際にワームホール時空の構築を目指す、エキゾチック物質の存在が大きな課題となっていることがわかる。しかしワームホール時空の構築は星間旅行やタイムマシンといった興味深い物理学を実現するための鍵となっており、その研究に注目が集まっている。そこでワームホール時空の存在について安定性という視点から議論しようと思う。安定した時空のみが現実的に存在する可能性を持つので、ワームホールの観測可能性を議論する上で重要な要素である。今回レビューする [1] では、ゴーストスカラー場を用いた静的球対称なワームホールの線形安定性について議論し、ワームホール時空の存在可能性を模索する。

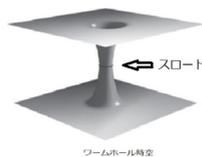


図 1: ワームホール時空の概念図

2 ゴーストスカラー場を用いた静的球対称ワームホール解

無質量ゴーストスカラー場と最小結合した重力場を考える。このとき作用は次式で与えられる。

$$S[g, \Phi] = \frac{1}{16\pi G} \int (-R + \kappa \nabla^\mu \Phi \nabla_\mu \Phi) d^4x,$$

$$\kappa = -8\pi G < 0$$

作用を変分することで場の方程式

$$R_{\mu\nu} = \kappa \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi, \quad 0 = \nabla^\mu \nabla_\mu \Phi$$

が得られる。また、静的球対称メトリックを次のように仮定する。

$$g = -e^{2d} dt^2 + e^{2a} dx^2 + e^{2c} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (x \in \mathbb{R})$$

ここでメトリックおよびスカラー場は x のみに依存する関数である。場の方程式にメトリックを代入し静的球対称ワームホール解を求めると、

$$g = -e^{2\gamma_1 \arctan(x)} dt^2 + e^{-2\gamma_1 \arctan(x)} [dx^2 + (x^2 + 1)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

$$\Phi = \Phi_1 \arctan(x) \quad (\gamma_1 \geq 0)$$

を得る。ここで、 γ_1 は積分定数であるが、物理量と関連づけることができる。そのためにワームホール時空の面積半径と ADM mass に注目する。面積半径は定義から、

$$r = e^c = \sqrt{1 + x^2} e^{-\gamma_1 \arctan(x)}$$

で与えられる。 $r(x)$ は $x = x_{throat} = \gamma_1$ で最小値を持ち、 $r(x_{throat}) = r_{min}$ をワームホール時空のスロート半径と呼ぶ。また Misner-Sharp mass を $m(x)$ とすると、ADM mass は、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} m(x)$ で与えられ、それぞれ $m(\infty) = \gamma_1 \exp(-\gamma_1 \pi/2)$ 、 $m(-\infty) = -\gamma_1 \exp(\gamma_1 \pi/2)$ となる。特に $\gamma_1 = 0$ となる時空を massless ワームホール時空と呼ぶ。以上のことから、パラメータ γ_1 はワームホール時空のスロート半径と ADM mass を決定する量であることがわかる。

3 線形安定性解析

先に導いた静的球対称ワームホール時空に線形摂動を加え、その時間発展を考える。摂動の時間発展を記述する式（マスター方程式）は場の方程式を線形化することによって得られる。ここで、スカラー場およびメトリックに対して以下の摂動を与える。

$$\Phi(\lambda) = \Phi + \lambda \delta \Phi$$

$$g = -e^{2(d+\lambda\delta d)} dt^2 + e^{2(a+\lambda\delta a)} dx^2 + e^{2(c+\lambda\delta c)} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

球対称重力場には動的自由度が存在しないため、線形摂動の時間発展は $\delta \Phi$ の単一のマスター方程式で記述出来る。マスター方程式を導出するために、以下のようなゲージ不変量を定義する。

$$\Psi = e^c (\delta \Phi - \frac{\Phi_x}{c_x} \delta c)$$

Ψ の時間発展を解くことで線形摂動に対する時空の安定性を考察する。線型化された場の方程式からマスター方程式

$$\Psi_{tt} - e^{d-a} \partial_x (e^{d-a} \Psi_x) + V(x) \Psi = 0$$

を得る。マスター方程式の形を見ると、Schrödinger 方程式と似た形をしていることが分かる。ポテンシャル $V(x)$ に静的球対称解を代入すると、

$$V(x) = \frac{e^{4\gamma_1 \arctan(x)}}{x^2 + 1} \left[1 - \frac{(x - \gamma_1)^2}{x^2 + 1} + \frac{2(1 + \gamma_1^2)}{(x - \gamma_1)^2} \right]$$

を得る。上式からポテンシャル $V(x)$ は $x = \gamma_1$ (スロート) で発散することが分かる。そのためマスター方程式はスロートにおいて Ψ が急速にゼロに減衰することを要請する。摂動の時間発展を記述する上でそのような要請を課すことに物理的な理由は存在しないため、次節では時空の至る所で正則となるマスター方程式を導く。

4 マスター方程式の変換

先に導いたマスター方程式を時空全体で正則となる方程式に変換する。 Ψ の定義に静的球対称解を代入することで次式を得る。

$$\Psi_0 = \frac{e^c}{x - \gamma_1} \left(1 + \frac{\gamma_1(1 + \gamma_1 x)}{1 + \gamma_1^2} \arctan(x) \right)$$

ここで Ψ_0 を用いて次の演算子を定義する。

$$A = \partial - \frac{\partial \Psi_0}{\Psi_0}, \quad \partial = e^{2\gamma_1 \arctan(x)} \partial_x$$

$A\Psi = \mathcal{X}$ とおくと、前節で導いたマスター方程式は次のように書き換えられる。

$$\mathcal{X}_{tt} - \partial^2 \mathcal{X} + W(x) \mathcal{X} = 0, \quad W(x) = -V(x) + 2 \left(\frac{\partial \Psi_0}{\Psi_0} \right)^2$$

新たに得られたポテンシャル $W(x)$ の概形を図 2 に示す。 $W(x)$ は時空全体で有限な値を持つため、返還後のマスター方程式は常に正則である。

ここで変換後のマスター方程式は変数分離型の解を与える。

$$\mathcal{X}(t, x) = e^{\beta t} \mathcal{X}_0(x)$$

境界条件から \mathcal{X}_0 は無限遠 ($x \rightarrow \pm\infty$) で指数関数的にゼロに減衰する。ここで $H = -\partial^2 + W$ と定義すると、 \mathcal{X} は H の固有状態となり、エネルギー固有値は $E_0 = -\beta^2$ で与えられることが分かる。次節ではエネルギー固有値を数値的に解くことで、 \mathcal{X} の時間発展が指数関数的に成長するモードを持つことを示す。(不安定モード)

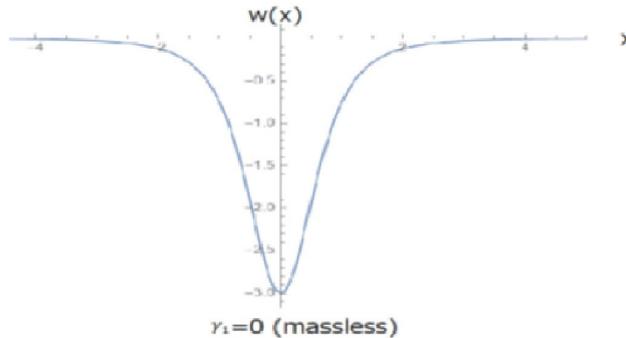


図 2: ポテンシャルの概形

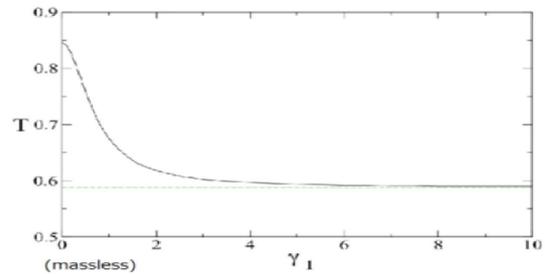


図 3: 解析結果

5 不安定モードの存在

H のエネルギー固有値 $E_0 = -\beta^2$ を数値的に計算し、 \mathcal{X} の不安定モードを導く。マスター方程式を書き下すと

$$H\mathcal{X} = [W(x) - \partial^2]\mathcal{X} = -\beta^2\mathcal{X}$$

である。ここでマスター方程式の解 \mathcal{X} が境界条件を満たすような β を見つける。マスター方程式の漸近解 ($x \rightarrow \infty$) から始めて、 $x \rightarrow -\infty$ に向かってマスター方程式を数値的に積分する。 $x \rightarrow \infty$ における漸近解は次式で与えられる。

$$\mathcal{X}(x) \approx e^{-\beta\rho(x)}, \quad \rho(x) = \int_0^x e^{-2\gamma_1 \arctan(y)} dy$$

漸近解を初期値としてマスター方程式を積分していき、 $x \rightarrow \pm\infty$ において \mathcal{X} がゼロに減衰するような β を求める。同様の計算を各 γ_1 の値に対して計算することで図 3 を得る。

図 3 中に記されている T は $T = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\beta}$ で与えられる。したがって全ての γ_1 の値に対して、 β は正の実数値をとることがわかる。このことから摂動量 $\mathcal{X}(t, x) = e^{\beta t}\mathcal{X}_0$ は時間発展とともに指数関数的に成長する不安定モードであることが確かめられた。この結果は線形摂動に対する静的球対称ワームホール時空の不安定性を意味する。

最後にワームホール時空の不安定性に関する時間ス

ケールについて議論する。ワームホールのスロートにおける固有時間はバックグラウンドの解を用いて $\tau = e^{\gamma \arctan(\gamma)}t$ と表される。一方、スロートの面積半径は定義から $r_{throat} = \sqrt{1+\gamma_1^2}e^{-\gamma_1 \arctan(\gamma_1)}$ で与えられる。よって不安定性に関連する時間スケール $\tau_{unstable}$ は、 $\tau_{unstable} = e^{\gamma_1 \arctan(\gamma_1)}/t_{unstable}$ を用いて

$$\tau_{unstable} = \frac{e^{2\gamma_1 \arctan(\gamma_1)}r_{throat}}{\sqrt{1+\gamma_1^2}\beta}$$

で与えられる。 $(T = \frac{\tau_{unstable}}{r_{throat}})$

ここで図 3 の結果を用いると $\gamma_1 = 10$ のとき、 $\tau_{unstable} \approx 1.97 \times (r_{throat}/km)\mu s$ を得る。これは数 km のスロート半径を持つワームホールが μs の時間スケールで崩壊することを意味する。

6 Conclusion

[1] ではゴーストスカラー場を用いた静的球対称ワームホール時空の線形安定性について考察した。線形摂動を加えることで解が時間発展とともに指数関数的に成長する不安定モードを持つことが分かった。これは静的球対称ワームホールが線形摂動に対して不安定であることを意味する。また数値計算の結果から線形摂動に対するワームホール時空の不安定性に関する時間スケールを評価することができ、線形摂動によってワームホールのスロートが宇宙年齢

よりもはるかに短い時間スケールで崩壊することが確かめられた。今後の展望としては [1] で想定したモデルとは別のワームホールモデルとして回転ワームホールに注目し、線形摂動に対する安定性を考察していこうと考えている。

Acknowledgement

今回の発表の機会を与えてくださった夏の学校運営スタッフの皆様、御支援くださった方々に深く感謝いたします。また、本研究に関して多くの時間を割いて下さった宇宙理論研究室の院生ゼミの皆さんに対してこの場を借りてお礼申し上げます。

Reference

- [1] J.A.Gonzalez, F.S.Guzman, & O.Sarbach, Class. Quant. Grav. 26, 015010 (2009)

重宇 poster6

CMB観測を説明する Quartic Hilltop Inflation モデルの 研究

名古屋大学 理学研究科素粒子宇宙物理学専攻
乾 玲冬

CMB 観測と整合する Quartic Hilltop Inflation の研究

乾 玲冬 (名古屋大学大学院 理学研究科)

Abstract

ヒルトップインフレーションは最も成功したインフレーションモデルの一つである。特に、4 次のヒルトップインフレーションの数値計算結果は観測結果と整合性があり注目されている。一方で、本モデルの解析解は数値計算の結果と異なる挙動を示していた。[2] そこで本発表では本モデルの解析解を再構築する。そして、この新たな解析解による予言が数値計算結果と一致していることを確認すると共に、従来解と数値計算が異なる挙動を示す要因について言及する。本発表内容は [2] のレビューである。

1 Introduction

ビッグバン宇宙論は地平線問題や平坦性問題等の諸問題を内包しているが、これらを解決する理論としてインフレーション理論が有力視されている。この理論では、宇宙最初期において、宇宙が加速膨張したとされている。インフレーションを引き起こす最も単純な機構は、インフラトンと呼ばれる単一のスカラー場 ϕ によって記述される。単一のスカラー場によって記述されるインフレーションモデルは数多く存在するが、それらは観測結果と整合性がなければならぬ。代表的な観測結果としてプランクによる宇宙マイクロ背景放射 (CMB) の観測結果があり、スペクトル指数 n_s とテンソル・スカラー比 r に制限が課されている。CMB の観測的制限を上手く説明できるモデルに、ポテンシャルの勾配が十分緩やかで、インフラトンがゆっくりとポテンシャルを転がり落ちる「スローロール・インフレーション」がある。本発表では、スローロール・インフレーションモデルの中でも、ポテンシャルが $V = V_0 \left[1 - \lambda \left(\frac{\phi}{m_p} \right)^q \right] \dots$ で記述されるヒルトップ・インフレーションに注目する。特に、 $q=4$ とした場合の数値計算結果は観測結果と整合性があり注目されている。(図 1) 一方で、従来の解析解は $\lambda \gg 1$ の範囲のみを対象としていたため、 λ が任意の値をとる数値計算とは異なる結果を示していた。[2] そこで本発表では λ の範囲を見直し本モデルの解析解を再構築する。そして、この新たな解析解による予言が数値計算結果と一致していることを確認する。

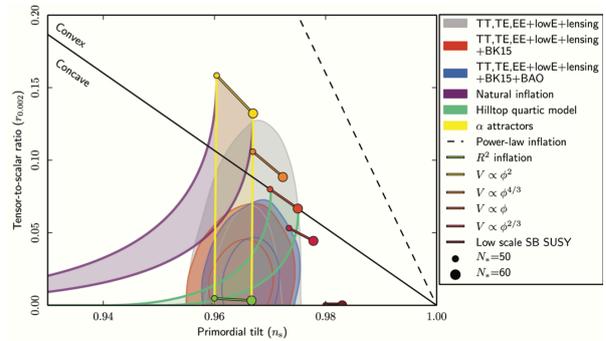


図 1: Planck 2018 : 緑色の線で囲まれた部分はヒルトップ・インフレーションの数値計算による予測

2 理論

2.1 ヒルトップ・インフレーション

ここでは従来の解析解について説明する。ヒルトップ・インフレーションのポテンシャルは式 (1) で与えられる。

$$V = V_0 \left[1 - \lambda \left(\frac{\phi}{m_p} \right)^q \right] + \dots \quad (1)$$

ここで、 V_0 は定数、 λ はパラメータ、 $m_p = (8\pi G)^{-1/2}$ はプランク質量、 q は正の整数である。また、スローロール・インフレーションにおいて、スペクトル指数 n_s は式 (2) で与えられる。

$$n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta \quad (2)$$

ここで、 ϵ, η は $V' = \frac{dV}{d\phi}$, $V'' = \frac{d^2V}{d\phi^2}$ として

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2} m_p^2 \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad (3)$$

$$\eta \equiv m_p^2 \frac{V''}{V} \quad (4)$$

で定義される。

$\lambda \gg 1$ の場合、式 (2) を用いてスペクトル指数 n_s を計算すると、式 (5) となる。

$$n_s = 1 - 2 \left(\frac{q-1}{q-2} \right) \frac{1}{N} \quad (5)$$

ここで、 N は膨張指数であり式 (6) のように表される。

$$N = \frac{1}{m_p} \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi(N)} \frac{V}{V'} d\phi \quad (6)$$

$\phi(N)$ はインフレーション中のインフラトンの値であり、 ϕ_{end} はインフレーション終了時のインフラトンの値である。

式 (5) は $q = 4$ の時

$$n_s = 1 - \frac{3}{N} \quad (7)$$

式 (7) で $N = 60$ とすると、 $n_s = 0.95$ となり、これは観測による制限 $n_s \gtrsim 0.96$ を満たしていない。また、 $n_s \gtrsim 0.96$ となるのは $N \gtrsim 75$ の時である。インフラトンの運動エネルギーが支配的になるとき、インフレーションが終了する。この期間で、 N のとりうる最大値は $N = 71$ である。[3] したがって、 $N \gtrsim 75$ という値は大き過ぎるので不適切である。

2.2 解析解の再構築

観測量は膨張指数で表せるので、ここではまず最初に膨張指数を計算し、その後にスペクトル指数 n_s 、テンソル・スラー比 r を計算する。

2.2.1 膨張指数

準備として V', V'' を計算する。

$$V' = -4\lambda \frac{V_0}{m_p} \left(\frac{\phi}{m_p} \right)^3, V'' = -12\lambda \frac{V_0}{m_p^2} \left(\frac{\phi}{m_p} \right)^2$$

式 (6) に代入して

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{8\lambda} \left[\left(\frac{\phi(N)}{m_p} \right)^{-2} + \lambda \left(\frac{\phi(N)}{m_p} \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{8\lambda} \left[\left(\frac{\phi_{\text{end}}}{m_p} \right)^{-2} + \lambda \left(\frac{\phi_{\text{end}}}{m_p} \right)^2 \right] \\ &= \bar{N} - N_{\text{end}} \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 \bar{N}, N_{end} は以下のように定義した

$$\begin{aligned} \bar{N} &\equiv \frac{1}{8\lambda} \left[\left(\frac{\phi(N)}{m_p} \right)^{-2} + \lambda \left(\frac{\phi(N)}{m_p} \right)^2 \right] \\ N_{\text{end}} &\equiv \frac{1}{8\lambda} \left[\left(\frac{\phi_{\text{end}}}{m_p} \right)^{-2} + \lambda \left(\frac{\phi_{\text{end}}}{m_p} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (9)$$

つまり、 \bar{N} はインフレーション中の任意の時刻の膨張指数であり、 N_{end} はインフレーション終了時点の膨張指数である。

次に、 N_{end} の具体的な表式を計算する。

スロー・ロールパラメータは定義式 (3),(4) より

$$\epsilon = \frac{8\lambda^2 \left(\frac{\phi}{m_p} \right)^6}{\left[1 - \lambda \left(\frac{\phi}{m_p} \right)^4 \right]^2} \quad (10)$$

$$\eta = \frac{-12\lambda \left(\frac{\phi}{m_p} \right)^2}{1 - \lambda \left(\frac{\phi}{m_p} \right)^4} \quad (11)$$

インフレーション終了時の条件

$$|\eta(\phi_{\text{end}})| = 1, \epsilon(\phi_{\text{end}}) = 1$$

と式 (10), (11) より ϕ_{end} を求め、式 (9) に代入して N_{end} を求める。

・ $|\eta(\phi_{\text{end}})| = 1$ のとき

$$\left| \frac{-12\lambda \left(\frac{\phi}{m_p} \right)^2}{1 - \lambda \left(\frac{\phi}{m_p} \right)^4} \right| = 1$$

これを解いて

$$\left(\frac{\phi_{\text{end}}}{m_p}\right)^2 = 6 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{36\lambda}} - 1 \right) \quad (12)$$

式 (9) に代入して

$$N_{\text{end}} = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} & (\lambda \ll 1) \\ \frac{3}{2} & (\lambda \gg 1) \end{cases} \quad (13)$$

・ $\epsilon(\phi_{\text{end}}) = 1$ のとき

$$\frac{8\lambda^2 \left(\frac{\phi}{m_p}\right)^6}{\left[1 - \lambda \left(\frac{\phi}{m_p}\right)^4\right]^2} = 1 \quad (14)$$

これを解いて

$$\left[\left(\frac{\phi_{\text{end}}}{m_p}\right) + 2\sqrt{2} \right] \left(\frac{\phi_{\text{end}}}{m_p}\right)^3 = \frac{1}{\lambda} \quad (15)$$

これは解析的に解けないが、 λ の極限をとり解を求めることはできるので

$$\left(\frac{\phi_{\text{end}}}{m_p}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (\lambda \ll 1) \quad (16)$$

$$\left(\frac{\phi_{\text{end}}}{m_p}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}\lambda} \quad (\lambda \gg 1) \quad (17)$$

ただし、式 (17) の導出において、 $\lambda \gg 1$ で $\phi_{\text{end}} \ll m_p$ となることを用いた。

式 (9) に代入して

$$N_{\text{end}} = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} & (\lambda \ll 1) \\ \frac{1}{4\lambda^{1/3}} & (\lambda \gg 1) \end{cases} \quad (18)$$

2.1 より $\lambda \gg 1$ の場合は不適切なので、 $\lambda \ll 1$ の場合のみ考えるといずれの条件でも $N_{\text{end}} = \frac{1}{4\sqrt{\lambda}}$ である。

この結果を式 (8) に代入して

$$\bar{N} = N + \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \quad (19)$$

ここで、 N_{end} の効果について少し触れておく。

$\lambda \gg 1$ の時、式 (13), (18) より N_{end} は無視できるほど小さくなる。この時、 $N = \bar{N} - N_{\text{end}} \simeq \bar{N}$ となる

から、観測による制限 $n_s \gtrsim 0.96$ を満たすのに必要な N の値が $N \gtrsim 75$ と大きくなる。

それに対し、 $\lambda \ll 1$ の時、 N_{end} は無視できなくなる。そのため必要な N の値は $\lambda \gg 1$ の時よりも小さくなる。

つまり、従来の解析解は常に N_{end} の値を無視していたために数値計算の結果と乖離していた。実際は λ の値によって N_{end} の寄与を考慮する必要がある。

2.2.2 観測量

まず始めにスペクトル指数 n_s を計算する。式 (2) に式 (3), (4) を代入し整理すると

$$n_s = 1 - \frac{3}{\bar{N}} \left(\frac{Z}{Z-1} \right) \quad (20)$$

ただし、式 (20) の導出過程で

$$Z \equiv 16\lambda\bar{N}^2 \quad (21)$$

と置いた。

\bar{N} は式 (19) で表されるので、式 (20) は $\lambda \gg 1$ ($Z \gg 1$) の極限で式 (7) に一致する。

つまり、式 (20) は極限的に従来の解析解を含む形となっている。

また、式 (20) を Z について解いて式 (21) を用いると

$$16\lambda\bar{N}^2 = \frac{\bar{N}(1-n_s)}{\bar{N}(1-n_s)-3} \quad (22)$$

更に、式 (22) に式 (19) を代入して λ について解くと

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2(1-n_s)\bar{N}-3}{4\bar{N}[3-(1-n_s)\bar{N}]} \quad (23)$$

式 (23) において、 $N = 50 - 60$ の範囲でスペクトル指数 n_s の観測値 $n_s = 0.965 \pm 0.004$ を満たすとすると、 λ の範囲は $0 < \lambda \lesssim 10^{-4}$ となる。

次にテンソル・スカラー比 r を計算する。

テンソル・スカラー比はスローロールパラメータを用いて

$$r = 16\epsilon$$

と表され、式 (3) を代入して、式 (8)、式 (20) を用いて整理すると

$$r = \frac{8}{3}(1 - n_s) \left[1 - \frac{\sqrt{3[2(1 - n_s)N - 3]}}{(1 - n_s)N} \right] \quad (24)$$

3 Results

式 (24) をプロットした結果を図 2 に示す。

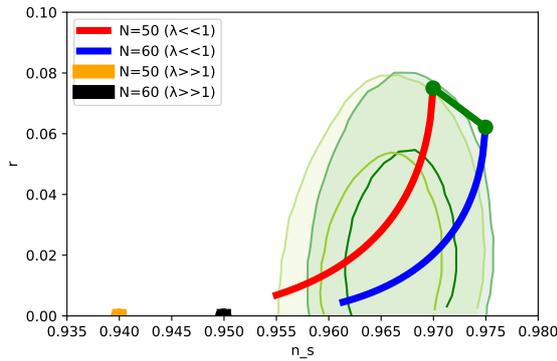


図 2: 式 (24) の Planck 2018 との比較

緑色の 2 点を結ぶ線分は Linear Inflation ($V \propto \phi$) の予測である。

式 (24) は $\lambda \ll 1$ の時、数値計算結果とよく一致する。

具体的な値を挙げると、 $N = 60$, $n_s = 0.965$ の時、 $r = 0.0446$ である。

4 Conclusion

本発表では、ヒルトップ・インフレーションの新たな解析解を示し、従来の解析解が数値計算と異なる挙動を示す原因を考察した。従来の解析解は $\lambda \gg 1$ の範囲を対象としていたため、膨張指数の計算に N_{end} が関与しなかった。しかし、 λ の値によっては N_{end} の影響が無視出来なくなる。特に、 $\lambda \ll 1$ の範囲で N_{end} の寄与を考慮することで、数値計算と一致する結果が得られる。

Acknowledgement

本発表に関しまして、ご指導いただきました宇宙論研究室の皆様には厚く感謝申し上げます。お忙しい中、議論や御助言に貴重なお時間を割いていただきまして、誠にありがとうございました。また、夏の学校の企画運営をしてくださった方々へこの場を借りて深く感謝申し上げます。

Reference

- [1] Y. Akrami et al.[Planck], arXiv:1807.06211, astro-ph.CO
- [2] Konstantinos Dimopoulos, "An analytic treatment of quartic hilltop inflation", Physics Letters B
- [3] DAVID H. LYTH , ANDREW R.LIDDLE, "THE PRIMORDIAL DENSITY PERTURBATION", CAMBRIDGE

重宇 poster7

チェレンコフ放射状の重力波探索

東京大学 理学系研究科物理学専攻

桑原 聡一郎

Searching Cherenkov-like Gravitational Waves

Soichiro Kuwahara (University of Tokyo M2)

Abstract

Searching for gravitational waves whose waveform is similar to Cherenkov radiation. We assume that the gravitational waves are generated when a point mass moves faster than speed of light in similar scheme of Cherenkov radiation and shock wave generation. The code to generate waveform whose spectrum is Cherenkov-like one is constructed, and the analysis will be done by the method of Matched Filtering. To perform this analysis, Gstremaer pipeline is being used.

1 Introduction

There are four types of gravitational wave which is expected to be observed. One of them is "Burst" gravitational wave. Burst gravitational wave is generally produced in short period of time and its source is unknown or anticipated. In this research, the attempt is to find the gravitational wave which has similar waveform of Cherenkov radiation assuming that such waveform might be created when a point mass moves faster than speed of light. If a mass moves faster than not only the speed of light in medium but also the speed of light in vacuum, it will be a suggestion to deny constancy of speed of light and leads to Lorentz violation. Since there is no concrete system of generating gravitational waves under Lorentz violation, we here only "expect" Cherenkov-like wave might occur.

2 Methods

1. Write a code to create Cherenkov-like waveform.

First, let us check the spectrum of Cherenkov radiation.

$$\frac{dW}{dx d\omega} = \frac{e^2}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} \right) \omega, n\beta > 1 \quad (1)$$

n ... index of refraction, $\beta = \frac{v}{c}$... rate of velocity of a particle versus speed of light in vacuum
This formula is developed by Frank and Tamm in 1937. [Frank & Tamm (1937)]

- From this formula, we can estimate the spectrum of Cherenkov-like waves and it will give us the waveform in frequency domain.

- Using inverse Fourier transformation, create the wave form in time domain.
- Crucial feature is
 - (a) the power spectrum is mostly proportional to ω
 - (b) it has high frequency cut off

The created waveform and its spectrum is given below. The point of making this waveform is

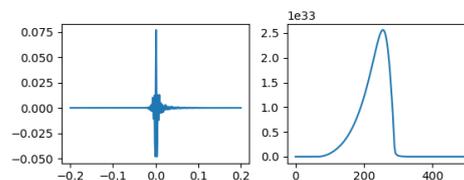


Figure 1: GW waveform and its spectrum

- When the spectrum includes lower and lower frequency, the effect of low frequency appears in the waveform. If we have the lowest frequency 0, the waveform goes wrong. Thus, we set the low frequency cut off as well.
- Cherenkov Radiation-like wave must be time-causal. It is hard to make completely time causal waveform from frequency domain. Hence, the window function in the region of $t < 0$ until convolution changes spectrum too much is injected.
- The parameter to create this waveform is
 - (a) high frequency cut off
 - (b) velocity versus light of speed rate β

2. Create a template bank to perform "Matched Filtering"

In GW data analysis, there are two obvious hypothesis on what we would get as data.[Schutz (1987)]

- noise only
- noise+signal

Then, what will be the criteria to determine whether we have signal or not must be given. In this research, Neyman-Pearson criterion is introduced.

$$\Lambda(\theta) = \frac{P(\theta|\text{signal})}{P(\theta|\text{no signal})} \quad (2)$$

where θ is data. Neyman-Pearson lemma states that this likelihood ratio given above is the most powerful test given a fixed false alarm probability.[Neyman & Pearson (1933)] Now, the calculation of $P(\theta|\text{signal}), P(\theta|\text{no signal})$ is needed. By performing fourier transformation and whitening the data, probability is given as below from Karhunen-Loève Theorem.

$$P(\theta|\text{signal}) = \prod_k \frac{1}{\sqrt{2\pi S_k}} \exp -\frac{\tilde{x}_k^2}{2S_k} \quad (3)$$

$$P(\theta|\text{no signal}) = \prod_k \frac{1}{\sqrt{2\pi S_k}} \exp -\frac{(\tilde{x}_k - \tilde{s}_k)^2}{2S_k} \quad (4)$$

However, this only gives the likelihood ration on only one signal. As stated in introduction, burst search is to search gravitational waves from unkonwn sources. We do not know what the value of parameters, and even the existence of such waves. Hence, the calculation of likelihood ratio on many wave templates with several input parameters is necessary. This set of templates is generally called as "template bank".

3. Use Gstreamer for creating a pipeline of this analysis

The general use of Gstreamer is to process complex workflows of audio and video. In this research, we utilize Gstreamer for gravitational wave data analysis. There are many complex steps on GW data analysis such as whitening the data, creating multiple templates, and calculating signal to noise ratio, etc. Gstreamer is capable to perform those analysis with low-latency processing of data.

3 Future Works

Currently, this research reaches to the stage of creating pipeline for performing the analysis by matched filtering. The improvements which was emerged at this point is mainly two things.

1. time causality of waveform
2. how to spread templates

First, as is mentioned in methods section, time causality is not perfectly achieved. To create complete time causal waveform, phase spectrum is necessary. Collecting the phase spectrum of Cherenkov radiation as a real data and inject it to create waveform might solve this problem.

Second, although number of templates are now being created, the way of spreading them is not ideal. Since the templates which are generated by constant intervals of input parameters are not spread uniformly in parameter space. Therefore, there is a possiblity to miss the signal if the signal is placed where the concentration of templates is low in parameter space. In order to avoid this, templates must be uniformly placed in parameter space. The closeness of two templates can be calculated by taking the inner product of these. Collecting the data of inner product of each two templates, and utilize it to create template bank which has enough density is expected.

Reference

- I.M. Frank & I.E. Tamm, Dokl. Akad. Nauk SSSR14,109 (1937)
- B.F.Schutz. Nato Asi, (1987)
- Neyman.J & Pearson.E.S. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. Volume 231. Issue 694-706(1933)

重宇 poster8

アクション暗黒物質によるナノヘルツ帯の重力波の
痕跡

福島大学 共生システム理工学研究科
村越 悠太

アクシオン暗黒物質によるナノヘルツ帯の重力波の痕跡

村越 悠太 (福島大学大学院 共生システム理工学研究科)

Abstract

アクシオンは強い CP 問題を解決するために導入された未知の素粒子で、暗黒物質の候補としても考えられている。ハッブルパラメータがアクシオンの質量に匹敵するようになると、ゼロ以外の初期のずれを持つアクシオンが振動し始め、暗黒物質として振る舞う。振動の開始前後で、U(1) ゲージ場はアクシオンとの結合によって爆発的に生成され、かなりの量の確率的重力波の放出につながる。このゲージ場の爆発的な生成により、すぐに線形解析の適用が難しくなるため、非線形な解析が必要になる。本研究は、数値格子シミュレーションを利用して、重力波の放出に重要な貢献をする逆反応や再散乱などの非線形ダイナミクスを適切に追跡する。正しい暗黒物質の存在量を与える減衰定数 $f \sim 10^{16}$ GeV のアクシオンは、次世代電波望遠鏡 SKA によって検出可能と考えられるナノヘルツ帯の重力波を生成することや、結果として得られる重力波スペクトルが、アメリカとカナダの研究グループ NANOGrav の 12.5 年分のデータによる、過去のアクシオン密度を大幅に低減する必要がある問題を説明する可能性があることも紹介する。

1 Introduction

宇宙論的な観測は、暗黒物質として知られている目に見えない物質の存在を明らかにした。アクシオンは強い CP 問題を解決するために導入された未知の素粒子で、暗黒物質の候補としても考えられているが、識別のために固有の特徴を探る必要がある。PPT や、NANOGrav, EPTA などのパルサータイミング観測を通じた、ナノヘルツ帯の重力波の測定からアクシオン暗黒物質を発見できる可能性を探る。ハッブルパラメータがアクシオンの質量に匹敵するようになると、ゼロ以外の初期ミスアライメントを持つアクシオンが振動し始め、暗黒物質として振る舞う。振動の開始前後で、U(1) ゲージ場はアクシオンとの結合によって爆発的に生成され、かなりの量の確率的 GW の放出につながる。本研究では、ゲージ場とアクシオンの非線形ダイナミクスを適切に解く数値格子シミュレーションを実施し、暗黒物質の存在量を一貫して説明しながら、減衰定数 $f \sim 10^{16}$ GeV のアクシオンが SKA によって検出可能なナノヘルツ帯の重力波を生成できることを示す。

2 Methods/Instruments and Observations

アクシオン (ϕ) と質量のない U(1) ゲージ場 (A_μ) の相互作用システムについて考えると、ラグランジアン密度は次の式で与えられる。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{4f}\phi F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \quad (1)$$

ここで、 $F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は電磁場テンソル、 $\tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}/(2\sqrt{-g})$ は双対テンソルである。また g は計量の行列式で α は無次元の結合定数、 f はアクシオンの減衰定数である。アクシオンのポテンシャル $V(\phi)$ を考えると、

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[1 - \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) \right] \quad (2)$$

ここで、 Λ は動的なスケールで、アクシオンの質量 m と関連付けて $m = \Lambda^2/f$ とする。以下では、スケールファクター $a(t) \simeq t^{1/2}$ として輻射優勢期の平坦な FLW 宇宙を想定する。アクシオンの運動方程式は以下で与えられる。

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = -\partial\alpha 4f\phi F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \quad (3)$$

ここで、ハッブルパラメータ $H = \dot{a}/a$ を用い、点は時間微分を表す。 A_0 に関する作用の変化により、拘

東方程式が生成される。

$$\partial_i \dot{A}_i - \frac{\alpha}{fa} \epsilon_{ijk} \partial_i \phi \partial_j A_k = 0 \quad (4)$$

さらに、 A_i に関してゲージ場の発展方程式が導かれて、

$$\begin{aligned} \partial_j A_j + H \dot{A}_i - \frac{1}{a^2} \nabla^2 A_i + \frac{1}{a^2} \partial_i \partial_j A_j \\ = \frac{\alpha}{fa} \epsilon_{ijk} (\dot{\phi} \partial_j A_j - \partial_j \phi \dot{A}_k) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、時間ゲージ $A_0 = 0$ とした。アクシオンは、初期角度 $\theta_i = \phi_i/f$ でミスアライメントメカニズムによって均一に生成されると仮定し、これはインフレーション前またはインフレーション中とする。アクシオンとの相互作用はゲージ場を指数関数的に増幅する。アクシオンは標準模型の光子と相互作用することができるが、光子は荷電粒子で満たされた宇宙の熱有効質量を得る。これはハッブルパラメータ、つまり振動の開始時のアクシオン質量よりもはるかに大きい。その場合、ゲージ場での生産は運動学的に禁止される。したがって、ゲージ場はアクシオン振動の開始時に熱化されない隠れた光子であると仮定する。指数関数的成長を確認するために、ゲージ場のフーリエモードを 2 つの円偏光モードに分解すると、以下の式が示される。

$$\ddot{A}_\pm + H \dot{A}_\pm + \left(\frac{k^2}{a^2} \mp \frac{k \alpha \dot{\phi}}{a f} \right) A_\pm = 0 \quad (6)$$

この方程式は、 $\dot{\phi}$ の符号に応じて、2 つの円偏光モードの 1 つがタキオンになり、ゲージ場の振幅が指数関数的に増幅されることを意味する。タキオン不安定性がオンになると、ゲージ場は指数関数的に成長し、ゲージ場のエネルギー密度は最終的にアクシオンのエネルギー密度に匹敵するようになる。次に、ゲージ場の生成が飽和し、線形近似が分解される。特に生成されたゲージ場は、式 (1) の右辺を介してアクシオンダイナミクスに影響を及ぼし始める。したがって、システムの非線形ダイナミクスを解いて、重力波源とアクシオンの存在量を正確に計算する必要がある。

3 Results

3.1 アクシオンからのゲージ場の生成

完全非線形ダイナミクスを正確に解析できる数値格子シミュレーションを実行することにより、運動方程式 (3) および (5) を直接解いた。離散化された格子空間のグリッド点の数は 256^2 で、共動ボックスの大きさは $\alpha = 18$ のとき $(\pi/2)m^{-1}$ 、 $\alpha = 20, 25, 30$ のとき $(\pi/4)m^{-1}$ である。

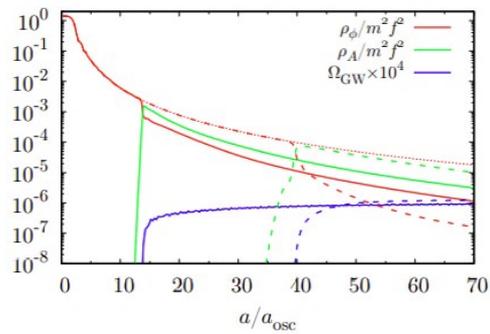


図 1: アクシオン (赤)、ゲージ場 (緑)、 $\Omega_{GW} \times 10^4$ (青) のエネルギー密度の変化。比較のために、細い赤点線でゲージ場を生成せずに断熱進化した場合を示す。 $f = 10^{16} \text{ GeV}$ 、 $m = 2 \times 10^{-14} \text{ eV}$ 、 $\theta_i = 2$ 、 $\alpha = 30$ (実線) および 18 (破線) を採用した。 [1]

図 1 は、 $H = m$ で定義され、スケールファクターを、軸振動の開始時のスケールファクターで割った値で表した、軸のエネルギー密度 ρ_ϕ (赤線) とゲージ場 ρ_A (緑線) の変化を示している。これはゲージ場の成長がアクシオンのエネルギー密度に追いつくと終了することを示す。つまり、 $\alpha = 30$ の場合は $a/a_{osc} \simeq 15$ であり、これはダイナミクスがその後非線形領域に入ることを意味する。

3.2 重力波放出

爆発的に生成されたゲージ場は、GW の確率的背景を発生させる可能性がある。これは、平坦な FRW 宇宙で次のように定義された計量摂動のテンソル成分 h_{ij} によって与えられる。

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j \quad (7)$$

テンソルモードの摂動アインシュタイン方程式は、GW の発展を決定する。

$$\ddot{h}_{ij} + 3H\dot{h}_{ij} - \frac{1}{a^2}\nabla h_{ij} = \frac{2}{M_P^2}\Pi_{ij}^{TT} \quad (8)$$

ここで、 Π_{ij}^{TT} は異方性ストレスの TT 成分である。このシステムでは、異方性ストレスはトレースのない部分で与えられ、

$$\Pi_{ij} = \partial^i\phi\partial_j\phi + \frac{1}{a^2}E_iE_j + \frac{1}{a^2}B_iB_j \quad (9)$$

ここで、 $E_i = \dot{A}_i$ と $B_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k/a$ はそれぞれゲージ場における電気成分と磁気成分である。

振動するアクシオンによって増幅されるゲージフィールドまたは不均一なアクシオンによって供給される GW のピーク振幅の大まかな推定を行う。簡単にするために、GW の支配的な部分が飽和した周囲に放出されると仮定すると、GW のピーク振幅はおおよそ次のように推定される。

$$\frac{k^2}{a_{em}^2}h_{ij}(t_{em}) \sim \frac{\rho_{src}(t_{em})}{M_P^2} \sim \left(\frac{mf\theta_i}{M_P}\right)^2 \left(\frac{a_{osc}}{a_{em}}\right)^3 \quad (10)$$

ここで、 a_{em} は放出時のスケール係数、 $t = t_{em}$ 、 ρ_{src} は場のエネルギー密度であり、 t_{em} での軸の均一モードのエネルギー密度に匹敵する。次に、GW の密度パラメータは以下のように表される。

$$\Omega_{GW}(t_{em}) \sim \left(\frac{k}{a_{em}m}\right)^{-2} \left(\frac{f\theta_i}{M_P}\right)^4 \left(\frac{a_{osc}}{a_{em}}\right)^2 \quad (11)$$

さらに、現在の GW の周波数は、次のようにアクシオン質量に関連している。

$$\nu = \frac{k}{2\pi a_0} \sim 0.1\text{ nHz} \frac{g_{*osc}^{1/4}}{g_{*Sosc}^{1/3}} \frac{k}{a_{osc}m} \left(\frac{m}{10^{-14}\text{ eV}}\right)^{1/2} \quad (12)$$

このとき、 a_0 は現在のスケールファクターで、 g_{*osc} はアクシオン振動の開始時のエントロピー密度の有効な相対論的自由度である。

このシナリオで正確な GW スペクトルを取得するために、定式化された格子シミュレーションによって、アクシオンとゲージ場のダイナミクスとともに GW の進化を数値的に解いた。図 2 は、アクシオンが観測された暗黒物質の存在量と一貫した値を与える場合の、SKA (シアンの線) の感度とともに現在の

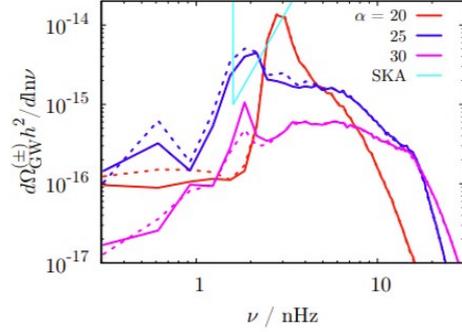


図 2: 結果として得られる $\Omega_{GW}h^2$ のスペクトルの α 依存性は、 $\Omega_{GW}^{(+)}h^2$ (実線) と $\Omega_{GW}^{(-)}h^2$ (破線) の 2 つの円偏光モードで構成される。 $f = 10^{16}\text{ GeV}$ 、 $\theta_i = 2$ 、 $m = 2 \times 10^{-14}\text{ eV}$ 、 $\alpha = 20$ (赤)、25 (青)、30 (マゼンタ) を採用した。 [1]

GW スペクトルの予測を示している。ここで、 Ω_{GW}^{\pm} は、合計の Ω_{GW} に対する 2 つの円偏光モードのいずれかの寄与を示す。図 2 はアクシオン暗黒物質からの GW が SKA によって検出可能であることを示唆している。スペクトルは $\alpha = 20$ で鋭いピークを持ち、 α が大きくなるとスペクトルの幅が広がる。したがって、スペクトルの高さは $\mathcal{O}(0.1)$ だけ低下する。したがって、このモデルは、 α に応じて、非常にピークのあるスペクトルと広く拡張されたスペクトルの両方を予測できると考えられる。

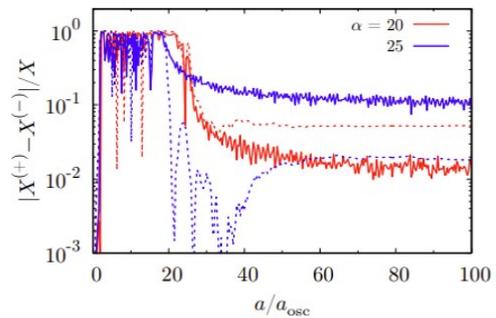


図 3: GW ($X = \Omega_{GW}$ 、実線) およびゲージ場 ($X = \rho_A$ 、破線) の円偏光非対称性の発展。 $f = 10^{16}\text{ GeV}$ 、 $\theta_i = 2$ 、 $m = 2 \times 10^{-14}\text{ eV}$ 、および $\alpha = 20$ (赤) と 25 (青) を採用した。 [1]

4 Conclusion&Discussion

NANOGrav によって報告された信号が、このシナリオで説明できるかどうかについて説明する。nHz の範囲においては、 $d\Omega_{GW}h^2/d\ln\nu \sim 10^{-9}$ が必要とされる。放出された GW の密度は、 $f = 10^{16}\text{GeV}$ に対して $\Omega_{GW} \propto f^4$ および $\Omega_{GW} \sim 10^{-15} - 10^{-14}$ として大まかにスケーリングされるため (図 3 を参照)、NANOGrav のデータを説明するには $f \sim 2 - 4 \times 10^{17}\text{GeV}$ が必要となる。図 2 に示すように、このシナリオでは、検出可能な GW 信号だけでなく、GW の円偏光も予測される。図 3 は、GW の密度パラメータ Ω_{GW} とゲージ場のエネルギー密度 ρ_A の 2 つの円偏光モード間の差の時間発展を示している。円偏光の予測される非対称性は、結合に応じて 1~10% である。原理的には、GW の異方性を観測することにより、パルサータイミング観測で円偏光を検出することが可能と考えられる。この研究では、暗黒物質の役割を果たすアクシオンにのみ焦点を当てている。具体的には、GUT スケールの減衰定数、つまり $f \sim 10^{16}\text{GeV}$ の場合、アクシオンの質量は、放出された GW の nHz 範囲に対応する $m \sim 10^{-14}\text{eV}$ である必要がある。ただし、多数のアクシオンが存在する弦理論では、質量の異なるアクシオンが存在する可能性がある。

Reference

- [1] Naoya Kitajima, Jiro Soda, and Yuko Urakawa
Phys.Rev.D 103 (2021) 8, 085009

重宇 poster9

主成分分析による前景放射除去

熊本大学 自然科学教育部

宮元 龍之介

主成分分析による前景除去

宮元 龍之介 (熊本大学大学院 自然科学教育部)

Abstract

宇宙の大規模構造を探る有効な手法として 21cm 線の強度マッピングがある。21cm 線とは中性水素が超微細構造の準位間において遷移する際に生じる電磁波のことである。しかし、21cm 線のシグナルは非常に弱く、宇宙再電離期以降の電波放射、主に銀河系内のシンクロトロン放射や系外電波源由来の前景放射などの強烈な前景放射に覆い隠されるため 21cm 線の検出は非常に困難である。そのため前景放射の除去もしくは回避が必要となってくる。

前景放射除去としては様々な方法が存在する。(1) の論文では 3 つの手法 (主成分分析、独立成分分析、多項式近似) を考えている。そこで今回は (1) の論文を元に、主成分分析について説明する。この手法は FAST や SKA などの将来的な観測でも用いられる可能性があり、すでにいくつかシミュレーションで実験が行われている。(7) の論文では FAST での主成分分析を用いた前傾放射除去における最近の進展を紹介する。

1 導入

初期宇宙は非常に高温高密度で大量の電子が飛び交っていた。やがて宇宙が膨張し温度が徐々に低下していくと電子は陽子と反応し中性水素が生成された。これにより光子は散乱せずに直進できるようになった。これが宇宙の晴れ上がりと呼ばれる現象である。その後、暗黒時代に突入するが初代星が誕生したことで天体から紫外線光子や X 線光子が放射され天体周辺の中性水素が電離された。時間が進むにつれて電離は進み、やがて宇宙を満たしていたほぼ全ての中性水素が電離された。この時代を宇宙再電離期と呼ぶ。

宇宙再電離期や電離後の銀河分布を調査するためには IGM や銀河に付随する中性水素から放出される 21cm 線の観測が有効とされている。しかし、21cm 線のシグナルは一般的には数 mK であるのに対して、銀河系シンクロトロン放射や系外シンクロトロン放射などの前景放射は 4 桁以上も大きい。そこで今回は前景放射の除去もしくは回避をするために主成分分析を用いた手法に着目し、FAST での先行研究 (7) を報告する。

2 主成分分析とは

主成分分析 (Principle Component Analysis, 以下 PCA) とは、多くの変数を持ったデータは扱いにくいため、なるべくデータ内の情報を失わずに低次元化 (情報のシンプル化) することでデータが持つ情報の解釈を容易にする手法である。PCA においては共分散行列を求めて対角化し、固有値と固有ベクトルを求める手順が主成分を求めることに対応している。また、PCA ではデータの各成分を線形結合した主成分ベクトル (principle component vector) を評価していく。例えば、 K 個の変数 n_1, n_2, \dots, n_K を持つデータがあればそれら K 個の変数 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_K$ をそれぞれ固有ベクトルとして以下のように変換できる。

$$\begin{aligned} z_1 &= a_{11} \vec{n}_1 + a_{12} \vec{n}_2 + \dots + a_{1K} \vec{n}_K \\ z_2 &= a_{21} \vec{n}_1 + a_{22} \vec{n}_2 + \dots + a_{2K} \vec{n}_K \\ &\vdots \\ z_m &= a_{m1} \vec{n}_1 + a_{m2} \vec{n}_2 + \dots + a_{mK} \vec{n}_K \end{aligned}$$

z_1 が第 1 主成分、 z_2 が第 2 主成分、 z_m が第 m 主成分である。主成分はデータを射影した際にデータの分散が最大になるように求め、分散が大きい時はそ

の主成分に含まれるデータが多いと考えられる。第 1 主成分とはデータの分散が最も大きいものである。以下、分散が大きい順に第 2,3,⋯,K 主成分に該当する。

PCA を行う際に良く使われる指標として寄与率と累積寄与率というものがある。寄与率とはその主成分でデータの何割を説明できるかの指標である。もう一つの累積寄与率とは、第 1 主成分から第 m 主成分までの寄与率の和を表す。

3 PCA による前景除去

3.1 前景放射除去

強度マッピングに最も関連する前景は銀河系外（主に天の川の外にある天体）と銀河系内に分類される。振幅の観点から見ると圧倒的に大きな前景は銀河系シンクロトロン放射 (GSE) であり、これは高エネルギー宇宙線の電子が銀河の磁場によって加速されたものである。また、GSE のシグナルはある幕乗 ($\beta \approx -2.8$) に従って滑らかに減衰していく周波数依存性があると考えられている (Dickinson et al. 2009;(4) Delabrouille et al. 2013(2))。

銀河系内のもう一つの前景発光源としてイオンによって加速された自由電子が電離媒体付近をなぞるように通過することで起こる自由自由放射も上げられる。こちらも GSE の場合と同様、スペクトル的に滑らかであると考えられている (Dickinson, Davies Davis 2003(3))。

このように 21cm 線強度マッピングの前景放射は周波数に関して非常に滑らかであることが期待される。前景放射除去の際に空のある方向 \hat{n} と周波数 ν の輝度温度を以下のように表す。

$$T(\nu, \hat{n}) = \sum_{k=1}^{N_{fg}} f_k(\nu) S_k(\hat{n}) + T_{cosmo}(\nu, \hat{n}) + T_{noise}(\nu, \hat{n})$$

ここで、 N_{fg} は差し引く前景の自由度の数、 $f_k(\nu)$ は周波数を変数に持つ滑らかな関数、 $S_k(\hat{n})$ は前景

のスカイマップ、 T_{cosmo} は宇宙論的信号、 T_{noise} は機器ノイズである。この式を線形で書き表すと、

$$x = \hat{A} \cdot s + r$$

となる。ここで、 $x_i = T(\nu_i, \hat{n})$, $A_{ik} = f_k(\nu_i)$, $s_k = S_k(\hat{n})$, $r_i = T_{cosmo}(\nu_i, \hat{n}) + T_{noise}(\nu_i, \hat{n})$ に該当する。前景放射除去では \hat{A} と s を決定し、 $r = x - \hat{A}s$ を正確に求めたい。そのアプローチの 1 つとして PCA を用いる。

3.2 PCA

ここでは、Alonso et al. 2015 (1) をもとに説明する。主成分分析を前景減算法に適応することで、前景成分 S_k と関数 A_{ik} を同時に求めることが可能である。観測で得られたデータから周波数共分散行列を計算する。周波数共分散行列は、

$$C_{ij} = \frac{1}{N_\theta} \sum_{n=1}^{N_\theta} T(\nu_i, \hat{n}_n) T(\nu_j, \hat{n}_n)$$

と書ける。共分散行列は対角化すると、

$$\hat{U}^T \hat{C} \hat{U} = \hat{\Lambda} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{N_\nu})$$

ここで、 λ_i は \hat{C} の固有値であり、 \hat{U} は対応する固有ベクトルを列とする直行行列である。次に前景の固有値に対応する \hat{U} の列から行列 \hat{U}_{fg} を作る。ここで重要なのは、観測される輝度温度の主要な成分は前景放射のため、主成分のうちの上位の主成分が前景放射に対応し、それをデータから差し引くことで前景放射が差し引けることが期待できることである。各視線の輝度温度を以下のようにモデル化する。

$$x = \hat{U}_{fg} s + r$$

この式は、前景放射除去の式と非常に類似していることがわかる。右辺の第一項は前景マップ、第二項は 21cm 線とノイズの情報が含まれる。そして前景マップ s は \hat{C} の固有ベクトルに x を射影することで以下のように求められる。

$$s = \hat{U}_{fg}^T x$$

なお、 \hat{U} は直行しているため $\hat{U}_{fg}^T \hat{U}_{fg} = 1$ となることに注意する。

実際の実験では機器ノイズの相関がある場合のように複雑化する。この問題に関してはグリーンバンク望遠鏡のチームが行った解析 (Masui et al. 2013(5); Switzer et al. 2013(6)) で異なる時期での温度マップの相互相関によって周波数共分散行列を計算することで対処された。

4 FAST

FAST(Five-hundred-metre Apartre Spherical radio Telescope) は中国の球面電波望遠鏡であり、開口部は約 500m にも及ぶ。また、FAST はグリーンバンク望遠鏡の約 10 倍の集光面積を持つ。

宇宙の大規模構造を調べる上での有効な手段として中性水素の 21cm 強度マッピングがある。しかし、実際は銀河系の放射光や自由自由放射、ノイズなどの様々な前景により汚染されている可能性がある。

そこでこの先行研究では、中性水素のシグナルに対する空の位置と角度の両方のスケールで前景成分の変化を捉えるために、20,000 平方度の観測領域で一年間のシミュレーションを行い、PCA による前景の分離を行なっている。その結果、前述した様々な前景やノイズなどを含めて再構築された 21cm 線強度マッピングと予測される純粋な 21cm 線シグナル間の標準偏差の値は $\Delta T = 0.034\text{mK}$ となり、中性水素の固有モードが全スカイ成分のわずか 1%未満のレベルであることが示された。

実際に FAST で行われた先行研究では、第四主成分まで差し引きされていて、その寄与率はデータの 99% になる。さらに、前景放射除去後のデータは中性水素のパワースペクトルを再現していて、それが 1%レベルの精度を達成していた。(7)

5 まとめ

今回は PCA に関する 2 つの論文を読み、その紹介をした。FAST の先行研究では PCA を用いた手法で高い精度で前景を除去できることがわかった。また、この PCA を用いた前景の除去は建設中である SKA (Square Kilometre Array) でも取り入れることができるためその結果を期待したい。

Reference

- [1] David Alonso, Philip Bull, Pedro G. Ferreira, and Mário G. Santos. Blind foreground subtraction for intensity mapping experiments. , Vol. 447, No. 1, pp. 400–416, February 2015.
- [2] J. Delabrouille, M. Betoule, J. B. Melin, M. A. Miville-Deschênes, J. Gonzalez-Nuevo, M. Le Jeune, G. Castex, G. de Zotti, S. Basak, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, J. P. Bernard, F. R. Bouchet, D. L. Clements, A. da Silva, C. Dickinson, F. Dodu, K. Dolag, F. Elsner, L. Fauvet, G. Faÿ, G. Giardino, S. Leach, J. Lesgourgues, M. Liguori, J. F. Macías-Pérez, M. Massardi, S. Matarrese, P. Mazzotta, L. Montier, S. Mottet, R. Paladini, B. Partridge, R. Piffaretti, G. Prezeau, S. Prunet, S. Ricciardi, M. Roman, B. Schaefer, and L. Toffolatti. The pre-launch Planck Sky Model: a model of sky emission at submillimetre to centimetre wavelengths. , Vol. 553, p. A96, May 2013.
- [3] C. Dickinson, R. D. Davies, and R. J. Davis. Towards a free-free template for CMB foregrounds. , Vol. 341, No. 2, pp. 369–384, May 2003.
- [4] C. Dickinson, H. K. Eriksen, A. J. Banday, J. B. Jewell, K. M. Górski, G. Huey, C. R. Lawrence, I. J. O’Dwyer, and B. D. Wandelt. Bayesian Component Separation and Cosmic Microwave Background Estimation for the Five-Year WMAP Temperature Data. , Vol. 705, No. 2, pp. 1607–1623, November 2009.
- [5] K. W. Masui, E. R. Switzer, N. Banavar, K. Bandura, C. Blake, L. M. Calin, T. C. Chang, X. Chen, Y. C. Li, Y. W. Liao, A. Natarajan, U. L. Pen, J. B. Peterson, J. R. Shaw, and T. C. Voytek. Measurement of 21 cm Brightness Fluctuations at $z \sim 0.8$ in Cross-correlation. , Vol. 763, No. 1, p. L20, January 2013.
- [6] E. R. Switzer, K. W. Masui, K. Bandura, L. M. Calin, T. C. Chang, X. L. Chen, Y. C. Li, Y. W. Liao, A. Natarajan, U. L. Pen, J. B. Peterson, J. R. Shaw, and T. C. Voytek. Determination of $z \sim 0.8$ neutral hydrogen fluctuations using the 21cm intensity mapping autocorrelation. , Vol. 434, pp. L46–L50, July 2013.
- [7] Elimboto Yohana, Yin-Zhe Ma, Di Li, Xuelei Chen, and Wei-Ming Dai. Recovering the 21-cm signal from simulated FAST intensity maps. , Vol. 504, No. 4, pp. 5231–5243, July 2021.

重宇 poster10

初代星の星質量・SFRDと宇宙論的21-cm線シグナル
の関係

名古屋大学 理学研究科素粒子宇宙物理学専攻
伊元 聖也

未提出

重宇 poster11

重力レプトジェネシスによる物質の起源の研究及び理論の検証

福島大学 共生システム理工学研究科
平 啓輔

重力レプトジェネシスによる物質の起源の研究及び理論の検証

平 啓輔 (福島大学大学院 共生システム理工学研究科)

Abstract

宇宙はビッグバンにより形成されたとされる。しかしこのとき物質と反物質が同じ量で生成されたとすると、互いに対消滅するため、今の宇宙は形成されなかったと考えられる。このことから、宇宙のある時期、有力な時期としてはインフレーションの後において粒子が反粒子よりも多く生成されたと考える仮説が、バリオン数生成である。バリオン数生成のみでも、バリオン数とレプトン数の差が保存されるという不備が生じるため、導入される理論がレプトン数生成である。レプトン数生成は、右巻きのマヨラナニュートリノが左巻きニュートリノと左巻き反ニュートリノに崩壊し、このうち左巻きニュートリノの方に多く崩壊したことで物質が生成されたという理論である。この非対称性は、カイラル重力波の生成によって膨張中のレプトンのカレントが重力異常を起こしたものによるという仮説が、重力レプトジェネシスである。

今回は、重力レプトジェネシスの中でも、輻射誘起重力レプトジェネシスの力学的な進化の様子について調べた。すると、CP の曲率の偶数相互作用がレプトン数のカレントの保存を破ること、また宇宙が拡大するにつれレプトン数密度の進化の様子が変わるとい理論が見られた。これらの効果は、ボルツマン方程式により記述される。重力レプトジェネシスによりボルツマン方程式がどのように表されるか、またそのボルツマン方程式により宇宙はどのような進化を遂げてきたかをレビューする。

1 Introduction

輻射誘起重力レプトジェネシスは、RIGL とも呼ばれる、バリオン対光子比 $\eta = (n_B - n_{\bar{B}})/n_\gamma \simeq 6 \times 10^{-10}$ を裏付けると共に、初期宇宙でレプトン数の非対称性を生成するとされる理論である。この理論の基本となる考えは、重力潮汐効果がレプトンと反レプトンの伝播に非対称をもたらすというものである。これにより、初期宇宙の高温でも、平衡状態が保たれ消失しないレプトンの非対称性が生じるとされる。

新たに導入された重力相互作用の物理的意味は、対応する演算子が CP 偶数であるか CP 奇数であるかによって異なる。CP 奇数演算子は消失しない平衡レプトン数密度 n_L^{eq} を生成する役割を持つ。また、宇宙の初期の段階でレプトン非対称性の進化をさせるため CP 偶数演算子の役割に着目する。

CP 奇数演算子による平衡レプトン数密度と、CP 偶数演算子によるレプトン数密度 n_L によって、ボルツマン方程式は明確に表される。このボルツマン方程式に従うと、全体の進化の様子は図 1 のように表される。この図のグラフは、3つの段階を示す。最初

に初期宇宙の高温の時期に進化項 $W(z)$ がレプトンと光子の比率 $N_L = n_L/n_\gamma$ を平衡以下に保っている段階が存在する。次に N_L により N_L^{eq} の働きが生じる段階が存在する。最後に進化項が弱まって N_L が N_L^{eq} に働きかけることができなくなる段階が存在する。

これらの段階の遷移は、宇宙が膨張する、つまり冷却するときの曲率と温度に依存する速度 $W(z)$, $W(z)$, $N_L^{eq}(z)$ の間の力学的なバランスに依存する。今回は、力学的な進化のメカニズムについて記述する。レプトン数密度の進化方程式から、CP 偶数曲率相互作用が有効作用に含まれる場合にレプトン数のカレントが保存されないことを示す。また、これらの重力効果を組み込んだ新しい一般化ボルツマン方程式を表し、その意味を記述する。

2 レプトン数の進化

自由ディラックラグランジアンであれば、レプトン数のカレントは保存されるが、有効ラグランジアンに曲率項があれば、カレントは保存されないため、

レプトン数の時間依存性が示される．現在の非保存方程式は，このように表される．

$$(1 + 2cR)D_\mu J^\mu + \left(a + 2c + \frac{1}{2}d\right) \partial_\mu R J^\mu \quad (1)$$

$$+ 2d \left(\bar{\nu}_L D^2 \gamma \cdot D \nu_L + \bar{\nu}_L \gamma \cdot \overleftarrow{D} D^2 \nu_L \right) \sim 0$$

$$D_\mu J^\mu + 2a R_{\mu\nu} D^\mu J^\nu + 2\hat{b} \partial_\mu R J^\mu \sim 0 \quad (2)$$

ここで， $D_\mu J^\mu \sim O(\lambda^2)$ であり， $D_\mu J^\mu$ の前の $2cR$ は省略される．また，FRW 時空では， $\hat{b} = \frac{1}{2} + c + \frac{1}{4}$ とすると，非保存方程式は次のように表される．

$$\begin{aligned} \partial_0 J^0 + \partial_i J^i + \Gamma_{i0}^i J^0 \\ + 2a \left(R_0^0 \partial_0 J^0 + R_j^i \partial_i J^j + R_j^i \Gamma_{i0}^j J^0 \right) \\ + 2\hat{b} \dot{R} J^0 \sim 0 \end{aligned} \quad (3)$$

カレントに対する電荷密度 J^0 は，レプトン数密度と同義である．等方性宇宙では上の式の空間勾配が消えるため，レプトン数密度の時間発展方程式は次のように表される．

$$\begin{aligned} (1 + 2aR_0^0) \frac{dn_L}{dt} + 3Hn_L + 2aR_i^i Hn_L \\ + 2\hat{b} \dot{R} n_L = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

これらの式を拡張すると次のように表される．

$$\begin{aligned} \frac{dn_L}{dt} + 3Hn_L + (-3R_0^0 + R_i^i) Hn_L \\ + 2\hat{b} \dot{R} n_L = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

この式に曲率を代入することで，次の式が求められる．

$$\begin{aligned} \frac{dn_L}{dt} \\ + 3Hn_L \left(1 - 8\pi G\rho(1+w) \left[2a - 2\hat{b}(1-3w) \right] \right) \\ = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

この式から，宇宙の進化に伴い輻射曲率補正がレプトン数密度を変化させるかは， $[2a - 2\hat{b}(1-3w)]$ の組み合わせの符号に依存することがわかる．上の式を，新しいボルツマン方程式に組み込む．

3 重力レプトジェネシス

ラグランジアン of CP 対称性の破れ演算子は，FRW 時空で次のように表される．

$$\begin{aligned} S_b &= b \int d^4x \sqrt{-g} \partial_\mu R \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L \\ &= \int dt b \dot{R} \int d^3x \sqrt{-g^{(3)}} J^0 \end{aligned} \quad (7)$$

このように表すと， J^0 がレプトン数密度 n_ν であるとする，レプトン数に化学ポテンシャル $\mu = bR$ を導入することと同義であることがわかる．ニュートリノは初期宇宙の温度を媒介するものとヒッグス場を介して相互作用するため，この化学ポテンシャルは正味のレプトン数 $n_L = n_\nu - n_{\nu^c}$ から，熱平衡で消えない値 $n_{qL}^e \sim \mu T^2$ を生成する．確かに，化学ポテンシャルを生成するには，リッチスカラーが時間とともに変化する必要があるため，完全な熱平衡状態ではない．しかし， $\Delta L \neq 0$ の反応が変化率 \dot{R} よりも速い場合，ニュートリノと反ニュートリノは準平衡状態となる．

また，平衡レプトン数密度は， μ/T が小さい場合次のように表される．

$$\begin{aligned} n_L^{eq} &= n_\nu - n_{\nu^c} \\ &= \int \frac{d^3|\vec{p}|}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/T} + 1} - \frac{1}{e^{(\varepsilon+\mu)/T} + 1} \right) \\ &\simeq \frac{2\mu}{T} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^2 e^\varepsilon}{(e^\varepsilon + 1)^2} + O\left(\frac{\mu}{T}\right)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

この式を近似すると，次のように表される．

$$n_L^{eq} \simeq \frac{2\mu}{T} \frac{1}{2\pi^2} T^3 \int_0^\infty dx \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{1}{3} \mu T^2 \quad (9)$$

加えて，熱平衡状態での消失しないレプトン数密度の非対称性は次の式で表される．

$$n_L^{eq} = \frac{1}{3} b \dot{R} T^2 \quad (10)$$

係数 b は， $b = \text{tr} b_{ij} = O(\lambda^4)$ であり， $b_{ij} = \frac{1}{9} \frac{1}{(4\pi)^4} \sum_{\alpha, \beta, k} \lambda_{\beta j}^\dagger \lambda_{i\alpha} \lambda_{\beta k}^\dagger \lambda_{k\alpha} \frac{1}{M_\alpha M_\beta} I_{[\alpha\beta]}$ となる．以上が，輻射により誘発されるレプトン数生成の機構である．

4 ボルツマン方程式

以上で述べた2つの効果を、レプトン数密度の時間あるいは温度依存性を表すボルツマン方程式に組み込む。 $N_L = n_L/n_\gamma$, $n_\gamma \sim T^3$, $T \sim 1/a$ であり, $a(t)$ は FRW スケールパラメータであることから, (6) 式で表した進化項は, 次のように表される。

$$\frac{dN_L}{dt} = \frac{1}{n_\gamma} \left(\frac{dn_L}{dt} + 3Hn_L \right) \quad (11)$$

また, $z = M_1/T$ であることを用いて進化を表現できる。 M_1 は, 最も軽いステライルニュートリノの質量と考える。 z から, $d/dz = (1/Hz)d/dt$ と表すことができる。 よって, (6) 式は次のように表すことができる。

$$\frac{dN_L}{dz} = 3(1+w) \left[2a - 2\hat{b}(1-3w) \right] \frac{\rho}{M_p^2} \frac{1}{z} N_L \quad (12)$$

平衡数密度 n_L^{eq} が消えないことによって生じる変化については, 下記のようになる。 $\nu_L H \leftrightarrow \nu_L^c H$ のように表される $\Delta L = 2$ 反応の場合, dn_{ν^c}/dt に対応する結果は次の式で得られる。

$$\begin{aligned} \frac{dn_\nu}{dt} + 3Hn_\nu \\ = \langle \sigma |v| \rangle \left(-n_\nu n_H + \frac{n_\nu^{eq} n_H^{eq}}{n_{\nu^c}^{eq} n_H^{eq}} n_{\nu^c} n_H \right) \end{aligned} \quad (13)$$

以上から, $n_H \simeq n_H^{eq}$ とすることができるため, 次のように表すことができる。

$$\frac{n_\nu^{eq}}{n_{\nu^c}^{eq}} \simeq e^{2\mu/T} \quad (14)$$

このことから, $n_L = n_\nu - n_{\nu^c}$ の場合, 次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dn_L}{dt} + 3Hn_L \\ = \Gamma_{\Delta L=2}^\nu \left(-(1 + e^{-2\mu/T})n_\nu + (1 + e^{2\mu/T})n_{\nu^c} \right) \\ = -2 \Gamma_{\Delta L=2}^\nu \left(n_\nu - n_{\nu^c} - \frac{\mu}{T} (n_\nu + n_{\nu^c}) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

また, n_L^{eq} について,

$$\frac{\mu}{T} (n_\nu + n_{\nu^c}) \simeq n_L^{eq} \quad (16)$$

となることより, 次の式が導かれる。

$$\frac{dn_L}{dt} + 3Hn_L = -2 \Gamma_{\Delta L=2}^\nu (n_L - n_L^{eq}) \quad (17)$$

この式の意味は, $\Delta L = 2$ が活発に反応するとき, レプトン数密度 n_L は平衡値 n_L^{eq} に向かうということである。 さらに, $dN_L = dz$ で表すと, $dN_L/dz = -2W_{\Delta L=2} (N_L - N_L^{eq})$ $W = \Gamma/zH$ は, 宇宙の膨張率に対する反応速度の比率を表す。 以上から, ボルツマン方程式は次のように表される。

$$\frac{dN_L}{dz} = -W (N_L - N_L^{eq}) - WN_L \quad (18)$$

$$W = -3(1+w) \left[2a - 2\hat{b}(1-3w) \right] \frac{\rho}{M_p^2} \frac{1}{z} \quad (19)$$

$$N_L^{eq} = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{2\zeta(3)} (1-3w)(1+w)b \frac{\rho^{3/2}}{M_p^3} \frac{1}{M_1} z \quad (20)$$

従来のレプトン数生成のモデルと比較すると, 消失しない平衡非対称性 N_L^{eq} と, 新しい進化項 WN_L が追加されている。 これらの式をグラフ化したものが図1である。

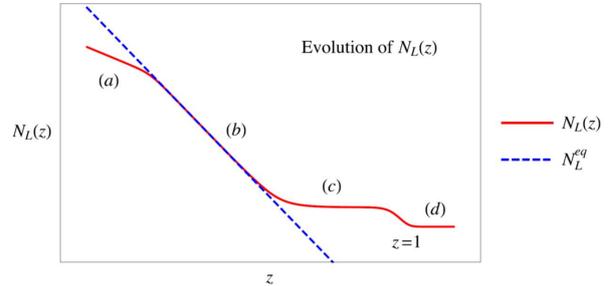


図 1: (18) 式から導出される, 温度による $N_L(z)$ の進化の段階。

領域 (a), (b) は高温領域, 領域 (c), (d) は低温領域である。 領域 (a) では, $W(z)$ が $1/z^5$ に依存することで, $W(z)$ と比較すると, $|W(z)| > W(z)$ となり, 平衡値から外れる。 領域 (b) では, $W(z)$ が支配的となることで, N_L は平衡値 N_L^{eq} に収束する。 領域 (c) では, $W(z)$ が再び小さくなることで, 平衡が維持できなくなり, N_L は分離, 一定となる。 領域 (d) では, N_L は最終的に一定の値に収束する。

5 Conclusion

宇宙が初期の段階、あるいは低温の段階において N_L は平衡値ではなくなることを、また、横軸を時間としてとらえると、宇宙の誕生から一定の時間が経過して N_L は平衡値となることがグラフから見てとれる。今回提示されたこの説は、レプトンのカレントが重力異常を起こしたことで粒子と反粒子の非対称性が生じたという仮説と合致すると考えられる。

ここで、右巻きのマヨラナニュートリノは、熱的に生成されたとする仮説がある。宇宙においてニュートリノが熱的に生成された時期は、インフレーションの後、再び温度が上昇した再加熱の時期であるとされている。この仮説と今回レビューした説を照らし合わせると、図 1 の (b) の領域で非対称性が生じたとすれば、(b) の領域は再加熱期の温度のときのグラフであると考えられる。これら 2 つの説を両立して矛盾が生じないかについて、確認することを次の目標とする。そのために、今回レビューしたこの仮説を自身でも確認することを目指す。

Reference

- [1] Kohei Kamada et al. arXiv:1911.02657v3(2020).
- [2] Soichiro Hashiba & Jun'ichi Yokoyama, arXiv:1905.12423v3(2020).
- [3] Jamie I. McDonald & Graham M. Shore, arXiv:2006.09425v2(2020).