

# 四角柱による平面波の回折：Wiener-Hopf 法による解析

## Wiener-Hopf Analysis of the Plane Wave Diffraction by a Rectangular Cylinder

電気電子情報通信工学専攻 中山 理雄

Rio NAKAYAMA

### 1. はじめに

角柱による波動散乱問題の解析は、電磁界理論、レーダ断面積の分野において基本的かつ重要な課題であり、これまで数多くの研究者により種々の手法を用いて解析されてきた。角柱の典型的な形状は断面が方形であるような四角柱であり、過去において、媒質が完全導体の場合[1][2]、誘電体の場合[3]-[5]に関し、多くの論文が発表されている。小林らは、Wiener-Hopf法を適用して完全導体四角柱[6][7]、誘電体四角柱[8]-[10]による平面電磁波の回折問題を厳密に解析し、高精度の解を得た。

本研究は小林らのこれまでの研究の延長線上に位置づけられるものであり、論文[8]-[10]における解析の一般化を行っている。特に、誘電率と透磁率が一定であるような媒質からなる四角柱による平面電磁波の回折問題を取り上げ、 $E$ 波入射の場合に関し、Wiener-Hopf法による厳密な解析を行っている。本研究の解析結果は、角柱断面の幅が波長程度以上であれば、任意の寸法に関し有効である。文献[11]において、小林らは角柱の厚みが波長に比べて薄い場合に関し、近似境界条件とWiener-Hopf法を併用した手法により解析を行なっているが、本研究の結果はこの近似解析の妥当性を検証するために用いることができる。

散乱界の Fourier 変換を導入し、角柱の表面における境界条件を厳密に考慮することにより、この問題は未知スペクトル関数が満足する連立 Wiener-Hopf 方程式として定式化することができる。Wiener-Hopf 方程式に積形式と和形式の分解操作を施すことにより、厳密解が得られる。しかし、この解には未知数を一般項に持つ無限級数、及び未知関数を被積分関数に持つ無限積分が含まれるため、形式解に過ぎない。そこで、角柱の幅が波長に比べて十分大きいとの仮定の下で高周波漸近解を導いている。以上の結果に Fourier 逆変換を施し、鞍部点法を適用することにより、散乱遠方界の漸近表現を得ている。

本研究の内容は文献[12]において発表済みである。以下において、電磁界の時間因子は  $e^{-i\omega t}$  とし、すべて省略する。

### 2. 変換波動方程式

図 1 に示すような四角柱 (比誘電率  $\epsilon_r$ , 比透磁率  $\mu_r$ ) による平面電磁波の回折問題を Wiener-Hopf 法により解析する。角柱は  $y$  軸方向に一様で変化がないものとし、 $E$  波が入射する場合を取り上げることとする。

全電界  $\phi^i(x, z) \equiv E_y^i(x, z)$  を、入射界  $\phi^i(x, z)$  及び散乱界  $\phi(x, z)$  を用いて次のように定義する。

$$\phi^i(x, z) = \phi^i(x, z) + \phi(x, z). \quad (1)$$

但し、 $k = \omega(\mu_0\epsilon_0)^{1/2}$  を自由空間中の波数として、

$$\phi^i(x, z) = e^{-ik(x\sin\theta_0 + z\cos\theta_0)}, \quad 0 < \theta_0 < \pi/2, \quad (2)$$

$$\phi(x, z) = \begin{cases} \phi_r(x, z) - \phi^i(x, z), & |x| < b, |z| < a, \\ \phi_o(x, z), & |x| > b, |z| > a. \end{cases} \quad (3)$$

このとき、境界条件、放射条件、端点条件を用いて以下に

示す 2 次元波動方程式の解を決定する問題に帰着される。

$$\left[ \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2 + \epsilon(x, z)\mu(x, z)k^2 \right] \phi^i(x, z) = 0. \quad (4)$$

但し、

$$\epsilon(x, z) = \begin{cases} \epsilon_r, & |x| < b, |z| < a, \\ 1, & |x| > b, |z| > a, \end{cases} \quad (5)$$

$$\mu(x, z) = \begin{cases} \mu_r, & |x| < b, |z| < a, \\ 1, & |x| > b, |z| > a \end{cases} \quad (6)$$

である。零でない電磁界成分は、式(4)の解  $\phi^i$  を用いて次の関係式より導くことができる。

$$(E_y^i, H_x^i, H_z^i) = \left[ \phi^i, \frac{i}{\omega\mu_0\mu(x, z)} \frac{\partial \phi^i}{\partial z}, \frac{1}{i\omega\mu_0\mu(x, z)} \frac{\partial \phi^i}{\partial x} \right]. \quad (7)$$

解析の都合上、媒質に微小損失を導入し、波数  $k$  が微小の正の虚部をもつものと仮定する。すなわち、

$$k = k_1 + ik_2, \quad 0 < k_2 \ll k_1. \quad (8)$$

このとき、放射条件により次式が成り立つことが分かる。

$$\phi(x, z) = O(e^{-k_2|z|\cos\theta_0}), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (9)$$

従って、 $\phi(x, z)$  の  $z$  に関する Fourier 変換を

$$\Phi(x, \alpha) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, z) e^{i\alpha z} dz, \quad \alpha = \sigma + i\tau \quad (10)$$

により定義すれば、 $\Phi(x, \alpha)$  は帯状領域  $|\tau| < k_2 \cos\theta_0$  において正則となる。又、便宜上、次の Fourier 積分

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\pm}(x, \alpha) &= \pm(2\pi)^{-1/2} \int_{\pm a}^{\pm\infty} \phi_o(x, z) e^{i\alpha(z\mp a)} dz, \\ \Phi_1^{\tau, \sigma}(x, \alpha) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-a}^a \phi_{r, o}(x, z) e^{i\alpha z} dz \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

を導入すると、 $\Phi_{\pm}(x, \alpha)$  は半平面  $\tau \geq \mp k_2 \cos\theta_0$  において正則であり、 $\Phi_1^{\tau, \sigma}(x, \alpha)$  は整関数であることが分かる。以後、 $\tau \geq \mp k_2 \cos\theta_0$  で正則な関数、整関数には各々、添字  $\pm$ , 1 をつけてその解析的性質を表すこととする。以下においては、式(10)で定義される未知スペクトル関数  $\Phi(x, \alpha)$  の満足する変換波動方程式を導く。

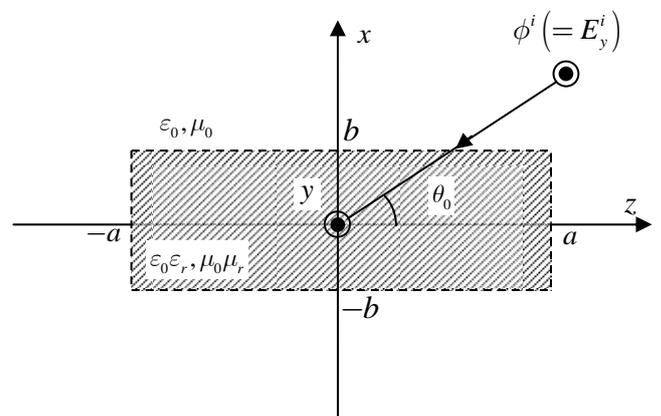


図 1. 四角柱.

領域  $|x| > b$  においては媒質の不連続面が存在しないため、式(1), (4)より次式が得られる。

$$(\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2 + k^2)\phi_o(x, z) = 0. \quad (12)$$

式(12)の両辺にFourier変換を施し、式(9)を考慮すると、 $\alpha$ が帯領域  $|\tau| < k_2 \cos \theta_0$  に属するものとして次式が導かれる。

$$(d^2 / dx^2 - \gamma^2)\Phi(x, \alpha) = 0. \quad (13)$$

但し、

$$\Phi(x, \alpha) = e^{-i\alpha a}\Phi_-(x, \alpha) + \Phi_1^o(x, \alpha) + e^{i\alpha a}\Phi_+(x, \alpha), |x| > b. \quad (14)$$

又、 $\gamma$ は $\alpha$ の2価関数であり、 $\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}$ により定義される。 $\gamma$ の分岐は $\text{Re} \gamma > 0$ なるものを採用する。式(13)は領域  $|x| > b$  における変換波動方程式である。

領域  $|x| < b$  においては、 $z = \pm a$  に媒質の不連続面が存在するため、変換波動方程式の導出にあたり、少々注意を要する。式(11)を考慮すると、式(10)は次のように書くことができる。

$$\Phi(x, \alpha) = e^{-i\alpha a}\Psi_-(x, \alpha) + \Phi_1^r(x, \alpha) + e^{i\alpha a}\Psi_{(+)}(x, \alpha), |x| < b. \quad (15)$$

但し、

$$\Psi_{(+)}(x, \alpha) = \Phi_{\mp}(x, \alpha) \pm \frac{e^{\pm ika \cos \theta_0}}{(2\pi)^{1/2} i} \frac{e^{-ikx \sin \theta_0}}{\alpha - k \cos \theta_0}. \quad (16)$$

式(16)より、 $\Psi_{(+)}(x, \alpha)$ は1位の極 $\alpha = k \cos \theta_0$ を除き、上半平面  $\tau > -k_2 \cos \theta_0$  において正則であることが分かる。以後、このような性質を持つ関数には添字(+)をつけ、その正則性を示すこととする。

角柱の存在する区間  $|z| < a$  において、式(4)は次の形をとることに注意する。

$$(\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2 + \varepsilon_r \mu_r k^2)\phi_r(x, z) = 0. \quad (17)$$

式(17)の両辺に  $(2\pi)^{-1/2} e^{i\alpha z}$  を掛け、 $z$  について  $-a$  から  $a$  まで積分し、式(11)第2式の記法を用いれば、任意の $\alpha$ に対し、

$$(\partial^2 / \partial x^2 - \Gamma^2)\Phi_1^r(x, \alpha) = e^{-i\alpha a} [f_1(x) - i\alpha g_1(x)] - e^{i\alpha a} [f_2(x) - i\alpha g_2(x)] \quad (18)$$

を得る。但し、

$$\left. \begin{aligned} f_{1,2}(x) &= (2\pi)^{-1/2} [\partial \phi_r(x, z) / \partial z]_{z=\pm a \pm 0}, \\ g_{1,2}(x) &= (2\pi)^{-1/2} [\phi_r(x, z)]_{z=\pm a \pm 0}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

又、式(18)において  $\Gamma = (\alpha^2 - \varepsilon_r \mu_r k^2)^{1/2}$  であり、 $\Gamma$ の分岐は $\gamma$ の場合と同様、 $\text{Re} \Gamma > 0$ なるものを採用する。角柱の存在しない区間  $|z| > a$  においては式(4)より式(12)が得られるから、式(12)の両辺に  $(2\pi)^{-1/2} e^{i\alpha z}$  を掛け、 $z$  について  $-\infty$  から  $-a$  まで積分した後に境界条件

$$\left( \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right)_{z=\pm a \pm 0} = \mu_r^{-1} \left( \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right)_{z=\pm a \mp 0}, (\phi')_{z=\pm a \pm 0} = (\phi')_{z=\pm a \mp 0} \quad (20)$$

を用いて整理すれば、 $\alpha$ が下半平面  $\tau < k_2 \cos \theta_0$  に属するものとして次式が導かれる。

$$(d^2 / dx^2 - \gamma^2)\Psi_-(x, \alpha) = -\mu_r^{-1} f_1(x) + i\alpha g_1(x). \quad (21)$$

同様に式(12)の両辺に  $(2\pi)^{-1/2} e^{i\alpha z}$  を掛け、 $z$  について  $a$  から  $\infty$  まで積分し、式(20)を考慮すると、 $\alpha$ が  $k \cos \theta_0$  を除く上半平面  $\tau > -k_2 \cos \theta_0$  に属するものとして

$$(d^2 / dx^2 - \gamma^2)\Psi_{(+)}(x, \alpha) = \mu_r^{-1} f_2(x) - i\alpha g_2(x) \quad (22)$$

を得る。式(15)を考慮すれば、式(18), (21), (22)が領域  $|x| < b$  における変換波動方程式であることが分かる。

### 3. 連立 Wiener-Hopf 方程式

前節において述べたように $\gamma$ の分岐は $\text{Re} \gamma > 0$ であったから、放射条件および境界条件

$$\Phi(\pm b + 0, \alpha) = \Phi(\pm b - 0, \alpha) \quad (23)$$

を考慮すれば、領域  $|x| > b$  における変換波動方程式(13)の解は以下のように表すことができる。

$$\Phi(x, \alpha) = \Phi(\pm b, \alpha) e^{\mp \gamma(x \mp b)}, \quad x \gtrless \pm b. \quad (24)$$

次に、領域  $|x| < b$  における変換波動方程式(18), (21), (22)の解を求める。媒質の不連続に起因して現れる非斉次項  $f_m(x), g_m(x)$  ( $m=1,2$ )を便宜上、以下に示すFourier正弦級数に展開する。

$$\left. \begin{aligned} f_m(x) \\ g_m(x) \end{aligned} \right\} \sim \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} f_{mn} \\ g_{mn} \end{aligned} \right\} \sin \frac{n\pi}{2b}(x+b), \quad |x| < b. \quad (25)$$

この展開を考慮すると、式(18), (21), (22)の解は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \Psi_{(+)}(x, \alpha) &= \Psi_{(+)}(b, \alpha) \frac{\sinh \gamma(x+b)}{\sinh 2\gamma b} \\ &\quad - \Psi_{(+)}(-b, \alpha) \frac{\sinh \gamma(x-b)}{\sinh 2\gamma b} \\ &\quad \pm \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{1n,2n}^r(\alpha)}{\alpha^2 + \gamma_n^2} \sin \frac{n\pi}{2b}(x+b), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1^r(x, \alpha) &= \Phi_1^r(b, \alpha) \frac{\sinh \Gamma(x+b)}{\sinh 2\Gamma b} \\ &\quad - \Phi_1^r(-b, \alpha) \frac{\sinh \Gamma(x-b)}{\sinh 2\Gamma b} \\ &\quad - \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha a} C_{1n}^r(\alpha) - e^{i\alpha a} C_{2n}^o(\alpha)}{\alpha^2 + \Gamma_n^2} \sin \frac{n\pi}{2b}(x+b). \end{aligned} \quad (27)$$

但し、 $C_{mn}^{r,o}(\alpha)$  ( $m=1,2$ )はFourier係数であり、次式で定義される。

$$C_{mn}^o(\alpha) = f_{mn} - i\alpha g_{mn}, \quad C_{mn}^r(\alpha) = \mu_r^{-1} f_{mn} - i\alpha g_{mn}, \quad (28)$$

$$\gamma_n = \left[ (n\pi / 2b)^2 - k^2 \right]^{1/2}, \quad \Gamma_n = \left[ (n\pi / 2b)^2 - \varepsilon_r \mu_r k^2 \right]^{1/2}. \quad (29)$$

従って、式(26), (27)を式(15)に代入すれば、領域  $|x| < b$  における $\Phi(x, \alpha)$ の具体形を導くことができる。

以上の結果を総合すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Phi(x, \alpha) &= \Phi(\pm b, \alpha) e^{\mp \gamma(x \mp b)}, \quad x \gtrless b, \\ &= \tilde{\Phi}(b, \alpha) \frac{\sinh \gamma(x+b)}{\sinh 2\gamma b} - \tilde{\Phi}(-b, \alpha) \frac{\sinh \gamma(x-b)}{\sinh 2\gamma b} \\ &\quad - \Phi_1^r(b, \alpha) \frac{\sinh \Gamma(x+b)}{\sinh 2\Gamma b} + \Phi_1^r(-b, \alpha) \frac{\sinh \Gamma(x-b)}{\sinh 2\Gamma b} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{C_{1n}^r(\alpha) - e^{2i\alpha a} C_{2n}^r(\alpha)}{\alpha^2 + \gamma_n^2} - \frac{C_{1n}^o(\alpha) - e^{2i\alpha a} C_{2n}^o(\alpha)}{\alpha^2 + \Gamma_n^2} \right] \\ &\quad \cdot \frac{1}{b} \sin \frac{n\pi}{2b}(x+b) e^{-i\alpha a}, \quad |x| < b. \end{aligned} \quad (30)$$

但し、

$$\tilde{\Phi}(x, \alpha) = e^{-i\alpha a} \Psi_-(x, \alpha) + e^{i\alpha a} \Psi_{(+)}(x, \alpha). \quad (31)$$

式(30)を用いて若干の計算を行うことにより、 $\alpha$ が帯領域  $|\tau| < k_2 \cos \theta_0$  に属するものとして、以下の各式が導かれる。

$$\frac{S_1(\alpha)}{K(\alpha)} = -\frac{e^{-i\alpha a}U_-(\alpha) + e^{i\alpha a}U_{(+)}(\alpha)}{L(\alpha)} + \frac{1}{b} \sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \frac{n\pi}{b} \frac{e^{-i\alpha a}C_{1n}^r(\alpha) - e^{i\alpha a}C_{2n}^r(\alpha)}{\alpha^2 + \gamma_n^2} - \frac{1}{\mu_r b} \sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \frac{n\pi}{b} \frac{e^{-i\alpha a}C_{1n}^o(\alpha) - e^{i\alpha a}C_{2n}^o(\alpha)}{\alpha^2 + \Gamma_n^2}, \quad (32)$$

$$\frac{D_1(\alpha)}{M(\alpha)} = -\frac{e^{-i\alpha a}V_-(\alpha) + e^{i\alpha a}V_{(+)}(\alpha)}{N(\alpha)} - \frac{1}{b} \sum_{n=2, \text{even}}^{\infty} \frac{n\pi}{b} \frac{e^{-i\alpha a}C_{1n}^r(\alpha) - e^{i\alpha a}C_{2n}^r(\alpha)}{\alpha^2 + \gamma_n^2} + \frac{1}{\mu_r b} \sum_{n=2, \text{even}}^{\infty} \frac{n\pi}{b} \frac{e^{-i\alpha a}C_{1n}^o(\alpha) - e^{i\alpha a}C_{2n}^o(\alpha)}{\alpha^2 + \Gamma_n^2}. \quad (33)$$

但し,

$$\left. \begin{aligned} S_1(\alpha) &= \Phi_1^r(b, \alpha) + \Phi_1^r(-b, \alpha), \\ D_1(\alpha) &= \Phi_1^r(b, \alpha) - \Phi_1^r(-b, \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{(+)}(\alpha) &= \Psi_{(+)}(b, \alpha) + \Psi_{(+)}(-b, \alpha), \\ V_{(+)}(\alpha) &= \Psi_{(+)}(b, \alpha) - \Psi_{(+)}(-b, \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} K(\alpha) &= (\gamma + \mu_r^{-1} \Gamma \tanh \Gamma b)^{-1}, \quad L(\alpha) = e^{-\gamma b} \gamma^{-1} \cosh \gamma b, \\ M(\alpha) &= (\gamma + \mu_r^{-1} \Gamma \coth \Gamma b)^{-1}, \quad N(\alpha) = e^{-\gamma b} \gamma^{-1} \sinh \gamma b. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

式(32), (33)は連立Wiener-Hopf方程式であり, 分解操作により解くことができる. なお, 式(36)により定義される  $K(\alpha), L(\alpha), M(\alpha), N(\alpha)$  は核関数である.

#### 4. 核関数の分解

核関数  $L(\alpha), N(\alpha)$  は以下に示す積形式に分解できることが知られている[12].

$$\left. \begin{aligned} L(\alpha) &= L_+(\alpha)L_-(\alpha) = L_+(\alpha)L_+(-\alpha), \\ N(\alpha) &= N_+(\alpha)N_-(\alpha) = N_+(\alpha)N_+(-\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

但し,  $C(=0.57721566\dots)$  を Euler 定数として,

$$L_+(\alpha) = \left( \frac{\cos kb}{k + \alpha} \right)^{1/2} \exp \left\{ \left[ \frac{i\alpha b}{\pi} \right] \left[ 1 - C + \ln \left( \frac{\pi}{2kb} \right) + i \frac{\pi}{2} \right] \right\} \cdot e^{i\pi/4} \exp \left( \frac{ib\gamma}{\pi} \ln \frac{\alpha - \gamma}{k} \right) \prod_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \left( 1 + \frac{\alpha}{i\gamma_n} \right) e^{2i\alpha b/n\pi}, \quad (38)$$

$$N_+(\alpha) = \left( \frac{\sin kb}{k} \right)^{1/2} \exp \left\{ \left[ \frac{i\alpha b}{\pi} \right] \left[ 1 - C + \ln \left( \frac{2\pi}{kb} \right) + i \frac{\pi}{2} \right] \right\} \cdot \exp \left( \frac{ib\gamma}{\pi} \ln \frac{\alpha - \gamma}{k} \right) \prod_{n=2, \text{even}}^{\infty} \left( 1 + \frac{\alpha}{i\gamma_n} \right) e^{2i\alpha b/n\pi}. \quad (39)$$

核関数  $K(\alpha), M(\alpha)$  については, 積形式の分解は複雑である. 小林が先に確立した手法[13]を適用することにより, この核関数は以下に示す積形式に分解できる.

$$\left. \begin{aligned} K(\alpha) &= K_+(\alpha)K_-(\alpha) = K_+(\alpha)K_+(-\alpha), \\ M(\alpha) &= M_+(\alpha)M_-(\alpha) = M_+(\alpha)M_+(-\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

但し,

$$K_{\pm}(\alpha) = K_{\pm}^{(1)}(\alpha) / K_{\pm}^{(2)}(\alpha), \quad M_{\pm}(\alpha) = M_{\pm}^{(1)}(\alpha) / M_{\pm}^{(2)}(\alpha). \quad (41)$$

ここで,  $K_{\pm}^{(1),(2)}(\alpha), M_{\pm}^{(1),(2)}(\alpha)$  は次の関数

$$K^{(1)}(\alpha) = e^{-\gamma b} \gamma^{-1} \cosh \Gamma b, \quad (42)$$

$$M^{(1)}(\alpha) = e^{-\gamma b} \Gamma^{-1} \sinh \Gamma b, \quad (43)$$

$$K^{(2)}(\alpha) = e^{-\gamma b} \gamma^{-1} (\gamma \cosh \Gamma b + \mu_r^{-1} \Gamma \sinh \Gamma b), \quad (44)$$

$$M^{(2)}(\alpha) = e^{-\gamma b} \gamma^{-1} (\gamma \sinh \Gamma b + \mu_r^{-1} \Gamma \cosh \Gamma b) \quad (45)$$

の分解関数を表し, 以下の各式で定義される.

$$K_+^{(1)}(\alpha) = \left( \frac{\cos k_r b}{k + \alpha} \right)^{1/2} \exp \left\{ \left[ \frac{i\alpha b}{\pi} \right] \left[ 1 - C + \ln \left( \frac{\pi}{2kb} \right) + i \frac{\pi}{2} \right] \right\} \cdot e^{i\pi/4} \exp \left( \frac{ib\gamma}{\pi} \ln \frac{\alpha - \gamma}{k} \right) \prod_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \left( 1 + \frac{\alpha}{i\Gamma_n} \right) e^{2i\alpha b/n\pi}, \quad (46)$$

$$M_+^{(1)}(\alpha) = \left( \frac{\sin k_r b}{k_r} \right)^{1/2} \exp \left\{ \left[ \frac{i\alpha b}{\pi} \right] \left[ 1 - C + \ln \left( \frac{2\pi}{kb} \right) + i \frac{\pi}{2} \right] \right\} \cdot \exp \left( \frac{ib\gamma}{\pi} \ln \frac{\alpha - \gamma}{k} \right) \prod_{n=2, \text{even}}^{\infty} \left( 1 + \frac{\alpha}{i\Gamma_n} \right) e^{2i\alpha b/n\pi}, \quad (47)$$

$$K_+^{(2)}(\alpha) = \sqrt{K^{(2)}(0)} (1 + \alpha/k)^{-1/2} \prod_{n=1}^N \left( 1 + \frac{\alpha}{\alpha_n^c} \right) \cdot \exp \left\{ -(1/\pi) \int_0^{\infty} \ln \left[ 1 + \alpha b / [(kb)^2 - t^2]^{1/2} \right] \right. \\ \left. \cdot \left[ 1 - (2\mu_r)^{-1} \frac{2t^2 + (t^2 t_r^{-1} - t_r) \sin 2t_r}{t^2 \cos^2 t_r + (\mu_r^{-1} t_r)^2 \sin^2 t_r} \right] dt \right\}, \quad (48)$$

$$M_+^{(2)}(\alpha) = \sqrt{M^{(2)}(0)} \prod_{n=1}^N \left( 1 + \frac{\alpha}{\alpha_n^c} \right) \cdot \exp \left\{ -(1/\pi) \int_0^{\infty} \ln \left[ 1 + \alpha b / [(kb)^2 - t^2]^{1/2} \right] \right. \\ \left. \cdot \left[ 1 - (2\mu_r)^{-1} \frac{2t^2 + (t_r - t^2 t_r^{-1}) \sin 2t_r}{(\mu_r^{-1} t_r)^2 \cos^2 t_r + t^2 \sin^2 t_r} \right] dt \right\}, \quad (49)$$

$$t_r = [t^2 + (\varepsilon_r \mu_r - 1)(kb)^2]^{1/2}, \quad k_r = (\varepsilon_r \mu_r)^{1/2} k. \quad (50)$$

又,  $\alpha_n^c (n=1, 2, 3, \dots, N_c), \alpha_n^s (n=1, 2, 3, \dots, N_s)$  は各々, 核関数  $K(\alpha), M(\alpha)$  のもつ 1 位の極である. これらの極は, 比誘電率  $\varepsilon_r$ , 比透磁率  $\mu_r$  の無限長スラブに沿って伝搬する表面波の固有値に対応する. 式(37), (40)に現れる分解関数  $L_{\pm}(\alpha), N_{\pm}(\alpha), K_{\pm}(\alpha), M_{\pm}(\alpha)$  はすべて  $\tau \geq \mp k_2$  において正則かつ非零であり,  $\alpha \rightarrow \infty$  において以下の漸近的振舞を示す.

$$L_{\pm}(\alpha), N_{\pm}(\alpha), K_{\pm}(\alpha), M_{\pm}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2}), \quad \tau \geq \mp k_2. \quad (51)$$

以上において得られた結果を用いて, 次節では Wiener-Hopf 方程式を解くこととする.

#### 5. Wiener-Hopf 方程式の解

式(32)の両辺に  $e^{\pm i\alpha a} L_{\pm}(\alpha)$  を掛け, 和形式の分解を施した後, 後に解析接続の原理, 端点条件, Watson の補助定理, 式(51) および Liouville の定理を考慮すると, 次式が導かれる.

$$\frac{U_{(+)}^{s,d}(\alpha)}{L_+(\alpha)} + \frac{2B \cos(kb \sin \theta_0)}{L_+(k \cos \theta_0)(\alpha - k \cos \theta_0)} \\ \mp \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{e^{2i\beta a} U_{(+)}^{s,d}(\beta)}{L_-(\beta)(\beta + \alpha)} d\beta \mp \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{e^{i\beta a} S_1^{s,d}(\beta) L_+(\beta)}{K(\beta)(\beta + \alpha)} d\beta \\ \pm \sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \frac{n\pi}{b^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{L_+(\beta) [C_m^{d,s}(\beta) \pm e^{2i\beta a} C_m^{d,s}(-\beta)]}{(\beta^2 + \gamma_n^2)(\beta + \alpha)} d\beta \\ \mp \sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \frac{n\pi}{\mu_r b^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{L_+(\beta) [C_{on}^{d,s}(\beta) \pm e^{2i\beta a} C_{on}^{d,s}(-\beta)]}{(\beta^2 + \Gamma_n^2)(\beta + \alpha)} d\beta \\ = 0. \quad (52)$$

但し,

$$U_{(+)}^{s,d}(\alpha) = U_{(+)}(\alpha) \pm U_{-}(-\alpha), \quad S_1^{s,d}(\alpha) = S_1(\alpha) \pm S_1(-\alpha), \quad (53)$$

$C_{on}^{d,s}(\alpha) = C_{1n}^o(\alpha) \mp C_{2n}^o(-\alpha)$ ,  $C_m^{d,s}(\alpha) = C_n^r(\alpha) \mp C_{2n}^r(-\alpha)$  (54) であり,  $C_2$  は図 2 に示すような実軸に平行に走る無限積分路である.

式(52)に含まれる積分の評価を行い, 結果を整理すると, 若干の計算の後に以下の各式が得られる.

$$\begin{aligned} & \frac{U_{(+)}^{s,d}(\alpha)}{L_+(\alpha)} \pm \frac{2 \cos(kb \sin \theta_0)}{(2\pi)^{1/2} i} \\ & \left[ \frac{e^{ika \cos \theta_0}}{L_-(k \cos \theta_0)(\alpha + k \cos \theta_0)} + \frac{e^{-ika \cos \theta_0}}{L_+(k \cos \theta_0)(\alpha - k \cos \theta_0)} \right] \\ & \mp \frac{1}{\pi i} \int_k^{k+i\infty} \frac{e^{i\beta a} L_+(\beta) (\beta^2 - k^2)^{1/2}}{(\beta + \alpha)} \left[ e^{i\beta a} U_{(+)}^{s,d}(\beta) + S_1^{s,d}(\beta) \right] d\beta \\ & \pm \sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{2b} \right)^2 \frac{L_+(i\gamma_n) \left[ P_m^{s,d} U_{(+)}^{s,d}(i\gamma_n) + e^{-a\Gamma_n} Q_m^{s,d} S_1^{s,d}(i\Gamma_n) \right]}{bi\gamma_n(\alpha + i\gamma_n)} \\ & = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

但し,

$$P_m^{s,d} = \frac{e^{-2a\Gamma_n} \pm \rho_n}{1 \pm \rho_n e^{-2a\Gamma_n}}, \quad Q_m^{s,d} = \frac{2\gamma_n}{(\mu_r \gamma_n + \Gamma_n)(1 \pm \rho_n e^{-2a\Gamma_n})}, \quad (56)$$

$$\rho_n = (\mu_r \gamma_n - \Gamma_n) / (\mu_r \gamma_n + \Gamma_n). \quad (57)$$

式(55)には未知スペクトル関数  $U_{(+)}^{s,d}(\alpha)$ ,  $S_1^{s,d}(\alpha)$  を被積分関数にもつ無限積分, および未知数  $U_{(+)}^{s,d}(i\gamma_n)$ ,  $S_1^{s,d}(i\Gamma_n)$  ( $n=1, 3, 5, \dots$ ) が含まれているため, これらは Wiener-Hopf 方程式(32)の形式解に過ぎない. 従って, 無限積分を近似的に評価したうえで未知数を数値的に決定する必要があるが, 小林らが論文[8]-[10]で確立した手法を適用すれば, この操作を実行することができる.

以上の解析は式(32)の解法に関するものであるが, さらに式(40)を考慮して式(32)の両辺に  $e^{\pm ia\alpha} K_{\mp}(\alpha)$  を掛け, 式(33)についても, 両辺に  $e^{\pm ia\alpha} N_{\pm}(\alpha)$ ,  $e^{\pm ia\alpha} M_{\mp}(\alpha)$  を掛け, 分解操作を施せば, 式(55)に類似の形式解  $S_1^{s,d}(\alpha)$ ,  $V_{(+)}^{s,d}(\alpha)$ ,  $D_1^{s,d}(\alpha)$  を導くことができる. なお, 近似解の導出の詳細については, 紙面の制約上, 記述を省略する.

## 6. 散乱遠方界

実空間における散乱界は, 次の Fourier 逆変換

$$\phi(x, z) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \Phi(x, \alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha, \quad |c| < k_2 \cos \theta_0 \quad (58)$$

を評価することによって導かれる. 便宜上,  $x = \rho \sin \theta$ ,  $z = \rho \cos \theta$  ( $-\pi < \theta < \pi$ ) なる座標変換を施し, 鞍部点法を適用することにより, 散乱遠方界の漸近表現が  $x \geq \pm b$ , ( $k\rho \rightarrow \infty$ ) において, 以下のように導かれる.

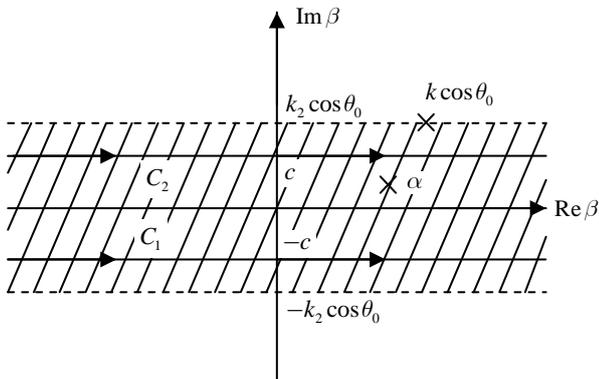


図 2. 積分路  $C_1, C_2$  ( $0 < |\tau| < c < k_2 \cos \theta_0$ ).

$$\phi(\rho, \theta) \sim \pm \Phi(\pm b, -k \cos \theta) k \sin \theta \frac{e^{i(k\rho - \pi/4)}}{(k\rho)^{1/2}}. \quad (59)$$

但し,

$$\begin{aligned} & \Phi(\pm b, \alpha) \\ & = \frac{1}{4} \left( e^{-i\alpha a} \left\{ [U_{(+)}^s(-\alpha) - U_{(+)}^d(-\alpha)] \pm [V_{(+)}^s(-\alpha) - V_{(+)}^d(-\alpha)] \right\} \right. \\ & \quad \left. + \left\{ [S_1^s(\alpha) + S_1^d(\alpha)] \pm [D_1^s(\alpha) + D_1^d(\alpha)] \right\} \right. \\ & \quad \left. + e^{i\alpha a} \left\{ [U_{(+)}^s(\alpha) + U_{(+)}^d(\alpha)] \pm [V_{(+)}^s(\alpha) + V_{(+)}^d(\alpha)] \right\} \right). \end{aligned} \quad (60)$$

## 7. むすび

本研究では, 任意定数の誘電率, 透磁率を持つ媒質からなる四角柱による平面電磁波の回折問題を取り上げ,  $E$  波入射の場合について, Wiener-Hopf 法による厳密な解析を行った. 得られた解析結果は, 角柱内部の多重反射及び端点における多重回折による効果を厳密に考慮しているため, 角柱断面の幅が波長程度以上であれば, 一様に有効である.

## 謝辞

本研究を取組むにあたり, 多大なる御指導・御助言を頂いた小林一哉教授に心から感謝致します.

## 文献

- [1] K. K. Mei and J. G. Van Bladel, "Scattering by perfectly conducting rectangular cylinders," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 11, pp. 185-192, 1963.
- [2] W. D. Burnside, C. L. Yu, and R. J. Marhefka, "A technique to combine the geometrical theory of diffraction and the moment method," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 23, pp. 551-558, 1975.
- [3] 森田, "方形誘電体柱による散乱の積分方程式法による解析," *信学論(B)*, vol. J57-B, pp. 609-616, 1974.
- [4] 富田, 安浦, "誘電体柱による平面波回折の数値解析," *信学論(B)*, vol. J62-B, pp. 132-139, 1979.
- [5] 内田, 松永, 青木, "損失誘電体角柱による平面電磁波の散乱," *信学論(B)*, vol. J65-B, pp. 1417-1424, 1982.
- [6] K. Kobayashi, "Diffraction of a plane electromagnetic wave by a rectangular conducting rod (I) - Rigorous solution by the Wiener-Hopf technique -, " *Bull. Fac. Sci. Eng., Chuo Univ.*, vol. 25, pp. 229-261, 1982.
- [7] K. Kobayashi, "Diffraction of a plane electromagnetic wave by a rectangular conducting rod (II) - High frequency asymptotic expansions of the diffracted field -, " *Bull. Fac. Sci. Eng., Chuo Univ.*, vol. 25, pp. 262-282, 1982.
- [8] 小林, "誘電体四角柱による平面電磁波の回折 (I)," 電気学会電磁界理論研資, No. EMT-80-46, 1980.
- [9] 小林, "誘電体四角柱による平面電磁波の回折 (II)," 電気学会電磁界理論研資, No. EMT-81-3, 1981.
- [10] 井上, 小林, "誘電体四角柱による平面電磁波の回折 - Wiener-Hopf 法による精密解と数値解析 -, " 電気学会電磁界理論研資, No. EMT-87-9, 1987.
- [11] 齊木, 越川, 小林, "薄い媒質ストリップによる平面  $E$  波の回折: Wiener-Hopf 法による解析," 電気学会電磁界理論研資, EMT-11-150, 2011.
- [12] 中山, 小林, "角柱による平面波の回折: Wiener-Hopf 法による解析," 電気学会電磁界理論研資, No. EMT-11-151, 2011.
- [13] K. Kobayashi, "On the factorization of certain analytic functions appearing in the Wiener-Hopf technique," *Bull. Fac. Sci. Eng., Chuo Univ.*, vol. 26, pp. 129-149, 1983.