東北大学機関リポジトリ
TOUR
Tohoku University Repository

量子複製不可能定理とその一般化

著者	吉村　直樹
学位授与機関	Tohoku University
URL	http://hdl.handle.net/10097/35085

修士論文

量子複製不可能定理とその一般化

東北大学情報科学研究科　情報基礎科学専攻
指導教官　小澤　正直

吉村　直樹

目 次

0 序論

量子複製不可能性は1982年、WoottersとZurek [2] また、独立にDieks [3] によって指摘され、研究が始まった。彼等は、量子ビット系の複製が不可能である例（純粋状態の例）を構築し、量子状態の複製が一般に不可能であることを示した。さらに、1986年にYuen [4] によって、２つの純粋状態の複製可能性の必要十分条件が純粋状態同士の直交性によって表されることが示された。そして、混合状態も含む一般の量子状態の複製可能性の必要十分条件は、1996年にBarnum達によって明らかにされた [5]。彼等は量子系の時間発展が一般にトレースを保存する完全正写像で記述されることを利用して、複製に限らず、それを一般化した配送可能性に関する議論を展開し、量子複製不可能定理（No-cloning theorem）及び配送不可能定理（No-broadcasting theorem）を定式化した。この定理により、２つの異なる量子状態が複製及び配送可能となる必要十分条件が、量子状態同士が直交及び可換であることが導かれた。これにより一般に、非直交の量子状態の複製は禁止され、また、非可換な量子状態は、複製はおろか配送も不可能であることが結論される。この結果は、古典と量子の相違を際立たせる結果の１つである。

量子の世界では、古典の世界で可能なことが、必ずしもできるとは限らない [1]。ところが、この不可能性の事実は、逆に古典では不可能なことを可能とする応用につながることもある。例えば、量子複製不可能性から、無条件に安全な暗号（量子暗号）が可能となる。

このようにBarnum等の結果は、物理的に非常に有用な定理であるが、彼等の証明は、初等的数学を用いた議論であるものの、必ずしも簡明なものではない。そのため、Lindbladは、作用素代数の標準的手法を用いて、量子配送不可能性定理の再導出を試みた [6]。本研究では、量子複製及び配送不可能定理に関する一般的で詳細なレビューを行う。まず始めに、本研究に必要な量子論及び量子情報理論の基礎知識を概観し、Barnum [5] 及びLindblad [6] の論文を詳細に説明する。またLindbladに従い、作用素代数の手法を用いて配送不可能性の証明を試みる。ただし、Barnum及びLindbladの論文で仮定されているように、本研究で取り扱う量子系は、全て有限次元Hilbert空間で記述される系に限る。

第１節では（有限次元）量子力学を公理論的な立場から説明し、量子情報の研究などで広く用いられているPOVM（Positive Operator Valuded Measure, Probabilty Operator Valuded Measure) や部分トレースなど量子力学の基礎知識について説明する。第２節では量子系の状態変化を記述する量子オペレーションについて説明する。ここでは量子オペレーションの性質を調べ、またそれと密接に関係する完全正写像の性質について説明する。第３節では２つの量子状態の近さを表す忠実度及びトレース距離がどのような性質を持つのかを述べ、さらに両者の関係について議論する。この第３節の定理3.4の証明ではFuchsの論文 [7] を参考にした。第４節では、Barnum等に従い、忠実度の性質を用いた量子複製及び配送不可能性定理を証明する。また、複数個の複製不可能性定理を構築し、複製不可能性定理の一般化を行う。最後に第５節では、複数個の量子状態の集合に対する配送不可能性を作用素代数の手法を用いて議論する。

[1] 逆に、量子コンピュータや量子テレポーテーションなど、古典で不可能なことが量子で可能となることも多い。

1 量子力学の公理と数学的基礎

本節では量子力学でよく用いられる記法、及び本稿で必要となる線形代数の知識に関して説明する。

1.1 記号の説明

- $\mathbb{C}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{N}$ をそれぞれ複素数、実数、整数、自然数の集合とする。また $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) を n 次元実（複素）ベクトル空間、$M(n)$ を $n\times n$ 複素行列全体とする。

- Hilbert 空間 (完備な内積空間)$\mathcal{H}$ のベクトルを $|v\rangle$ で表わし、$|\psi\rangle$ と $|\phi\rangle$ の内積を $\langle\psi|\phi\rangle$、$|\psi\rangle$ のノルムを $\||\psi\|| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$ と記す。ここで内積は物理学の習慣に従い、右側で線形、左側で共役線形とする。本稿で扱う Hilbert 空間は、全て有限次元と仮定する。また、線形作用素 A に対して $\langle\psi|A|\phi\rangle$ は $|\psi\rangle$ と $A|\phi\rangle$ の内積とする。

- $|v\rangle, |w\rangle$ をそれぞれ Hilbert 空間 $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ のベクトルとする。このとき $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への線形作用素 $|w\rangle\langle v|$ を、
$$(|w\rangle\langle v|)|v'\rangle = \langle v|v'\rangle|w\rangle \ (|v'\rangle \in \mathcal{H})$$
で定義する。

- 線形作用素 A の共役作用素を $A^\dagger$ で記す。

- A と B の交換子を $[A,B] = AB - BA$ で定義する。

1.2 スペクトル分解、極分解、同時対角化

この節では量子力学でよく用いられるスペクトル分解、極分解、同時対角化について説明する。

Hilbert 空間上の線形作用素 A は、(i) $[A, A^\dagger] = 0$、(ii) $A = A^\dagger$, (iii) $A \geq 0$ ($\Leftrightarrow$ $\forall|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, $\langle\psi|A|\psi\rangle \geq 0$)、(iv) $A^2 = A = A^\dagger$、(v) $AA^\dagger = A^\dagger A = I$ を満たすとき、それぞれ、(i) 正規作用素、(ii) 自己共役作用素、(iii) 正値作用素、(iv) 射影作用素、(v) ユニタリ作用素と呼ばれる。射影作用素ならば正値作用素、正値作用素ならば自己共役作用素、自己共役作用素ならば正規作用素、ユニタリ作用素ならば正規作用素である。射影作用素の固有値は 0 または 1、正値作用素の固有値は非負実数、自己共役作用素の固有値は実数、ユニタリ作用素の固有値は絶対値が 1 である。A の固有値の集合をスペクトルと呼ぶ。ここで Hilbert 空間の次元が有限であるため、スペクトルは有限集合であることに注意する。

定理 1.1 (スペクトル分解定理) A を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の正規作用素とする。A のスペクトルを $\{a_i\}_{i=1}^{l}$、固有値 a_i の固有空間への射影作用素を P_i とすると、A は

$$A = \sum_{i=1}^{l} a_i P_i$$

と表わされる。ここで、$P_i P_j = \delta_{ij} P_i$（直交性)、$\sum_i P_i = I$（完全性）が成立する。

よって、固有値の重複度を考慮したとき、$\mathcal{H}$ の正規直交基底 $|i\rangle$ により

$$A = \sum_i a_i |i\rangle\langle i|$$

と表わすことができる（固有値展開定理)。

[**作用素の関数**] A を正規作用素とする。複素関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の定義域が A のスペクトルに含まれるとき、関数 $f(A)$ が、スペクトル分解 $A = \sum_i a_i P_i$ を用いて $f(A) = \sum_i f(a_i) P_i$ で定義される。例えば、正値作用素 A に対し、$\sqrt{A}$ は

$$\sqrt{A} = \sum_i \sqrt{a_i} P_i$$

となる。

次に一般の線形作用素をユニタリ作用素と正値作用素の積に分解する極分解について述べる。

定理 1.2 (極分解) A を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素とする。このときあるユニタリ作用素 U が存在して

$$A = UJ = KU$$

を満たす。ここで $J = \sqrt{A^\dagger A},\ K = \sqrt{AA^\dagger}$ である。$A = UJ$ を**左極分解**、$A = KU$ を**右極分解**という。

また定理の J は正値作用素なのでその表現行列はユニタリ行列で対角化可能である。つまりあるユニタリ行列 T と成分が全て 0 以上の対角行列 D で $J = TDT^\dagger$ となる。このとき $S = UT,\ V = T^\dagger$ とすれば、線形作用素 A の表現行列はユニタリ行列 S, V と対角行列 D を用いて

$$A = SDV$$

と分解できる。この分解を**特異値分解**という。

最後に同時対角化について述べておく。

定理 1.3 (同時対角化) $\{A_i\}$ を正規作用素の集合とする。このとき次の 2 つの条件は同値である。

(1) $\{A_i\}$ は可換である。すなわち、任意の i と j に対して $[A_i, A_j] = 0$ を満たす。

(2) $\{A_i\}$ は同時対角化可能である。すなわち、$\sum_i P_i = I$ を満たす直交射影作用素 $\{P_i\}$ が存在して各 A_i は

$$A_i = \sum_k a_k^{(i)} P_i \quad (a_k^{(i)} \in \mathbb{C})$$

と表わすことができる。

1.3 量子力学の公理

原子などの微視的な世界の基本法則は、量子力学と呼ばれる物理理論によって記述されることが知られている。本節では量子系、状態、時間発展、及び測定などの基礎概念を通じて、量子力学の公理について説明する [8]。

公理 1.1 (状態空間) 任意の（有限次元）量子系 A には、ある Hilbert 空間 $\mathcal{H}_A$ が対応しており、系の状態空間と呼ばれる。その系の状態は、密度作用素と呼ばれる $\mathcal{H}$ 上のトレースが 1 の正値作用素 ρ によって記述され、その系の観測（可能）量は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素によって記述される。

以下、密度作用素の集合を $S(\mathcal{H})$ で記す。密度作用素 ρ が単位ベクトル $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ によって

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

と表されるとき、ρ は**純粋状態**と呼ばれ、$|\psi\rangle$ を状態ベクトルという。状態が純粋状態でないとき、**混合状態**という。

系の状態概念が定まると、次にその時間発展を記述する必要がある。古典力学では、Newton の運動方程式が支配するように、量子系には Schrödinger 方程式と呼ばれる基本法則が知られている。ここでは、ユニタリ発展としての量子系の時間発展を公理として述べる。

公理 1.2 (孤立系の時間発展) 孤立系（他の系と相互作用していない系）の時間発展はユニタリ変換によって記述される。すなわち、時刻 t_1 における系の状態 ρ と時刻 t_2 における系の状態 ρ' は、t_1, t_2 にのみ依存するユニタリ作用素 U により、

$$\rho' = U\rho U^\dagger$$

と記述される。

系が孤立系でない場合、時間発展は非ユニタリ発展を伴うこともある。このことは、第 2 節で詳しく説明する。

量子系では、観測量は Hilbert 空間上の線形作用素で表され、Born の統計公式と呼ばれる法則を通じて測定結果が記述される：

公理 1.3 (Born の統計公式) 状態 ρ の下で観測量 A を測定したとき、測定値 $a \in \mathbb{R}$ を得る確率は

$$\Pr(A = a \parallel \rho) = \mathrm{Tr}[E^A(a)\rho]$$

で与えられる。ここで $E^A(a)$ は部分空間 $\{|\psi\rangle \in \mathcal{H} \mid A|\psi\rangle = a|\psi\rangle\}$ への射影作用素である。

$E^A(a)$ は、a が A の固有値である場合のみ零作用素でないため、測定値は A の固有値に限られることがわかる。また、状態 ρ のとき観測量 A の期待値 $\langle A\rangle$ は

$$\langle A\rangle = \mathrm{Tr}(A\rho)$$

で与えられる。

以上により、1つの量子系を記述する道具がそろったことになる。続いて、2つの量子系があるときに、その合成系を記述するための公理を説明する。

公理 1.4 量子系 A の状態空間を $\mathcal{H}_A$、量子系 B の状態空間を $\mathcal{H}_B$ とする。このとき合成系 $A+B$ の状態空間はテンソル積 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ で与えられる。系 A, B の観測量 $M,\ M'$ は、それぞれ合成系 $A+B$ の観測量 $M \otimes I_B,\ I_A \otimes M'$ と同一視される。

2つのベクトル $|\psi\rangle$ と $|\phi\rangle$ のテンソル積を $|\psi\rangle|\phi\rangle$ で表す。

以上により、量子系を記述する道具立ては全てそろったことになる。

1.4 部分トレース

本節では、部分トレース（partial trace）を導入し、全体系の状態から、部分系の状態を得る方法を説明する。

$L(\mathcal{H})$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素全体とする。任意の $A, B \in L(\mathcal{H})$ に対して $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\dagger B)$ と定義する。このとき $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は内積になる（この内積を Hilbert-Schmidt 内積と呼ぶ)。次に $\mathcal{K}$ を Hilbert 空間としたとき、$L(\mathcal{H})$ から $L(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ への線形写像 f を $f(A) = A \otimes I$ で定義する。このとき線形写像 $f^\dagger : L(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \to L(\mathcal{H})$ を

$$\langle A, f^\dagger(X)\rangle = \langle f(A), X\rangle = \langle A \otimes I, X\rangle\ (A \in L(\mathcal{H})\ ,\ X \in L(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}))$$

で定義する。この $f^\dagger$ を $\mathcal{K}$ の部分トレースといい、$f^\dagger = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}$ で表わす [8]。

部分トレースは次のような性質をもつ。

命題 1.1 任意の $B \in L(\mathcal{H})\ ,\ C \in L(\mathcal{K})$ に対して

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}(B \otimes C) = \mathrm{Tr}(C)B$$

を満たす。

証明）任意の $A \in L(\mathcal{H})$ に対して

$$\langle A, \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}(B \otimes C)\rangle = \langle A \otimes I, B \otimes C\rangle = \mathrm{Tr}(A^\dagger B \otimes C) = \mathrm{Tr}(A^\dagger B)\,\mathrm{Tr}(C) = \langle A, \mathrm{Tr}(C)B\rangle$$

となるので $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}(B \otimes C) = \mathrm{Tr}(C)B$ である。

（証明終）

つまり、部分トレースは名前のとおり、片方のトレースを施す演算に他ならない。

合成量子系 $A+B$ の状態が ρ であるとき、部分系 A（もしくは B）の状態を部分トレースを用いて記述できる。以下では、部分系 B の状態空間 $\mathcal{H}_B$ への部分トレースを Tr_B と書く。

定理 1.4 (部分系の状態) ρ を合成系 $A+B$ の状態、ρ_A を系 A の状態としたとき、

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B(\rho)$$

となる。

証明）まず、$\mathrm{Tr}_B(\rho)$ が系 A 上の密度作用素であることを証明する。$\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$ をそれぞれ系 A, B の状態空間とし、任意に単位ベクトル $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A$ をとる。このとき

$$\langle\psi|\,\mathrm{Tr}_B(\rho)|\psi\rangle = \mathrm{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|\,\mathrm{Tr}_B(\rho)) = \langle|\psi\rangle\langle\psi|, \mathrm{Tr}_B(\rho)\rangle = \langle|\psi\rangle\langle\psi| \otimes I, \rho\rangle = \mathrm{Tr}((|\psi\rangle\langle\psi|\otimes I_B)\,\rho) \geq 0$$

が成り立つので $\mathrm{Tr}_B(\rho)$ は正値作用素である。さらに

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_B(\rho)) = \mathrm{Tr}(I_A\,\mathrm{Tr}_B(\rho)) = \mathrm{Tr}((I_A \otimes I_B)\rho) = \mathrm{Tr}(\rho) = 1$$

が成り立つので $\mathrm{Tr}_B(\rho)$ は系 A 上の密度作用素である。
続いて、この密度作用素 $\mathrm{Tr}_B(\rho)$ が系 A の状態 ρ_A に一致することを証明する。系 A の任意の観測量 M は、合成系 $A+B$ における観測量 $M \otimes I_B$ と同一視される (公理 1.4)。このとき期待値を考えると、系 A の視点では $\mathrm{Tr}(M\rho^A)$ となるが、全体系の状態 ρ の視点では、$\mathrm{Tr}((M \otimes I_B)\rho)$ となり、両者は一致しなくてはならない：

$$\mathrm{Tr}(M\rho^A) = \mathrm{Tr}((M \otimes I_B)\;\rho).$$

一方、$\mathrm{Tr}(\rho(M \otimes I_B)) = \langle M \otimes I_B, \rho\rangle = \langle M, \mathrm{Tr}_B(\rho)\rangle$ に注意すると、任意の自己共役作用素 M に対して $\mathrm{Tr}(M\rho^A) = \mathrm{Tr}(M\,\mathrm{Tr}_B(\rho))$ が成り立つ。よって、$\rho^A = \mathrm{Tr}_B(\rho)$ を得る。

（証明終）

1.5 （離散的）POVM

第 1.3 節において観測量は、量子系に付随する Hilbert 空間上の自己共役作用素で記述されることを説明した。しかし一般の測定では、ある量子系 A を測定装置と適切な相互作用をさ

せ、測定装置の観測量（メータ）を読み取ることで、量子系 A の観測量以外の測定も可能である。このような間接測定も考慮に入れた最も一般的な測定による測定値の確率分布は、POVM (Positive Operator Valued Measure, Probability Operator Valued Meausre) [9] によって記述されることが知られている（論文 [10] 及びその参考文献を参照)。

定義 1.1 (離散的 POVM) 正値作用素の有限個の集合 $\{E_m\}_{m=1}^{l}$ が $\sum_{m=1}^{l} E_m = I$ を満たすとき、$\{E_m\}$ を（離散的）POVM という。

測定値が有限個の場合の一般測定は、離散的 POVM により記述されることがわかる。ここでは、前節で導入した公理に基づき、次のような間接測定モデルを用いて POVM による測定を説明する。

量子系 A に対し、ある量子系 B（測定装置）を状態 σ に用意し、量子系 A の状態 ρ と量子系 B との合成系の状態 $\rho\otimes\sigma$ を公理 1.2 に従って、あるユニタリ作用素 U によって時間発展させると、全体系の状態は $U\rho\otimes\sigma U^\dagger$ となる。このとき、量子系 B の物理量 M（メータ物理量）を測定すると、公理 1.3 により、測定結果 m を得る確率は $\mathrm{Tr}_{A+B}\left((U\rho\otimes\sigma U^\dagger)(I_A\otimes E^M(m))\right)$ である。ここで、$E_m = \mathrm{Tr}_B\left((I_A\otimes\sigma)(U^\dagger(I_A\otimes E^M(m))U)\right)$ とすると、$\{E_m\}$ が系 A 上の離散的 POVM であり、$\mathrm{Tr}_A(\rho E_m) = \mathrm{Tr}_{A+B}\left((U\rho\otimes\sigma U^\dagger)(I_A\otimes E^M(m))\right)$ を満たすことが容易に示される。よって、このような間接測定を、離散的 POVM$\{E_m\}$ に基づく測定と考え、状態 ρ の下で測定値 m を得る確率は $\mathrm{Tr}_A(\rho E_m)$ で与えられる。また逆に任意の離散的 POVM$\{E_m\}$ に対してある量子系 B、合成系 $A+B$ 上のユニタリ作用素 U、量子系 B の観測量 M が存在して $\mathrm{Tr}(\rho E_m) = \mathrm{Tr}\left((U\rho\otimes\sigma U^\dagger)(E^M(m)\otimes I_B)\right)$ を満たすため、任意の（離散的）POVM は間接測定によって実現可能な測定である。

特に離散的 POVM$\{E_m\}$ の全ての要素が射影作用素である、すなわち $E_mE_n = \delta_{mn}E_m$ を満たすとき、この POVM による測定は PVM (Projection Valued Measure) 測定といわれる。

続いて、POVM 測定の例を紹介する。次のような、アリス、ボブの二人の登場人物によるゲームを考察する：アリスは、量子系 $\mathcal{H}$ において、状態ベクトル $|\psi_1\rangle = |0\rangle, |\psi_2\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ で記述される二つの純粋状態を用意する（ここで、$|0\rangle, |1\rangle$ は $\mathcal{H}$ の正規直交系である)。アリスは、そのうちの片方をボブに与え、ボブは与えられた状態が $|\psi_1\rangle$、$|\psi_2\rangle$ のどちらであるかを当てる。

ボブは、適切な POVM 測定を通じて状態の推定を行うが、$|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ の非直交性より、確実に状態を当てることができないことが示される [15]。ところが、次のような POVM 測定を行うと、誤りのない状態識別が可能であることがわかる。実際、次の 3 つの要素

$$
\begin{aligned}
E_1 &\equiv \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}|1\rangle\langle 1| \\
E_2 &\equiv \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\frac{(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|)}{2} \\
E_3 &\equiv I - E_1 - E_2
\end{aligned}
$$

を含む POVM を考える（これらは正値作用素で $\sum_m E_m = I$ を満たすので、POVM である)。ボブに状態 $|\psi_1\rangle = |0\rangle$ が与えられたとする。彼は POVM$\{E_1, E_2, E_3\}$ によって記述される測定を行う。$\langle\psi_1|E_1|\psi_1\rangle = 0$ となるように E_1 を上手く選んだので、E_1 の結果が得られる確率は 0 である。それゆえにもし測定結果が E_1 ならば、ボブが受け取った状態は $|\psi_2\rangle$ であると断定できる。同様にもし測定結果が E_2 ならば、ボブが受け取った状態は $|\psi_1\rangle$ であることがわかる。しかしながら、測定結果 E_3 を得た場合は、ボブは与えられた状態がなんであるかを正確にあてることはできない。しかし重要な点は与えられた状態をボブは決して間違わないということである。

1.6 Schmidt 分解と純粋化

本節では、量子情報理論の研究において便利な道具である Schmidt 分解と純粋化 (purification) について説明する。

定理 1.5 (Schmidt 分解) $\mathcal{H}_A$ を n 次元 Hilbert 空間、$\mathcal{H}_B$ を m 次元 Hilbert 空間とする。任意の単位ベクトル $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ は、$\mathcal{H}_A$ と $\mathcal{H}_B$ のある正規直交系 $\{|i_A\rangle\}$, $\{|i_B\rangle\}$、及び、$\lambda_i > 0$, $\sum_i \lambda_i^2 = 1$ を満たす実数により、

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle|i_B\rangle$$

と表される。この分解を **Schmidt 分解**、λ_i を **Schmidt 係数**と呼ぶ。

証明）ぞれ $\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$ の正規直交基底とする。このとき任意の $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ は

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} a_{jk} |\psi_j\rangle|\varphi_k\rangle$$

と書くことができる。行列 A の jk 成分を a_{jk} とする。特異値分解によって、$A = UDV$ と表すことができる。ここで U, V はユニタリ行列、D は対角行列である。このとき

$$a_{jk} = \sum_{i,s} U_{js} D_{si} V_{ik} = \sum_i U_{ji} D_{ii} V_{ik}$$

となるので、

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j,k} U_{ji} D_{ii} V_{ik} |\psi_j\rangle|\varphi_k\rangle$$

である。このとき $|i_A\rangle = \sum_j U_{ji}|\psi_j\rangle$, $|i_B\rangle = \sum_k V_{ik}|\varphi_k\rangle$, $\lambda_i = d_{ii}$ とすると、$\{|i_A\rangle\}$, $\{|i_B\rangle\}$ はそれぞれ $\mathcal{H}_A$ と $\mathcal{H}_B$ の正規直交系になり、

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle|i_B\rangle$$

となる。また $n > m$ の場合、$\mathcal{H}_B$ の正規直交基底 $\{|\varphi_i\rangle\}_{i=1}^{m}$ に零ベクトルを加え $m = n$ とし、上の証明と同様の操作を行えば

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{m} |i_A\rangle|i_B\rangle$$

となる。

（証明終）

次に純粋化について紹介する。まず量子系 A の状態 ρ^A が与えられたとする。このとき新たに量子系 R を導入し、合成量子系 $A+R$ の状態を $\mathrm{Tr}_R(|AR\rangle\langle AR|) = \rho^A$ を満たす純粋状態 $|AR\rangle$ にすることができる。これを ρ^A の系 R への**純粋化**という。次に純粋状態 $|AR\rangle$ をどのようにして作るかを説明する。

ρ^A は密度作用素なので 0 以上の実数 $\{p_i\}$ と正規直交基底 $\{|i_A\rangle\}$ によって $\rho^A = \sum_i p_i|i_A\rangle\langle i_A|$ と表わせる。このとき系 R として系 A と同じ状態空間を持つものを用意する。またその正規直交基底を $\{|i_R\rangle\}$ とし、合成系 $A+R$ に対する純粋状態 $|AR\rangle$ を

$$|AR\rangle = \sum_i \sqrt{p_i}|i_A\rangle|i_R\rangle$$

で定義すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_R(|AR\rangle\langle AR|) &= \sum_{i,j} \sqrt{p_i p_j}|i_A\rangle\langle j_A|\langle i_R|j_R\rangle \\ &= \sum_i p_i|i_A\rangle\langle i_A| = \rho^A\end{aligned}$$

となる。

2 量子オペレーション

公理 1.2 で述べたように孤立系の時間発展はユニタリ変換によって記述される。しかし現実世界には完全に孤立した系、すなわち他の系から相互作用も受けない系は存在せず、現実の量子系は他の量子系から何らかの影響を受ける。このような場合の系の振る舞いを記述するものとして量子オペレーションというものがある。本節ではこの量子オペレーションについて説明する。

2.1 量子オペレーションと完全正写像

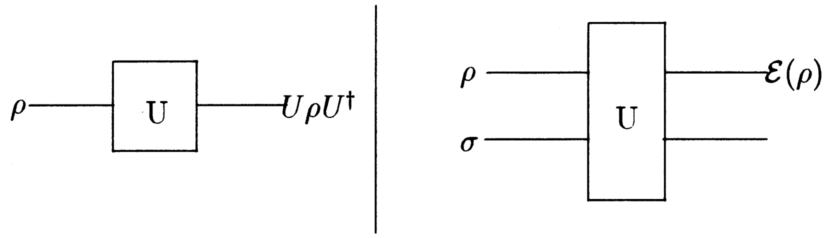
量子系 A が装置系 B と相互作用する場合、系 A と系 B の合成系を孤立系とみなすことにより系 A の状態変化を記述する。

定義 2.1 (量子オペレーション) $\mathcal{H}_A$ を量子系 A の Hilbert 空間、$B(\mathcal{H}_A)$ を $\mathcal{H}_A$ 上の線形作用素全体とする。写像 $\mathcal{E}: B(\mathcal{H}_A) \to B(\mathcal{H}_A)$ が、ある Hilbert 空間 $\mathcal{H}_B$ 上の密度作用素 σ と $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 上のユニタリ作用素 U によって

$$\mathcal{E}(\rho) = \mathrm{Tr}_B[U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger]$$

と表される場合、$\mathcal{E}$ をトレースを保存する**量子オペレーション**と呼ぶ。

トレースを保存する量子オペレーションは、$\mathcal{H}_A$ 上の密度作用素の空間 $S(\mathcal{H}_A)$ を $S(\mathcal{H}_A)$ に写し、装置系と相互作用する系の状態変化を説明する。実際、系 A の状態を ρ、系 B の状態を σ、合成系 $A+B$ の状態を $\rho \otimes \sigma$ とすると、合成系 $A+B$ が孤立系である場合、公理 1.2 よりその合成系の時間発展はユニタリ変換 U によって記述され、全体系の状態は $U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger$ となる。このとき系 A の状態は、定理 1.4 より $\mathrm{Tr}_B[U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger]$ となる。すなわち、部分系 A の状態は、初期の ρ から $\mathrm{Tr}_B[U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger]$ へと変化しており、これはトレースを保存する量子オペレーションによる変換に他ならない。



図：孤立系（左）と孤立系でない系（右）の状態変化

次にこの量子オペレーションがどのような性質を持つのかを説明する。まず完全正写像を次のように定義する。

定義 2.2 (完全正写像) $B(\mathcal{H})$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素の空間、$\mathcal{H}^n$ を n 次元 Hilbert 空間とする。写像 $\mathcal{E}: B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ が任意の正値作用素を正値作用素に写すとき $\mathcal{E}$ を**正写像（positive map）**といい、また $\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}_n$ が正写像であるとき $\mathcal{E}$ を **n-正写像**という。ここで $\mathcal{I}_n$ は $B(\mathcal{H}^n)$ 上の恒等写像である。任意の自然数 n に対して $\mathcal{E}$ が n-正写像となるとき**完全正写像（completely positive map）**という。

以下では完全正写像、トレースを保存する完全正写像をそれぞれ CP 写像、TP-CP 写像と略すこととする。

量子オペレーションは以下のように特徴付けることができる。

定理 2.1 系 A に対応する状態空間を $\mathcal{H}_A$、A を $\mathcal{H}_A$ 上の任意の線形作用素とする。このとき次の条件は同値である。

(1) $\mathcal{E}$ は TP-CP 写像である。
(2) $\mathcal{H}_A$ 上の線形作用素 $\{V_k\}$ で $\sum_k V_k^\dagger V_k = I$ を満たすものが存在して

$$\mathcal{E}(A) = \sum_k V_k A V_k^\dagger$$

と表わすことができる。
(3) 写像 $\mathcal{E}$ は系 A のトレースを保存する量子オペレーションである。

証明) (1)⇒(2) $\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_A$ とする。このとき $\{|i_A\rangle\}$, $\{|i_B\rangle\}$ をそれぞれ $\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$ の正規直交基底とし、

$$|\alpha\rangle = \sum_i |i_B\rangle|i_A\rangle$$

とする。このとき

$$\mathcal{I}_B \otimes \mathcal{E}(|\alpha\rangle\langle\alpha|) = \sum_{i,j} |i_B\rangle\langle j_B| \otimes \mathcal{E}(|i_A\rangle\langle j_A|)$$

である。一方、$\mathcal{E}$ は完全正写像なので $\mathcal{I}_B \otimes \mathcal{E}(|\alpha\rangle\langle\alpha|)$ は正値作用素である。したがって 0 以上の実数 $\{p_i\}$ と正規直交基底 $\{|i\rangle\}$ で

$$\mathcal{I}_B \otimes \mathcal{E}(|\alpha\rangle\langle\alpha|) = \sum_i p_i |i\rangle\langle i| = \sum_i |s_i\rangle\langle s_i|$$

とかける。ここで各 i に対して $|s_i\rangle = \sqrt{p_i}|i\rangle$ である。今、$|s_k\rangle \in \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_A$ であるから $|s_k\rangle = \sum_{i,j} s_{ij}^{(k)} |i_B\rangle|j_A\rangle$ とかける。このとき $V_k|i_A\rangle = \sum_j s_{ij}^{(k)}|j_A\rangle$ とすると、

$$|s_k\rangle = \sum_i I_B \otimes V_k |i_B\rangle|i_A\rangle$$

である。したがって

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_B \otimes \mathcal{E}(|\alpha\rangle\langle\alpha|) &= \sum_{i,j} |i_B\rangle\langle j_B| \otimes \sum_k V_k|i_A\rangle\langle j_A|V_k^\dagger \\ &= \sum_{i,j} |i_B\rangle\langle j_B| \otimes \mathcal{E}(|i_A\rangle\langle j_A|)\end{aligned}$$

となるので、任意の i, j 任意の に対して $\mathcal{E}(|i_A\rangle\langle j_A|) = \sum_k V_k|i_A\rangle\langle j_A|V_k^\dagger$ である。任意の線形作用素 A は $A = \sum_{i,j} a_{ij}|i\rangle\langle j|$ $(a_{ij} \in \mathbb{C})$ と表せるので $\mathcal{E}(A) = \sum_k V_k A V_k^\dagger$ が成り立つ。また $\mathcal{E}$ はトレースを保存するので $\sum V_k^\dagger V_k = I$ を満たす。
(2)⇒(3) $\mathcal{E}(A) = \sum_{k=1}^d V_k A V_k^\dagger$ $(\sum_k V_k^\dagger V_k = I)$ が成り立つと仮定する。$\{|i_A\rangle\}_{i=1}^n$ を $\mathcal{H}_A$ の正規直交基底、$\mathcal{H}_B$ を d 次元 Hilbert 空間とし、その正規直交基底を $\{|j_B\rangle\}_{j=1}^d$ とする。ユニタリ作用素 U を

$$U|i_A\rangle|1_B\rangle = \sum_k V_k \otimes I_B |i_A\rangle|k_B\rangle \ (i = 1, \ldots, n)$$

を満たすように定義する。このとき $\mathcal{H}_A$ 上の任意の線形作用素 $A = \sum_{i,j} a_{ij}|i_A\rangle\langle j_A|$ に対して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_B[U(A \otimes |b_1\rangle\langle b_1|)U^\dagger] &= \sum_{i,j} a_{ij}\,\mathrm{Tr}_B[U(|i\rangle\langle j| \otimes |1_B\rangle\langle 1_B|)U^\dagger] \\
&= \sum_{i,j} a_{ij} \sum_k V_k|i\rangle\langle j|V_k^\dagger \\
&= \sum_k V_k A V_k^\dagger
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

(3)⇒(1) $\mathcal{H}_B$ 上の状態 σ とユニタリ作用素 U によって写像 $\mathcal{E}$ が $\mathcal{E}(A) = \mathrm{Tr}_B(U(A\otimes\sigma)U^\dagger)$ と表わせたとする。n を任意の自然数、$\mathcal{H}^n$ を n 次元 Hilbert 空間とする。このとき Y を $\mathcal{H}^n \otimes \mathcal{H}_A$ 上の任意の正値作用素とする。このとき $\mathcal{H}^n$, $\mathcal{H}_A$ 上の線形作用素 A_i, B_i が存在して $Y = \sum_i A_i \otimes B_i$ と表せる。任意の単位ベクトル $|\phi\rangle \in \mathcal{H}^n \otimes \mathcal{H}_A$ に対して

$$
\begin{aligned}
\langle\phi|\mathcal{I}_n \otimes \mathcal{E}(Y)|\phi\rangle &= \sum_i \langle\phi|A_i \otimes \mathcal{E}(B_i)|\phi\rangle \\
&= \sum_i \langle\phi|A_i \otimes \mathrm{Tr}_B(U(B_i \otimes \sigma)U^\dagger)|\phi\rangle \\
&= \sum_i \mathrm{Tr}\left(|\phi\rangle\langle\phi|(A_i \otimes \mathrm{Tr}_B(U(B_i \otimes \sigma)U^\dagger))\right) \\
&= \sum_i \mathrm{Tr}\left((|\phi\rangle\langle\phi| \otimes I_B)(A_i \otimes (U(B_i \otimes \sigma)U^\dagger))\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left((|\phi\rangle\langle\phi| \otimes I_B)\left((I_A \otimes U)(Y \otimes \sigma)(I_A \otimes U^\dagger)\right)\right) \geq 0
\end{aligned}
$$

が成り立つので $\mathcal{E}$ は完全正写像である。

(証明終)

(2) の分解 $\mathcal{E}(A) = \sum_k V_i A V_i^\dagger$ を $\mathcal{E}$ の **Kraus 表現**、線形作用素 $\{V_i\}$ を **Kraus 作用素**という。

2.2 完全正写像

一般に $(n-1)$-正写像ならば n-正写像というわけではない。実際、$M(n)$ 上の線形写像 ϕ を

$$\phi(A) = (n-1)\,\mathrm{Tr}(A)I_n - A$$

で定義すると ϕ は $(n-1)$-正写像であるが、n-正写像ではない。このことは次の補題からわかる。

補題 2.1 E_{jk} を (j,k) 成分が 1、それ以外の成分は全て 0 の $n\times n$ 行列、$E = \sum_{j,k} E_{jk} \otimes E_{jk}$ とする。

(1)$(n-1)I_{n^2}-E$ は正値ではない
(2)P を $\mathrm{rank}(P)=n-1$ の射影とする。このとき

$$\hat{P}\left((n-1)I_{n^2}-E\right)\hat{P}$$

は正値である。ここで $\hat{P}=I_n\otimes P$ である。

補題 2.1 の証明) (1)$E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}$ より

$$E^2=nE$$

が成り立つ。したがって $\frac{1}{n}E$ は射影なので

$$\|E\|=n$$

が成り立つ。したがってあるベクトル $|\psi\rangle$ が存在して $\langle\psi|E|\psi\rangle=n$ を満たすので $(n-1)I_{n^2}-E$ は正値ではない。
(2)$\sum_j E_{ij}AE_{jl}=\mathrm{Tr}(A)E_{il}$ より

$$EI_n\otimes AE=\mathrm{Tr}(A)E$$

が成り立つ。これより

$$\begin{aligned}\|\hat{P}E\hat{P}\| &= \frac{1}{n}\|\hat{P}E^2\hat{P}\|\\ &= \frac{1}{n}\|E\hat{P}E\|\\ &= \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(P)\|E\|\\ &= \mathrm{Tr}(P)=n-1\end{aligned}$$

である。したがって

$$\hat{P}((n-1)I_{n^2})\hat{P}\leq\hat{P}E\hat{P}$$

が成り立つ。

(証明終)

次に $\phi(A)=(n-1)\,\mathrm{Tr}(A)I_n-A$ が $(n-1)$-正写像であるが、n-正写像ではないことを示す。最初に ϕ が n-正写像ではないことを示す。

$$\phi\otimes I_n\left(\sum_{j,k}E_{jk}\otimes E_{jk}\right)=\sum_{j,k}((n-1)\,\mathrm{Tr}(E_{jk})I_n-E_{jk})\otimes E_{jk}=(n-1)I_{n^2}-E$$

が成り立つ。補題 2.1 よりこれは正値ではない。
次に ϕ が $(n-1)$-正写像であることを示す。ベクトル $|x\rangle$ を

$$|x\rangle=(\alpha_1^{(1)},\alpha_2^{(1)},\ldots,\alpha_n^{(1)},\ldots,\alpha_1^{(n-1)},\ldots,\alpha_n^{(n-1)})$$

で定義し、$X = |x\rangle\langle x|$ とする。さらに

$$X_0 = \left[\begin{array}{cc|c} & X & O \\ & & O \\ \hline O & O & O \end{array}\right] \in M(n) \otimes M(n)\ ,\ L = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \cdots & \alpha_n^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{(n-1)} & \cdots & \alpha_n^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

としたとき $X_0 = \hat{L}^\dagger(\sum_{j,k} E_{jk} \otimes E_{jk})\hat{L}$ が成り立つ。ここで $\hat{L} = I_n \otimes L$ である。実際、

$$\hat{L}^\dagger \left(\sum_{j,k} E_{jk} \otimes E_{jk} \right) \hat{L} = \begin{bmatrix} L^\dagger E_{11} L & \cdots & L^\dagger E_{1n} L \\ \vdots & & \vdots \\ L^\dagger E_{n1} L & \cdots & L^\dagger E_{nn} L \end{bmatrix}$$

であり、さらに $(L^\dagger E_{ij} L)_{kl} = \alpha_k^{(i)} \alpha_l^{(j)}\ (i,j = 1,\ldots,n-1)$, $(L^\dagger E_{ij} L)_{kl} = 0\ (i = n$ または $j = n)$ である。このとき

$$\phi \otimes I_n(X_0) = \hat{L}\Big((n-1)I_{n^2} - E\Big)\hat{L}$$

となる。さらに L は階数が $n-1$ のある射影 P に対して $PL = L$ となる。したがって

$$\phi \otimes I_n(X_0) = \hat{L}^\dagger \hat{P}\Big((n-1)I_{n^2} - E\Big)\hat{P}\hat{L}$$

となり、補題2.1より $\hat{P}\Big((n-1)I_{n^2} - E\Big)\hat{P}$ は正値なので $\phi \otimes I_n(X_0)$ も正値である。したがって $\phi \otimes I_{n-1}(X)$ は正値なので ϕ は $(n-1)$-正写像である。

(証明終)

3 忠実度(Fidelity)とトレース距離(Trace Distance)

忠実度(Fidelity)とトレース距離(Trace Distance)は2つの量子状態の近さを表すときに用いられる。忠実度とトレース距離はともに量子状態の近さを表す距離として便利な性質を多くもっており、両者の性質はとても似ている。本節では忠実度とトレース距離がもつ性質と、両者の関係について説明する。

3.1 忠実度とその性質

始めに忠実度を定義し、それがどのような性質をもっているのかを説明し、忠実度が2つの量子状態の近さを表す便利な距離であることを見る。トレース距離に関しては第3.2節で述べる。

忠実度は次のように定義される。

定義 3.1 2つの密度作用素 ρ と σ の**忠実度** $F(\rho,\sigma)$ は

$$F(\rho,\sigma) = \mathrm{Tr}\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}$$

で定義される。

忠実度は距離の公理を満たさないが2つの量子状態の近さを表すのに便利な性質を多く持っている。これからその性質について説明する。

定理 3.1 忠実度はユニタリ変換のもとで不変である。すなわち任意のユニタリ変換 U と2つの密度作用素 ρ と σ に対して

$$F(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) = F(\rho,\sigma)$$

が成り立つ。

証明) 任意のユニタリ変換 U と正値作用素 A に対して

$$\sqrt{UAU^\dagger} = U\sqrt{A}U^\dagger$$

が成り立つ。実際 $UAU^\dagger$ は正値作用素なのでスペクトル分解 $A=\sum_i a_i P_i$ を用いると $\sqrt{UAU^\dagger} = \sum_i \sqrt{a_i}P_i$ であり、またこのとき $A=\sum_i a_i U^\dagger P_i U$ なので $\sqrt{A} = \sum_i \sqrt{a_i}U^\dagger P_i U$ である。したがって $U\sqrt{A}U^\dagger = \sum_i \sqrt{a_i}P_i = \sqrt{UAU^\dagger}$ である。よって

$$\begin{aligned}
F(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) &= \mathrm{Tr}\sqrt{\sqrt{U\rho U^\dagger}U\sigma U^\dagger\sqrt{U\rho U^\dagger}} \\
&= \mathrm{Tr}\sqrt{(U\sqrt{\rho}U^\dagger U\sigma U^\dagger U\sqrt{\rho}U^\dagger)} \\
&= \mathrm{Tr}(U\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}U^\dagger) \\
&= F(\rho,\sigma)
\end{aligned}$$

(証明終)

忠実度の性質を理解するのに役に立つのが次の定理である。

定理 3.2 $\mathcal{H}_A$ を d 次元の Hilbert 空間とする。このとき $\mathcal{H}_A$ 上の2つの密度作用素 ρ と σ の全ての純粋化 $|\psi\rangle$ と $|\varphi\rangle$ に対して

$$F(\rho,\sigma) = \max_{|\psi\rangle,|\varphi\rangle} |\langle\psi|\varphi\rangle|$$

が成り立つ。

定理の証明の前に次の補題を示す [13]。

補題 3.1 A を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の任意の線形作用素、U を $U^\dagger U \leq I$ を満たす線形作用素とする。このとき

$$|\operatorname{Tr}(AU)| \leq \operatorname{Tr}|A|$$

が成り立つ。ここで $|A| = \sqrt{A^\dagger A}$ である。

補題の証明）まず、任意の $A,\ X \in B(\mathcal{H})$ に対して

$$\sigma(XA) \leq \|X\|\sigma(A)$$

が成り立つことを示す。ここで $\|\cdot\|$, $\sigma(\cdot)$ はそれぞれ $\|A\| = \sup_{|x\rangle\in\mathcal{H},\|x\|=1}\|Ax\|$, $\sigma(A) = \sqrt{\operatorname{Tr}(A^\dagger A)}$ で定義される。$\{\psi_i\}$ を $\mathcal{H}$ 上の正規直交基底とする。このとき、

$$\sigma(XA)^2 = \sum_j \|XA\psi_j\|^2 \leq \|X\|^2 \left(\sum_j \|A\psi_j\|^2\right) = \|X\|^2\sigma(A)^2$$

が成り立つ。したがって $\sigma(XA) \leq \|X\|\sigma(A)$ である。また $\sigma(X) = \sigma(X^\dagger)$ が成り立つので、

$$\sigma(AX) = \sigma((AX)^\dagger) = \sigma(X^\dagger A^\dagger) \leq \|X^\dagger\|\sigma(A^\dagger) = \|X\|\sigma(A)$$

である。今、$U^\dagger U \leq I$ より $\|U\| \leq 1$ である。極分解 $A = V|A|$ （V はユニタリ）を用いると、

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Tr}(AU)| &= |\operatorname{Tr}(UV\sqrt{|A|}\sqrt{|A|})| \\
&= |\langle\sqrt{|A|}V^\dagger U^\dagger, \sqrt{|A|}\rangle| \\
&\leq \sigma(\sqrt{|A|}V^\dagger U^\dagger)\sigma(\sqrt{|A|}) \\
&\leq \|V^\dagger U^\dagger\|\sigma(\sqrt{|A|})^2 \\
&= \|U\|\operatorname{Tr}|A| \\
&\leq \operatorname{Tr}|A|
\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。

(証明終)

定理の証明）$|\psi\rangle$, $|\varphi\rangle$ をそれぞれ ρ と σ の系 B への純粋化とする。すなわち $|\psi\rangle$, $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ であり、$\operatorname{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|) = \rho$, $\operatorname{Tr}_B(|\varphi\rangle\langle\varphi|) = \sigma$ を満たす。

[CASE I] $\dim \mathcal{H}_B \geq d$ のとき
$\{|i_A\rangle\}$ を $\mathcal{H}_A$ の正規直交基底、$\{|i_B\rangle\}$ を $\mathcal{H}_B$ の正規直交系とし、$|m\rangle = \sum_{i=1}^d |i_B\rangle|i_A\rangle$ と定義する。
このとき、Schmidt 分解を用いることにより

$$|\psi\rangle = (U_B \otimes \sqrt{\sigma}U_A)|m\rangle,$$

となるようなユニタリ作用素 U_A, U_B が存在することがわかる。また同様にあるユニタリ作用素 V_A, V_B が存在して

$$|\varphi\rangle = (V_B \otimes \sqrt{\rho} V_A)|m\rangle,$$

と表わすことができる。このとき内積をとると

$$\begin{aligned} |\langle\psi|\varphi\rangle| &= \left| \langle m| \left(U_B^\dagger V_B \otimes U_A^\dagger \sqrt{\sigma}\sqrt{\rho} V_A \right) |m\rangle \right| \\ &= \left| \langle m| \left(W \otimes U_A^\dagger \sqrt{\sigma}\sqrt{\rho} V_A \right) |m\rangle \right| \end{aligned}$$

ただし、$W = U_B^\dagger V_B$ である。このとき、$\mathcal{H}_A$ 上の線形作用素 $\tilde{W}$ を

$$\langle i_A|\tilde{W}|j_A\rangle = \overline{\langle i_B|W|j_B\rangle} \ (i, j = 1, \cdots, d)$$

で定義すると、$\tilde{W}^\dagger \tilde{W} \leq I$ であり、

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\tilde{W}^\dagger U_A^\dagger \sqrt{\rho}\sqrt{\sigma} V_A) &= \sum_{i=1}^{d} \langle i_A|\tilde{W}^\dagger \left(\sum_{j=1}^{d} |j_A\rangle\langle j_A| \right) U_A^\dagger \sqrt{\sigma}\sqrt{\rho} V_A |i_A\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle i_A|\tilde{W}^\dagger|j_A\rangle\langle j_A|U_A^\dagger \sqrt{\sigma}\sqrt{\rho} V_A|i_A\rangle \\ &= \sum_{i,j} \overline{\langle j_A|\tilde{W}|i_A\rangle}\langle j_A|U_A^\dagger \sqrt{\sigma}\sqrt{\rho} V_A|i_A\rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle j_B|W|i_B\rangle\langle j_A|U_A^\dagger \sqrt{\sigma}\sqrt{\rho} V_A|i_A\rangle \\ &= \langle m| \left(W \otimes U_A^\dagger \sqrt{\sigma}\sqrt{\rho} V_A \right) |m\rangle \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} |\langle\psi|\varphi\rangle| &= |\,\mathrm{Tr}(\tilde{W}^\dagger U_A^\dagger \sqrt{\sigma}\sqrt{\rho} V_A)| \\ &= |\,\mathrm{Tr}(\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho} T)| \end{aligned}$$

ただし、$T = V_A \tilde{W}^\dagger U_A^\dagger$ である。$T^\dagger T \leq I$ なので、 補題 3.1 より

$$|\langle\psi|\varphi\rangle| \leq \mathrm{Tr}\,|\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}| = F(\rho, \sigma)$$

[CASE II] $\dim \mathcal{H}_B \equiv d_B < d$ のとき
$\{|i_B\rangle\}$ を $\mathcal{H}_B$ の正規直交基底、$|i_A\rangle$ を $\mathcal{H}_A$ の正規直交系とする。このとき $|m\rangle = \sum_{i=1}^{d_B} |i_B\rangle|i_A\rangle$ とする。Schmidt 分解を用いることにより、あるユニタリ作用素 U_A, U_B, V_A, V_B が存在して

$$|\psi\rangle = (U_B \otimes \sqrt{\sigma} U_A)|m\rangle \ , \ |\varphi\rangle = (V_B \otimes \sqrt{\rho} V_A)|m\rangle$$

と表わすことができる。このとき $\mathcal{H}_A$ 上のユニタリ作用素 $\tilde{W}$ を

$$\begin{aligned}\langle i_A|\tilde{W}|j_A\rangle &= \overline{\langle i_B|W|j_B\rangle}\ (1 \le i, j \le d_B)\\ \langle i_A|\tilde{W}|j_A\rangle &= \delta_{ij}\ (d_B < i\ (or\ j) \le d)\end{aligned}$$

で定義する。ここで $W = U_B^\dagger V_B$ である。(1) のときと同様に $|\psi\rangle$ と $|\varphi\rangle$ の内積をとれば

$$\begin{aligned}|\langle\psi|\varphi\rangle| &= |\langle m|U_B^\dagger V_B \otimes U_A\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}V_A|m\rangle|\\ &= \sum_{j=1}^{d_B}\langle j_A|\tilde{W}^\dagger\left(\sum_{i=1}^{d_B}|i_A\rangle\langle i_A|\right)U_A^\dagger\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}V_A|j_A\rangle\\ &= \sum_{j=1}^{d_B}\langle j_A|\tilde{W}^\dagger PU_A^\dagger\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}V_A|j_A\rangle\\ &= \sum_{j=1}^{d}\langle j_A|P\tilde{W}^\dagger PU_A^\dagger\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}V_A|j_A\rangle\\ &= \mathrm{Tr}(\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}V_AP\tilde{W}^\dagger PU_A^\dagger)\end{aligned}$$

ここで $P = \sum_{i=1}^{d_B}|i_A\rangle\langle i_A| \le I$ である。したがって $T = V_AP\tilde{W}^\dagger PU_A^\dagger$ は $T^\dagger T \le I$ を満たす。よって補題 2.1 より

$$|\langle\psi|\varphi\rangle| \le \mathrm{Tr}\,|\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}| = F(\rho,\sigma)$$

が成り立つ。
最後に $F(\rho,\sigma) = |\langle\psi|\varphi\rangle|$ を満たす純粋化 $|\psi\rangle$, $|\varphi\rangle$ が存在することを示す。$\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_A$ とする。[CASE I] より $|\langle\psi|\varphi\rangle| = |\,\mathrm{Tr}(\tilde{W}^\dagger U_A^\dagger\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}V_A)|$ である。このとき $\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}$ の極分解を $\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma} = V|\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}|$ (V はユニタリ) とする。このとき $U_A = V^\dagger$, $V_A = U_B = V_B = I$ とすれば $\tilde{W} = I$ であるから $|\langle\psi|\varphi\rangle| = \mathrm{Tr}\,|\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}| = F(\rho,\sigma)$

(証明終)

定理 3.2 を用いることにより、以下のような忠実度に関する幾つかの性質が成り立つことがわかる。

定理 3.3 任意の密度作用素 $\rho, \sigma, \rho_0, \rho_1, \sigma_0, \sigma_1$ に対して次の性質が成り立つ。
(1) $F(\rho,\sigma) = F(\sigma,\rho)$
(2) $0 \le F(\rho,\sigma) \le 1$
(3) $F(\rho,\sigma) = 1 \Leftrightarrow \rho = \sigma$
(4) $F(\rho,\sigma) = 0 \Leftrightarrow \rho\sigma = 0$
(5) $F(\rho_0 \otimes \sigma_0, \rho_1 \otimes \sigma_1) = F(\rho_0,\rho_1)F(\sigma_0,\sigma_1)$

証明)(1) $F(\rho,\sigma) = F(\sigma,\rho)$、すなわち $\mathrm{Tr}(\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}) = \mathrm{Tr}(\sqrt{\sigma^{1/2}\rho\sigma^{1/2}})$ を示す。
λ を $\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}$ の 0 でない固有値、$|v\rangle$ をその固有ベクトルとする。$\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}|v\rangle = \lambda|v\rangle$ である。こ

のとき

$$\begin{aligned}\lambda(\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}|v\rangle) &= \sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}(\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho})|v\rangle) \\ &= \sqrt{\sigma}\rho\sqrt{\sigma}(\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}|v\rangle)\end{aligned}$$

が成り立つので、λ は $\sqrt{\sigma}\rho\sqrt{\sigma}$ の固有値であり、$\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}|v\rangle$ がその固有ベクトルになる[2]。また $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$ がもし $\langle v_1|v_2\rangle = 0$, $\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}|v_1\rangle = \lambda'|v_1\rangle$, $\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}|v_2\rangle = \lambda'|v_2\rangle$ を満たすならばならば $\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}|v_1\rangle$ と $\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}|v_2\rangle$ は直交する。以上より $\mathrm{Tr}(\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}) = \mathrm{Tr}(\sqrt{\sigma^{1/2}\rho\sigma^{1/2}})$ が成り立つ。

(2) $0 \leq F(\rho,\sigma) \leq 1$

定理 3.2 より $F(\rho,\sigma) = |\langle\psi|\varphi\rangle|$ を満たす ρ, σ の純粋化 $|\psi\rangle$, $|\varphi\rangle$ が存在する。したがって

$$0 \leq F(\rho,\sigma) = |\langle\psi|\varphi\rangle| \leq 1$$

(3) $F(\rho,\sigma) = 1 \Leftrightarrow \rho = \sigma$

($\Rightarrow$) 定理 3.2 より $F(\rho,\sigma) = |\langle\psi|\varphi\rangle|$ を満たす ρ,σ の系 B への純粋化 $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$ が存在するので $F(\rho,\sigma) = |\langle\psi|\varphi\rangle| = 1$ である。よって Schwarz の不等式の等号成立条件より、ある実数 θ が存在して $|\psi\rangle = e^{i\theta}|\varphi\rangle$ を満たす。よって

$$\rho = \mathrm{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|) = \mathrm{Tr}_B(e^{i\theta}|\varphi\rangle\langle\varphi|e^{-i\theta}) = \mathrm{Tr}_B(|\varphi\rangle\langle\varphi|) = \sigma$$

($\Leftarrow$)$\rho = \sigma$ より $F(\rho,\sigma) = \mathrm{Tr}(\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}) = \mathrm{Tr}(\rho) = 1$

(4)$F(\rho,\sigma) = 0 \Leftrightarrow \rho\sigma = 0$

$$\begin{aligned}F(\rho,\sigma) = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{Tr}(\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}) \\ &\Leftrightarrow \rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Tr}(\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}) = \mathrm{Tr}(\rho\sigma) = 0 \\ &\Leftrightarrow \rho\sigma = 0\end{aligned}$$

(5) $F(\rho_0 \otimes \sigma_0, \rho_1 \otimes \sigma_1) = F(\rho_0,\rho_1)F(\sigma_0,\sigma_1)$

$$\begin{aligned}F(\rho_0 \otimes \sigma_0, \rho_1 \otimes \sigma_1) &= \mathrm{Tr}(\sqrt{\sqrt{\rho_0 \otimes \sigma_0}\rho_1 \otimes \sigma_1\sqrt{\rho_0 \otimes \sigma_0}}) \\ &= \mathrm{Tr}(\sqrt{\sqrt{\rho_0}\rho_1\sqrt{\rho_0}} \otimes \sqrt{\sqrt{\sigma_0}\sigma_1\sqrt{\sigma_0}}) \\ &= F(\rho_0,\rho_1)F(\sigma_0,\sigma_1)\end{aligned}$$

(証明終)

定理 3.3 の (1) より忠実度は対称性を満たすことがわかる。また (2)、(3)、(4) より 2 つの状態が近い（識別しにくい）ほど忠実度の値は 1 に近づき、逆に遠い（識別しやすい）と 0 に近づくことがわかる。

[2] もし $\sqrt{\sigma}\sqrt{\rho}|v\rangle = 0$ ならば $\lambda = 0$ となる。

定理 3.4 任意の密度作用素 $\rho,\ \sigma$ に対して

$$F(\rho,\sigma) = \min_{\{E_m\}} \sum_m \sqrt{\mathrm{Tr}(\rho E_m)}\sqrt{\mathrm{Tr}(\sigma E_m)}$$

が成り立つ。ここで最小化は全ての $POVM\ \{E_m\}$ に対して行う。

証明) 極分解を用いて $\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}} = \sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}U$ (U はユニタリ作用素) と書ける。これと Schwarz の不等式を用いると

$$\begin{aligned} F(\rho,\sigma) &= \mathrm{Tr}(\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}U) \\ &= \sum_m \mathrm{Tr}(\sqrt{\rho}\sqrt{E_m}\sqrt{E_m}\sqrt{\sigma}U) \\ &\leq \sum_m |\,\mathrm{Tr}(\sqrt{\rho}\sqrt{E_m}\sqrt{E_m}\sqrt{\sigma}U)| \\ &\leq \sum_m \sqrt{\mathrm{Tr}(\rho E_m)\,\mathrm{Tr}(\sigma E_m)} \end{aligned}$$

となる。すなわち、

$$F(\rho,\sigma) \leq \min_{\{E_m\}} \sqrt{\mathrm{Tr}(\rho E_m)}\sqrt{\mathrm{Tr}(\sigma E_m)}$$

である。次に等号が成立するようなPOVM$\{E_m\}$ を見つける。この不等式において等号が成立するのは次の 2 つの条件が成り立つときである。
① $\mathrm{Tr}(\sqrt{\rho}E_m\sqrt{\sigma}U) \geq 0$
②ある複素数 α_m が存在して $\sqrt{E_m}\sqrt{\rho} = \alpha_m\sqrt{E_m}\sqrt{\sigma}U$ または $\alpha_m\sqrt{E_m}\sqrt{\rho} = \sqrt{E_m}\sqrt{\sigma}U$ を満たす。

[CASE I] ρ が可逆のとき ($\rho\rho^{-1} = I$ を満たす ρ^{-1} が存在するとき)
$\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}} = \sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}U$ は

$$\sqrt{\sigma}U = \rho^{-1/2}\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}$$

となる。これを②の式に代入すると

$$\alpha_m\sqrt{E_m}\sqrt{\rho} = \sqrt{E_m}\rho^{-1/2}\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}$$

とが成り立つことがわかる。このとき $M = \rho^{-1/2}\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}\rho^{-1/2}$ とすれば

$$\sqrt{E_m}(\alpha I - M) = 0$$

である。M は正値作用素なので、$M = \sum_m \beta_m|m\rangle\langle m|$ ($\beta_m \geq 0,\ |m\rangle$:正規直交基底) と表わすことができる。
このとき $E_m = |m\rangle\langle m|,\ \alpha_m = \beta_m$ とすると②の式が満たされ、さらに①に関しても

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\sqrt{\rho}E_m\sqrt{\sigma}U) &= \mathrm{Tr}(\sqrt{\rho}|m\rangle\langle m|\sqrt{\sigma}U\rho^{-1/2}\rho^{1/2}) \\ &= \mathrm{Tr}(\sqrt{\rho}|m\rangle\langle m|M\sqrt{\rho}) \\ &= \beta_m\mathrm{Tr}(\rho|m\rangle\langle m|) \geq 0 \end{aligned}$$

となり、①が成立していることがわかる。以上より

$$F(\rho,\sigma)=\sum_m \sqrt{\mathrm{Tr}(\rho E_m)}\sqrt{\mathrm{Tr}(\sigma E_m)}$$

が成り立つ。

[CASE II] ρ が可逆でないとき

ρ は密度作用素なので 0 以上の実数 $\{p_i\}$ と正規直交基底 $\{|i\rangle\}$ で

$$\rho=\sum_{i=1}^{d} p_i|i\rangle\langle i|=\sum_{i=1}^{r} p_i|i\rangle\langle i|\ (r\leq d)$$

と表わすことができる。ただし 2 つめの式において $p_i>0$ である。このとき

$$\rho^{-1}=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{p_i}|i\rangle\langle i|$$

とする。さらに

$$P=\sum_{i=1}^{r}|i\rangle\langle i|,\ N=\sum_{i=r+1}^{d}|i\rangle\langle i|$$

とすれば、

$$P=\rho\rho^{-1},\ I=P+N,\ \rho N=N\rho=0$$

が成り立つ。このとき $\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}=\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}U$ の両辺に P をかけると

$$P\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}P=P\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}UP$$
$$\rho^{-1/2}P\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}P=P\sqrt{\sigma}UP$$

ここで $M=\rho^{-1/2}P\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}P\rho^{-1/2}$ とすると $\mathrm{Ran}(M)\subset\mathrm{Ran}(\rho)=\mathrm{supp}(\rho)$ である。ここで $\mathrm{supp}(\rho)$ は ρ の固有値が 0 でない固有ベクトルによって生成される空間である。また M は正値作用素であるから $\mathrm{supp}(\rho)$ の正規直交基底 $|\psi_i\rangle$ を用いて $M=\sum_{i=1}^{r}\beta_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\ (\beta_i\geq 0)$ と表せる。このとき $E_i=|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\ (i=1,\ldots,r)$ とすると $\{N,E_1,\ldots,E_r\}$ は POVM になる。$\rho^{-1/2}P\sqrt{\rho^{1/2}\sigma\rho^{1/2}}P=P\sqrt{\sigma}UP$ より

$$M\sqrt{\rho}=P\sqrt{\sigma}UP$$

である。この式の左辺から E_i をかければ

$$\beta_iE_i\sqrt{\rho}=E_i\sqrt{\sigma}UP$$

となり、また $\mathrm{Ker}(E_i\sqrt{\sigma}U)\subset\mathrm{Ker}(E_i\sqrt{\sigma})\subset\mathrm{Ker}(E_i)$ より $E_i\sqrt{\sigma}UN=0$ となるので

$$\begin{aligned}E_i\sqrt{\sigma}UP &= E_i\sqrt{\sigma}U(I-N)\\ &= E_i\sqrt{\sigma}U\end{aligned}$$

である。また N のときは $\alpha=0$ とすれば $N\sqrt{\rho}=\alpha N\sqrt{\sigma}U$ が成り立つ。
以上より条件②を満たすことがわかる。また、

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(\sqrt{\rho}E_i\sqrt{\sigma}U) &= \operatorname{Tr}(\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}U)\\
&= \operatorname{Tr}(P\sqrt{\rho}E_iP\sqrt{\sigma}U)\\
&= \operatorname{Tr}(\sqrt{\rho}E_iM\sqrt{\rho})\\
&= \beta_i\operatorname{Tr}(\rho E_i)\geq 0\\
\operatorname{Tr}(\sqrt{\rho}N\sqrt{\sigma}U) &= 0
\end{aligned}$$

が成り立つので条件①も満たされる。以上より任意の密度作用素 ρ,σ に対して

$$F(\rho,\sigma)=\min_{\{E_m\}}F(p_mq_m)$$

が成り立つことがわかる。

(証明終)

忠実度はトレースを保存する量子オペレーションに関して単調性をもつ。

定理 3.5 (忠実度の単調性) ρ,σ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の密度作用素とする。任意のトレースを保存する量子オペレーション $\mathcal{E}$ に対して

$$F(\mathcal{E}(\rho),\mathcal{E}(\sigma))\geq F(\rho,\sigma)$$

が成り立つ。

証明) 定理 3.2 より $F(\rho,\sigma)=|\langle\psi|\varphi\rangle|$ を満たす ρ, σ の系 R への純粋化 $|\psi\rangle$, $|\varphi\rangle\in\mathcal{H}_R\otimes\mathcal{H}$ が存在する。$\mathcal{E}$ は TP-CP 写像であるから定理 1.2 よりある Hilbert 空間 $\mathcal{H}_E$, $|e_0\rangle\in\mathcal{H}_E$, $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}_E$ 上のユニタリ作用素 U が存在して

$$\mathcal{E}(\rho)=\operatorname{Tr}_E(U(\rho\otimes|e_0\rangle\langle e_0|)U^\dagger)$$

と表わせる。このとき $I_R\otimes U|\psi\rangle|e_0\rangle, I_R\otimes U|\varphi\rangle|e_0\rangle$ はそれぞれ $\mathcal{E}(\rho),\mathcal{E}(\sigma)$ の純粋化になっている。実際、

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\rho) &= \operatorname{Tr}_E(U(\rho\otimes|e_0\rangle\langle e_0|)U^\dagger)\\
&= \operatorname{Tr}_E(U(\operatorname{Tr}_R(|\psi\rangle\langle\psi|)\otimes|e_0\rangle\langle e_0|)U^\dagger)\\
&= \operatorname{Tr}_E\operatorname{Tr}_R(I_R\otimes U|\psi\rangle|e_0\rangle\langle\psi|\langle e_0|I_R\otimes U^\dagger)
\end{aligned}$$

である。また同様に

$$\mathcal{E}(\sigma)=\operatorname{Tr}_E\operatorname{Tr}_R(I_R\otimes U|\varphi\rangle|e_0\rangle\langle\varphi|\langle e_0|I_R\otimes U^\dagger)$$

である。したがって

$$\begin{aligned} F(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{E}(\sigma)) &\geq |\langle\psi|\langle e_0|U^\dagger U|\varphi\rangle|e_0\rangle| \\ &= |\langle\psi|\varphi\rangle| = F(\rho, \sigma) \end{aligned}$$

(証明終)

最後に忠実度の凹性を示す。

定理 3.6 (忠実度の強い凹性) $P = \{(p_1, \ldots, p_n)|0 \geq p_i \geq 1,\ \sum_i p_i = 1\}$ とする。(p_i), $(q_i) \in P$, $\{\rho_i\}$, $\{\sigma_i\}$ を n 個の密度作用素の集合とする。このとき

$$F\left(\sum_i p_i\rho_i, \sum_i q_i\sigma_i\right) \geq \sum_i \sqrt{p_i q_i} F(\rho_i, \sigma_i)$$

が成り立つ。

証明) 定理3.2より $F(\rho_i, \sigma_i) = |\langle\psi_i|\varphi_i\rangle|$ を満たす ρ_i, σ_i の純粋化 $|\psi_i\rangle, |\varphi_i\rangle$ が存在する。$\langle\psi_i|\varphi_i\rangle = re^{i\theta_i}$ $(r \leq 0,\ \theta_i \in \mathbb{R})$ と表わせるので $|\phi_i\rangle = e^{i\theta_i}|\varphi_i\rangle$ とすれば $|\phi_i\rangle$ は σ_i の純粋化でさらに $F(\rho_i, \sigma_i) = \langle\psi_i|\phi_i\rangle$ を満たす。このとき n 個の正規直交基底 $|i\rangle$ をもつ系を導入し、

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i}|\psi_i\rangle|i\rangle\ ,\ |\phi\rangle = \sum_i \sqrt{q_i}|\phi_i\rangle|i\rangle$$

とすると、$|\psi\rangle$ は $\sum_i p_i\rho_i$ の純粋化、$|\phi\rangle$ は $\sum_i q_i\sigma_i$ の純粋化になる。したがって定理3.2より

$$\begin{aligned} F\left(\sum_i p_i\rho_i, \sum_i q_i\sigma_i\right) &\geq |\langle\psi|\phi\rangle| \\ &= \sum_i \sqrt{p_i q_i}\langle\psi_i|\phi_i\rangle \\ &= \sum_i \sqrt{p_i q_i} F(\rho_i, \sigma_i) \end{aligned}$$

(証明終)

この定理3.6より忠実度は凹であることがわかる。実際、定理3.6において $q_i = p_i$, $\sigma_i = \sigma$ $(i = 1, \ldots, n)$ とすれば

$$F\left(\sum_i p_i\rho_i, \sigma\right) = F\left(\sum_i p_i\rho_i, \sum_i q_i\sigma_i\right) \geq \sum_i \sqrt{p_i q_i} F(\rho_i, \sigma_i) = \sum_i p_i F(\rho_i, \sigma)$$

が成り立つ。また忠実度の対称性より

$$F\left(\sigma, \sum_i p_i\rho_i\right) \geq \sum_i p_i F(\sigma, \rho_i)$$

も成り立つ。

3.2 トレース距離とその性質

次に2つの量子状態の近さを表すもう1つの距離であるトレース距離について説明する。トレース距離も忠実度と同じように量子状態同士の近さを表す距離として良い性質を持っており、両者の性質には類似点が多い。ここではトレース距離の定義と基本的な性質について説明する。

トレース距離は次のように定義される。

定義 3.2 2つの密度作用素 ρ と σ のトレース距離 $D(\rho,\sigma)$ は

$$D(\rho,\sigma)=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}|\rho-\sigma|$$

で定義される。ここで $|\cdot|$ は任意の線形作用素 A に対して $|A|=\sqrt{A^\dagger A}$ で定義される。

次にトレース距離の基本的な性質を説明する。

定理 3.7 トレース距離は忠実度と同様にユニタリ変換で不変である。すなわち任意のユニタリ変換 U と2つの密度作用素 ρ と σ に対して

$$D(U\rho U^\dagger,U\sigma U^\dagger)=D(\rho,\sigma)$$

が成り立つ。

証明） $D(U\rho U^\dagger,U\sigma U^\dagger)=\operatorname{Tr}|U(\rho-\sigma)U^\dagger|/2$ である。さらに λ を $U(\rho-\sigma)U^\dagger$ の固有値、$|\psi\rangle$ をその固有ベクトルとすると $(\rho-\sigma)U^\dagger=\lambda U^\dagger|\psi\rangle$ が成り立つので λ は $\rho-\sigma$ の固有値、$U^\dagger|\psi\rangle$ はその固有ベクトルとなる。したがって

$$\operatorname{Tr}|U(\rho-\sigma)U^\dagger|=\operatorname{Tr}|\rho-\sigma|$$

が成り立つので、トレース距離はユニタリ変換で不変である。

（証明終）

忠実度のときと同じようにトレース距離の性質を見ていく上で便利な定理がある。

定理 3.8 ρ と σ を密度作用素とする。このとき $P\leq I$ を満たす全ての正値作用素 P に対して

$$D(\rho,\sigma)=\max_P\operatorname{Tr}(P(\rho-\sigma))$$

が成り立つ。

証明） P を $P\leq I$ を満たす正値作用素とする。$\rho-\sigma$ は自己共役作用素なので直交する正値作用素 Q と S $(QS=SQ=0)$ が存在して $\rho-\sigma=Q-S$ と表すことができる。このとき

$|\rho-\sigma| = \sqrt{Q^2+QS+SQ+S^2} = Q+S$ であり、さらに $0 = \mathrm{Tr}(\rho-\sigma) = \mathrm{Tr}(Q-S)$ より $\mathrm{Tr}(Q) = \mathrm{Tr}(S)$ となるので、$D(\rho,\sigma) = \mathrm{Tr}(Q)$ となる。一方、

$$\mathrm{Tr}(P(\rho-\sigma)) = \mathrm{Tr}(P(Q-S)) = \mathrm{Tr}(PQ) - \mathrm{Tr}(PS)$$

である。P と S は両方とも正値作用素なので $\mathrm{Tr}(PS) \geq 0$ であり、また $P \leq I$ より $\mathrm{Tr}(PQ) \leq \mathrm{Tr}(Q)$ なので

$$\mathrm{Tr}(P(\rho-\sigma)) \leq \mathrm{Tr}(Q)$$

が成り立つ。以上より

$$D(\rho,\sigma) = \mathrm{Tr}(Q) \geq \max_P \mathrm{Tr}(P(\rho-\sigma))$$

が成り立つことがわかる。さらに P を $\mathrm{supp}(Q)$ への射影とすると、$PQ=Q,\ PS=0$ を満たすので $\mathrm{Tr}(P(\rho-\sigma)) = \mathrm{Tr}(Q) = D(\rho,\sigma)$ である。以上より

$$D(\rho,\sigma) = \max_P \mathrm{Tr}(P(\rho-\sigma))$$

(証明終)

この定理 3.8 を用いることによりトレース距離に関する次のような性質が成り立つことがわかる。

定理 3.9 任意の密度作用素 ρ,σ,τ に対して次の性質が成り立つ。
(1) $D(\rho,\sigma) = D(\sigma,\rho)$
(2) $0 \leq D(\rho,\sigma) \leq 1$
(3) $D(\rho,\sigma) = 0 \Leftrightarrow \rho=\sigma$
(4) $D(\rho,\sigma) = 1 \Leftrightarrow \rho\sigma=0$
(5) $D(\rho,\sigma) \leq D(\rho,\sigma) + D(\sigma,\tau)$

証明) (1) 任意の線形作用素 A に対して $|A| = \sqrt{A^\dagger A} = \sqrt{(-A)^\dagger(-A)} = |-A|$ が成り立つので

$$D(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,|\rho-\sigma| = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,|\sigma-\rho| = D(\sigma,\rho)$$

である。
(2)$D(\rho,\sigma) \geq 0$ は明らか。定理 3.8 よりある射影 P が存在して $D(\rho,\sigma) = \mathrm{Tr}(P(\rho-\sigma))$ を満たす。ここで $\mathrm{Tr}(P(\rho-\sigma)) \leq \mathrm{Tr}(P\rho) \leq 1$ なので $D(\rho,\sigma) \leq 1$ である。
(3)

$$\begin{aligned} D(\rho,\sigma)=0 &\Leftrightarrow \mathrm{Tr}\,|\rho-\sigma|=0 \\ &\Leftrightarrow |\rho-\sigma|=0 \\ &\Leftrightarrow (\rho-\sigma)^\dagger(\rho-\sigma)=(\rho-\sigma)^2=0 \\ &\Leftrightarrow \rho=\sigma \end{aligned}$$

(4)($\Leftarrow$) $\rho\sigma = 0$ とする。このとき

$$D(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}|\rho-\sigma| = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\rho+\sigma) = 1$$

である。
($\Rightarrow$) $D(\rho,\sigma) = 1$ とする。定理 3.8 よりある射影 P が存在して $D(\rho,\sigma) = \operatorname{Tr}(P(\rho-\sigma))$ を満たす。

$$D(\rho,\sigma) = \operatorname{Tr}(P(\rho-\sigma)) = 1$$

より、$\operatorname{Tr}(P\rho) = 1$ かつ $\operatorname{Tr}(P\sigma) = 0$ である。このとき P_ρ を $\operatorname{supp}(\rho)$ への射影とすると $P_\rho \leq P$ である。したがって $\operatorname{Tr}(P_\rho\sigma) = 0$ となるので ρ と σ は直交する。すなわち $\rho\sigma = 0$ である。
(5) 定理 3.8 よりある射影 P が存在して $D(\rho,\tau) = \operatorname{Tr}(P(\rho-\tau))$ となる。

$$\begin{aligned} D(\rho,\tau) &= \operatorname{Tr}(P(\rho-\sigma)) + \operatorname{Tr}(P(\sigma-\tau)) \\ &\leq D(\rho,\sigma) + D(\sigma,\tau) \end{aligned}$$

(証明終)

この定理 3.9 よりトレース距離が距離の公理を満たすことがわかる。また忠実度とは逆に 2 つの状態が近いとトレース距離の値は 0 に近づき、遠いと 1 に近づくことがわかる。

定理 3.10 任意の密度作用素 ρ,σ に対して

$$D(\rho,\sigma) = \max_{\{E_m\}} \frac{1}{2}\sum_m |\operatorname{Tr}(\rho E_m) - \operatorname{Tr}(\sigma E_m)|$$

が成り立つ。ここで最大化は全ての $POVM\{E_m\}$ に対して行う。

証明) 直交する正値作用素 Q と S が存在して $\rho - \sigma = Q - S$ と表すことができる。このとき

$$\begin{aligned} |\operatorname{Tr}(E_m(\rho-\sigma))| &= |\operatorname{Tr}(E_mQ) - \operatorname{Tr}(E_mS)| \\ &\leq |\operatorname{Tr}(E_mQ)| + |\operatorname{Tr}(E_mP)| \\ &= \operatorname{Tr}(E_m(Q+S)) \\ &= \operatorname{Tr}(E_m|\rho-\sigma|) \end{aligned}$$

が成り立つので

$$D(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\sum_m E_m|\rho-\sigma|\right) \geq \frac{1}{2}\sum_m |\operatorname{Tr}(E_m(\rho-\sigma))| = \frac{1}{2}\sum_m |\operatorname{Tr}(\rho E_m) - \operatorname{Tr}(\sigma E_m)|$$

となる。さらに E_1 を $\operatorname{supp}(Q)$ への射影、$E_2 = I - E_2$ とすると E_1, E_2 は POVM になる。この POVM に対して

$$|\operatorname{Tr}(E_iQ) - \operatorname{Tr}(E_iS)| = \operatorname{Tr}(E_iQ) + \operatorname{Tr}(E_iS)\ (i = 1, 2)$$

が成り立つので、この POVM に対して

$$D(\rho,\sigma) = \frac{1}{2}\sum_m |\operatorname{Tr}(\rho E_m) - \operatorname{Tr}(\sigma E_m)|$$

となる。

（証明終）

定理 3.11 (トレース距離の単調性) ρ,σ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の密度作用素とする。このとき任意の TP-CP 写像 $\mathcal{E}$ に対して

$$D(\mathcal{E}(\rho),\mathcal{E}(\sigma)) \le D(\rho,\sigma)$$

が成り立つ。

証明）直交する正値作用素 Q と S が存在して $\rho-\sigma = Q-S$ と表すことができる。定理3.8よりある射影 P が存在して $D(\mathcal{E}(\rho),\mathcal{E}(\sigma)) = \operatorname{Tr}(P(\mathcal{E}(\rho)-\mathcal{E}(\sigma)))$ を満たす。$D(\rho,\sigma) = \operatorname{Tr}(Q)$, $\operatorname{Tr}(\mathcal{E}(Q)) = \operatorname{Tr}(Q)$ より

$$\begin{aligned}
D(\rho,\sigma) &= \operatorname{Tr}(Q) \\
&= \operatorname{Tr}(\mathcal{E}(Q)) \\
&\ge \operatorname{Tr}(P\mathcal{E}(Q)) - \operatorname{Tr}(P\mathcal{E}(S)) \\
&= \operatorname{Tr}(P(\mathcal{E}(\rho) - \mathcal{E}(\sigma))) \\
&= D(\mathcal{E}(\rho),\mathcal{E}(\sigma))
\end{aligned}$$

が成り立つ。

（証明終）

最後にトレース距離の凸性を示す。

定理 3.12 (トレース距離の強い凸性) $P = \{(p_1,\dots,p_n)|0 \ge p_i \ge 1\ ,\ \sum_i p_i = 1\}$ とする。$(p_i),(q_i) \in P$、$\{\rho_i\}$, $\{\sigma_i\}$ を n 個の密度作用素の集合とする。このとき

$$D\left(\sum_i p_i\rho_i, \sum_i q_i\sigma_i\right) \le \frac{1}{2}\sum_i |p_i - q_i| + \sum_i p_i D(\rho_i,\sigma_i)$$

が成り立つ。

証明） 定理3.8よりある射影 P が存在して $D(\sum_i p_i\rho_i, \sum_i q_i\sigma_i) = \operatorname{Tr}(P(\sum_i p_i\rho_i - \sum_i q_i\sigma_i))$ を満たす。したがって

$$D\left(\sum_i p_i\rho_i, \sum_i q_i\sigma_i\right) = \sum_i p_i \operatorname{Tr}(P\rho_i) - \sum_i q_i \operatorname{Tr}(P\sigma_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i p_i \operatorname{Tr}(P\rho_i - \sigma_i) + \sum_i (p_i - q_i) \operatorname{Tr}(P\sigma_i) \\
&\leq \sum_i p_i D(\rho_i, \sigma_i) + \sum_i (p_i - q_i) \\
&\leq \sum_i p_i D(\rho_i, \sigma_i) + \frac{1}{2}\sum_i |p_i - q_i|
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

(証明終)

この定理よりトレース距離が凸であることがわかる。実際、定理3.12の $p_i = q_i,\ \sigma_i = \sigma\ (i = 1,\dots,n)$ とすれば

$$D\left(\sum_u p_i\rho_i, \sigma\right) = D\left(\sum_u p_i\rho_i, \sum_i q_i\sigma_i\right) \leq \sum_i p_i D(\rho_i, \sigma)$$

が成り立つことがわかる。またトレース距離の対称性より第2成分に関しても凸であることがわかる。

3.3 忠実度とトレース距離の関係

トレース距離と忠実度は式の形は異なってみえるが、お互いに密接に関係している。ここではトレース距離と忠実度にはどのような関係があるかを説明し、量子状態の近さを表す測度としては同等なものであるということを見る。

始めに純粋状態の場合、忠実度とトレース距離は等価であることをみる。まず2つの状態ベクトル $|a\rangle$ と $|b\rangle$ を考える。ただし $|a\rangle$ と $|b\rangle$ は一次独立とする。このとき $|0\rangle = |a\rangle,\ |1\rangle = (|b\rangle - \langle a|b\rangle|a\rangle)/\||b\rangle - \langle a|b\rangle|a\rangle\|$ とし、さらに $\langle a|b\rangle = \cos(\theta)\ (0 \leq \theta \leq \frac{1}{2})$ とすると、$|0\rangle,\ |1\rangle$ は正規直交系で、$|b\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$ となる。$|a\rangle$ と $|b\rangle$ の忠実度は

$$F(|a\rangle, |b\rangle) = \operatorname{Tr}\sqrt{(|a\rangle\langle a|\ |b\rangle\langle b|\ |a\rangle\langle a|)} = |\langle a|b\rangle| = |\cos(\theta)|$$

となる。一方、トレース距離は

$$D(|a\rangle, |b\rangle) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}|(|a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b|)| = |\sin(\theta)|$$

となる。以上より

$$D(|a\rangle, |b\rangle) = \sqrt{1 - F(|a\rangle, |b\rangle)^2}$$

が成り立つことがわかる。また $|a\rangle$ と $|b\rangle$ が一次独立でないとき、すなわち一次従属のときはある $\alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| = 1$ が存在して $|a\rangle = \alpha|b\rangle$ を満たすので $F(|a\rangle, |b\rangle) = 1,\ D(|a\rangle, |b\rangle) = 0$ となる。以上より $D(|a\rangle, |b\rangle) = \sqrt{1 - F(|a\rangle, |b\rangle)^2}$ は任意の純粋状態に対して成り立つ。この関係式より

純粋状態のときは２つの状態の忠実度が求まればトレース距離も求めることができ、またその逆も成り立つので、忠実度とトレース距離は等価である。

次に一般の場合を考える。ρ と σ を密度作用素とすると、定理 3.2 より $F(\rho,\sigma) = |\langle\psi|\varphi\rangle|$ を満たす ρ,σ の系 R への純粋化 $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$ が存在する。トレース距離の単調性より

$$D(\rho,\sigma) = D(\mathrm{Tr}_R(|\psi\rangle\langle\psi|), \mathrm{Tr}_R(|\psi\rangle\langle\psi|)) \leq D(|\psi\rangle,|\varphi\rangle) = \sqrt{1-F(|\psi\rangle,|\varphi\rangle)^2} = \sqrt{1-F(\rho,\sigma)^2}$$

が成り立つことがわかる。これは２つの状態の忠実度が１に近づけばトレース距離は０に近づくということを意味している。一方、定理 3.4 よりある POVM$\{E_m\}$ が存在して

$$F(\rho,\sigma) = \sum_m \sqrt{p_m q_m}$$

を満たす。ここで $p_m = \mathrm{Tr}(\rho E_m), q_m = \mathrm{Tr}(\sigma E_m)$ である。このとき $\sum_m(\sqrt{p_m}-\sqrt{q_m})^2 = 2 - F(\rho,\sigma)$ であり、さらに $|\sqrt{p_m}-\sqrt{q_m}| \leq |\sqrt{p_m}+\sqrt{q_m}|$ と定理 3.10 より

$$\sum_m(\sqrt{p_m}-\sqrt{q_m})^2 \leq \sum_m |p_m - q_m| \leq 2D(\rho,\sigma)$$

が成り立つので、

$$1 - F(\rho,\sigma) \leq D(\rho,\sigma)$$

となることがわかる。これはトレース距離が０に近づけば忠実度は１に近づくこと意味している。トレース距離と忠実度の関係をまとめると

$$1 - F(\rho,\sigma) \leq D(\rho,\sigma) \leq \sqrt{1-F(\rho,\sigma)^2}$$

となり、これは忠実度とトレース距離が量子状態同士の近さを表す距離としては同等であるということを示している。

4　複製（Cloning）と配送（Broadcasting）

本節では量子複製（配送）不可能定理（no-cloning theorem, no-broadcasting theorem）について説明する。この定理は２つの非直交な量子状態を同時に複製（cloning）するような装置は現実には存在せず、さらに非可換な状態に関しては配送（broadcasting）することもできないということを示している。前節で紹介した忠実度の性質を用いて、この複製及び配送不可能定理を証明することができる。

4.1　複製と配送

$\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$ を N 次元の Hilbert 空間 $(\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B)$ とする。複製（Cloning）と配送（Broadcasting）は次のように定義される。

定義 4.1 (1) $\mathcal{H}_A$ 上の n 個の密度作用素の集合 $\{\rho_i\}_{i=1}^n$ が同時に**複製**できるとは $\mathcal{E}(\rho_i \otimes \sigma) = \rho_i \otimes \rho_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ となるような $\mathcal{H}_B$ 上の密度作用素 σ、$B(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ 上のトレースを保存する量子オペレーション $\mathcal{E}$ が存在することである。
(2) $\mathcal{H}_A$ 上の n 個の密度作用素の集合 $\{\rho_i\}_{i=1}^n$ が同時に**配送**できるとは $\mathrm{Tr}_A(\mathcal{E}(\rho_i \otimes \sigma)) = \rho_i$ かつ $\mathrm{Tr}_B(\mathcal{E}(\rho_i \otimes \sigma)) = \rho_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ となるような $\mathcal{H}_B$ 上の密度作用素 σ、$B(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ 上のトレースを保存する量子オペレーション $\mathcal{E}$ が存在することである。

2つの量子状態が複製（または配送）できることの必要十分条件は次のとおりである。

定理 4.1 *[5]* 2つの密度作用素 $\{\rho_0,\ \rho_1\}$ が同時に複製できることの必要十分条件は $\rho_0 = \rho_1$ $(F(\rho_0,\ \rho_1) = 1)$ または $\rho_0\rho_1 = 0$ $(F(\rho_0,\ \rho_1) = 0)$ である。

定理 4.2 *[5]* 2つの密度作用素 $\{\rho_0,\ \rho_1\}$ が同時に配送できることの必要十分条件は $[\rho_0, \rho_1] = 0$ である。

4.2 量子複製不可能定理の証明

この第 4.2 節では定理 4.1 と定理 4.2 の証明を与える。多少複雑なため次のような順番で証明する。まず配送ができるならば $F(\rho_0, \rho_1) = F(\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1)$ であることを示す。その次に複製ができるならば $F(\rho_0, \rho_1) = F(\rho_0, \rho_1)^2$、$F(\rho_0, \rho_1) = F(\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1)$ ならば $[\rho_0, \rho_1] = 0$ であること見る。そして $[\rho_0, \rho_1] = 0$ のとき、どのように配送を行うかを調べる。そして最後に $F(\rho_0, \rho_1) = 0$ または $F(\rho_0, \rho_1) = 1$ のとき、2つの密度作用素を複製する量子オペレーションを具体的に与える。最後に複数個の密度作用素に対する量子複製不可能定理の証明を行う。

定理 4.1 と定理 4.2 の証明)
(1) 配送ができるならば $F(\rho_0, \rho_1) = F(\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1)$ であることを示す。
$\{\rho_0,\ \rho_1\}$ が配送できると仮定する。すなわち、$\mathrm{Tr}_A(\tilde{\rho}_i) = \rho_i$ かつ $\mathrm{Tr}_B(\tilde{\rho}_i) = \rho_i$ $(i = 0, 1)$ となるような量子オペレーション $\mathcal{E}$ と密度作用素 σ が存在する。
次に $M = \rho_0^{-1/2}\sqrt{\rho_0\rho_1\rho_0}\rho_0^{-1/2}$ とすると M は正値作用素なので $M = \sum_m \beta_m |m\rangle\langle m|$ $(\beta_m \geq 0, |m\rangle$: 正規直交基底) と書ける。ここで $E_m = |m\rangle\langle m|$ とすれば、定理 3.4 より

$$F(\rho_0, \rho_1) = \sum_m \sqrt{\mathrm{Tr}(\rho_0 E_m)}\sqrt{\mathrm{Tr}(\rho_1 E_m)}$$

となる。一方で $\mathrm{Tr}_B(\tilde{\rho}_i) = \rho_i$, $\mathrm{Tr}_A(\tilde{\rho}_i) = \rho_i$ より

$$\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_i(E_m \otimes I)) = \mathrm{Tr}(\rho_i E_m) = \mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_i(I \otimes E_m))$$

が成り立ので

$$\sum_m \sqrt{\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_0(E_m\otimes I))}\sqrt{\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_1(E_m\otimes I))} = F(\rho_0,\rho_1) = \sum_m \sqrt{\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_0(I\otimes E_m))}\sqrt{\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_1(I\otimes E_m))}$$

である。これより

$$\begin{aligned} F(\tilde{\rho}_0,\tilde{\rho}_1) &= \min_{\{\tilde{E}_m\}}\sum_m \sqrt{\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_0\tilde{E}_m)}\sqrt{\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_1\tilde{E}_m)} \\ &\le \sum_m \sqrt{\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_0(E_m\otimes I))}\sqrt{\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_1(E_m\otimes I))} \\ &= F(\rho_0,\rho_1) \\ &= \sum_m \sqrt{\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_0(I\otimes E_m))}\sqrt{\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_1(I\otimes E_m))} \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに定理 3.3.(5) と定理 3.5 より

$$\begin{aligned} F(\rho_0,\rho_1) &= F(\rho_0\otimes\sigma,\rho_1\otimes\sigma) \\ &\le F(\mathcal{E}(\rho_0\otimes\sigma),\mathcal{E}(\rho_1\otimes\sigma)) \\ &= F(\tilde{\rho}_0,\tilde{\rho}_1) \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。以上より

$$F(\rho_0,\rho_1) = F(\tilde{\rho}_0,\tilde{\rho}_1)$$

(2) 複製ができるならば $F(\rho_0,\rho_1)=F(\rho_0,\rho_1)^2$ であることを示す。

$$F(\rho_0,\rho_1) = F(\tilde{\rho}_0,\tilde{\rho}_1) = F(\rho_0\otimes\rho_0,\rho_1\otimes\rho_1) = F(\rho_0,\rho_1)^2$$

したがって、$F(\rho_0,\rho_1)=0$ または $F(\rho_0,\rho_1)=1$ である。
(3)$F(\rho_0,\rho_1)=F(\tilde{\rho}_0,\tilde{\rho}_1)$ ならば $[\rho_0,\rho_1]=0$ であることを示す。

$$F(\tilde{\rho}_0,\tilde{\rho}_1) = \sum_m \sqrt{\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_0(E_m\otimes I))}\sqrt{\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_1(E_m\otimes I))} = \sum_m \sqrt{\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_0(I\otimes E_m))}\sqrt{\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_1(I\otimes E_m))}$$

である。極分解を用いると $\sqrt{\tilde{\rho}_0{}^{1/2}\tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_0{}^{1/2}}=\sqrt{\rho_0}\sqrt{\rho_1}\tilde{U}$ と書ける ($\tilde{U}$ はユニタリ作用素)。これと Schwarz の不等式を用いると、

$$\begin{aligned} F(\tilde{\rho}_0,\tilde{\rho}_1) &= \mathrm{Tr}(\sqrt{\rho_0}\sqrt{\rho_1}\tilde{U}) \\ &= \sum_m \mathrm{Tr}(\sqrt{\rho_0}(E_m\otimes I)(E_m\otimes I)\sqrt{\rho_1}\tilde{U}) \\ &\le \sum_m \sqrt{\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_0(E_m\otimes I))}\sqrt{\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_1(E_m\otimes I))} \end{aligned}$$

となる。今、等号が成立しているので、Schwarz の不等式の等号成立条件より、ある $\alpha_m \geq 0$ が存在して $\alpha_m(E_m \otimes I)\sqrt{\tilde{\rho}_0} = (E_m \otimes I)\sqrt{\tilde{\rho}_1}\tilde{U}$ を満たす。また同様にある $\beta_m \geq 0$ が存在して $\beta_m(I \otimes E_m)\sqrt{\tilde{\rho}_0} = (I \otimes E_m)\sqrt{\tilde{\rho}_1}\tilde{U}$ を満たすこともわかる。ここで

$$G = \sum_m \alpha_m E_m,\ H = \sum_m \beta_m E_m$$

とすると、

$$(G \otimes I)\sqrt{\tilde{\rho}_0} = \sqrt{\tilde{\rho}_1}\tilde{U},\ (I \otimes H)\sqrt{\tilde{\rho}_0} = \sqrt{\tilde{\rho}_1}\tilde{U}$$

となり、これより $G\rho_0 G = \rho_1$, $H\rho_0 H = \rho_1$ が成り立つことがわかる。したがって、

$$\rho_0^{1/2}\rho_1\rho_0^{1/2} = \rho_0^{1/2}G\rho_0 G\rho_0^{1/2} = (\rho_0^{1/2}G\rho_0^{1/2})^2$$

となるので、

$$\rho_0^{1/2}G\rho_0^{1/2} = \sqrt{\rho_0^{1/2}\rho_1\rho_0^{1/2}}$$

$$G = \rho_0^{-1/2}\sqrt{\rho_0^{1/2}\rho_1\rho_0^{1/2}}\rho_0^{-1/2}$$

である。よって $G = M$ であり、また同様にして $H = M$ であることがわかる。
$G = H = M$ より $(M \otimes I)\sqrt{\tilde{\rho}_0} = (I \otimes M)\sqrt{\tilde{\rho}_0}$ であることがわかるので、
この式の両辺を部分トレースでとると

$$M\rho_0 = \mathrm{Tr}_B[(I \otimes M)\tilde{\rho}_0]$$

である。また $\sqrt{\tilde{\rho}_0}(M \otimes I) = \sqrt{\tilde{\rho}_0}(I \otimes M)$ でもあるから同様の方法で

$$\rho_0 M = \mathrm{Tr}_B[\tilde{\rho}_0(I \otimes M)]$$

が成り立つことがわかる。したがって $M\rho_0 = \rho_0 M$ であることがわかる。これより

$$\rho_0\rho_1 = \rho_0 M\rho_0 M = M\rho_0 M\rho_0 = \rho_1\rho_0$$

が成り立つことがわかるので、以上より $[\rho_0, \rho_1] = 0$ である。
(4)$[\rho_0, \rho_1] = 0$ のとき配送できることを示す。
$[\rho_0, \rho_1] = 0$ より同時対角化が可能なのである正規直交基底 $\{|i\rangle\}$ を用いて

$$\rho_0 = \sum_{i=1}^N a_i|i\rangle\langle i|,\ \rho_1 = \sum_{j=1}^N b_j|j\rangle\langle j|$$

と表すことができる。このときユニタリ作用素 U を $U|i\rangle|1\rangle \equiv |i\rangle|i\rangle$ で定義し、σ として $|1\rangle\langle 1|$ を選ぶと、

$$\tilde{\rho}_0 = U(\rho_0 \otimes |1\rangle\langle 1|)U^\dagger = \sum_i a_i|i\rangle|i\rangle\langle i|\langle i|,\ \tilde{\rho}_1 = U(\rho_1 \otimes |1\rangle\langle 1|)U^\dagger = \sum_j b_j|j\rangle|j\rangle\langle j|\langle j|$$

となり、$\mathrm{Tr}_A(\tilde{\rho}_i)=\rho_i,\ \mathrm{Tr}_B(\tilde{\rho}_i)=\rho_i$ が成り立つので配送可能であることがわかる。
(5) 論文 [5] には詳しくは説明されていなかったので、$F(\rho_0,\rho_1)=0$ または $F(\rho_0,\rho_1)=1$ のとき複製ができることも示しておく。
・$F(\rho_0,\rho_1)=0$ のとき（ρ_0 と ρ_1 が直交するとき）
まず σ として ρ_0 を選び、P を $\mathrm{supp}(\rho_0)$ への射影作用素とし、$Q=I-P$ とする。このとき

$$\begin{aligned}F(X) &= \mathrm{Tr}[X]\rho_1\\ \mathcal{E}_0(X) &= (P\otimes I)X(P\otimes I)\\ \mathcal{E}_1(X) &= (Q\otimes I)X(Q\otimes I)\\ \mathcal{E}(X) &= \mathcal{E}_0(X)+(I\otimes F)(\mathcal{E}_1(X))\end{aligned}$$

と定義すれば

$$\mathcal{E}(\rho_i\otimes\rho_0)=\rho_i\otimes\rho_i$$

となるので、複製ができることがわかる。
・$F(\rho_0,\rho_1)=1$ のとき（$\rho_0=\rho_1$ のとき）
σ として ρ_0 を選び $\mathcal{E}(\rho_0\otimes\rho_0)=\rho_0\otimes\rho_0$ とすればよい。

（証明終）

以上で２つの密度作用素に対する複製及び配送不可能定理が示されたことになるが、最後に n 個の密度作用素が複製可能であることの必要十分条件についても説明する。

定理 4.3 n 個の密度作用素 $\{\rho_i\}_{i=1}^n$ が同時に複製可能であることの必要十分条件は異なる密度作用素が直交することである。すなわち任意の i,j に対して $\rho_i\rho_j=0$ $(\rho_i\neq\rho_j)$ を満たすことである。

証明）もし n 個の密度作用素 $\{\rho_i\}_{i=1}^n$ が同時に複製可能ならば任意の i,j に対して ρ_i, ρ_j は同時に複製可能なので、定理 4.1 より $\rho_i\rho_j=0$ $(\rho_i\neq\rho_j)$ である。したがって同時に複製可能な密度作用素は互いに直交する。
逆に任意の i,j に対して $\rho_i\rho_j=0$ $(\rho_i\neq\rho_j)$ とする。このとき $i=1,\ldots,n-1$ に対して P_i を $\mathrm{supp}(\rho_i)$ への射影作用素とし、$P_n=I-\sum_{i=1}^{n-1}P_i$ とする。さらに $\mathcal{E}_i(X)=(P_i\otimes I)X(P_i\otimes I)$, $F_i(X)=\mathrm{Tr}(X)\rho_i$ $(i=1,\ldots,n)$ と定義する。最後に $\mathcal{E}(X)=\mathcal{E}_1(X)+\sum_{i=2}^n(I\otimes F_i)(\mathcal{E}_i(X))$ とすると、このとき $k=1,\ldots,n$ に対して

$$\mathcal{E}(\rho_k\otimes\rho_1)=\mathcal{E}_1(\rho_k\otimes\rho_1)+\sum_{i=2}^n(I\otimes F_i)(\mathcal{E}_i(\rho_k\otimes\rho_1))=\rho_k\otimes\rho_k$$

が成り立つので、n 個の密度作用素 $\{\rho_i\}_{i=1}^n$ は同時に複製可能である。

（証明終）

5　量子配送不可能定理への代数的アプローチ

本節では前節で述べた Barnum 等による量子配送不可能定理を作用素代数における標準的な結果や CP 写像の構造を用いることにより、量子状態の集合に関する配送不可能性を考察する。

5.1　数学的準備

この第 5.1 節では作用素代数に関する基本的な用語について定義し、それらに関する基礎知識について説明する。

定義 5.1 *[6]* $\mathcal{H}$ を N 次元 Hilbert 空間, $\mathcal{A} = B(\mathcal{H})$ （$\mathcal{H}$ 上の線形作用素全体）とする。
(i) $\mathcal{B}$ が $B(\mathcal{H})$ の**部分代数 (subalgebra)** であるとは (1) $B(\mathcal{H})$ の部分空間、(2) 単位元を含む、(3) 任意の $X, Y \in \mathcal{B}$ に対して $XY \in \mathcal{B}$、(4) 任意の $X \in \mathcal{B}$ に対して $X^\dagger \in \mathcal{B}$、という条件を満たすことである。[3]
(ii) 部分代数 $\mathcal{B}$ の**可換子環 (commutant)**$\mathcal{B}'$ を

$$\mathcal{B}' = \{X \in B(\mathcal{H}) \mid [X, Y] = 0,\ {}^\forall Y \in \mathcal{B}\}$$

で定義する。
(iii) 線形写像 $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ が**状態 (state)** であるとは (1) 任意の正値作用素 $A \in \mathcal{A}$ に対して $\phi(A) \geq 0$、(2) $\phi(I_\mathcal{A}) = 1$、という条件を満たすことである。また $\mathcal{A}$ 上の状態全体を $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ で表す。
(iv) $\mathcal{K}$ を M 次元 Hilbert 空間とする。このとき線形写像 $K : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{K})$ が**単位的 (unital)CP 写像**であるとは (1) K は CP 写像、(2) $K(I_\mathcal{H}) = I_\mathcal{K}$、という条件を満たすことである。ここで $I_\mathcal{H}$, $I_\mathcal{K}$ はそれぞれ Hilbert 空間 $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ 上の恒等作用素である。また K の**双対写像 (dual map)**$K^\dagger$ は任意の $X \in \mathcal{A}$, $Y \in B(\mathcal{K})$ に対して

$$\langle X, K^\dagger(Y)\rangle = \langle K(X), Y\rangle$$

で定義される。ここで内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は Hilbert-Schmidt 内積を表し、$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\dagger B)$ $(A, B \in B(\mathcal{H}))$ で定義される。
(v) 密度作用素 $\rho_o \in S(\mathcal{H})$ が

$$X \in \mathcal{A},\ X \geq 0,\ \mathrm{Tr}(\rho_0 X) = 0 \Rightarrow X = 0$$

という条件を満たすとき密度作用素 ρ_0 を**忠実状態（faithful）**という。
(vi)$\mathcal{A}$ 上の線形写像 T が CP 写像でかつ射影（$T^2 = T$）であるときこの写像 T を **CP 射影（CP projection）**という。

[3]本来はこの様な集合 $\mathcal{B}$ を単位的 $*$-部分代数（unital $*$-subalgbra）などと呼ぶが、本節では Lindblad の論文に従い、部分代数と呼ぶことにする。

上で定義した状態（正値線形汎関数）ϕ と量子力学における状態（密度作用素）ρ は一対一に対応する。実際、次の定理が成り立つ。

定理 5.1 $B(\mathcal{H})$ 上の任意の状態 ϕ に対して

$$\mathrm{Tr}(\rho A) = \phi(A) \ (A \in B(\mathcal{H}))$$

を満たす密度作用素 ρ が一意に存在する。また逆に任意の密度作用素 ρ に対して上の式を満たす状態 ϕ も一意に存在する

証明）ϕ を $B(\mathcal{H})$ 上の任意の状態、$\{|i\rangle\}$ を $\mathcal{H}$ の正規直交基底とする。このとき

$$e_{ij} = |i\rangle\langle j| \in B(\mathcal{H}) \ , \ x_{ij} \equiv \phi(e_{ij}) \in \mathbb{C}$$

と定義し、さらに $\rho = \sum_{i,j} x_{ji} e_{ij}$ とすれば

$$\mathrm{Tr}(\rho A) = \sum_{i,j} \phi(e_{ji}) \,\mathrm{Tr}(e_{ij} A) = \sum_{i,j} \langle j|A|i\rangle \phi(e_{ji}) = \phi(A)$$

となることがわかる。また、

$$\mathrm{Tr}(\rho) = \sum_i x_{ii} = \sum_i \phi(e_{ii}) = \phi(I_{\mathcal{A}}) = 1 \ , \ \langle\psi|\rho|\psi\rangle = \sum_{i,j} \phi(|i\rangle\langle j|) \langle\psi|i\rangle\langle j|\psi\rangle = \phi(|\psi\rangle\langle\psi|) \geq 0$$

が成り立つことので ρ が密度作用素になることがわかる。さらにある ρ' が存在して $\mathrm{Tr}(\rho' A) = \phi(A) \ (A \in B(\mathcal{H}))$ を満たすとすると、$\mathrm{Tr}(\rho A) = \mathrm{Tr}(\rho' A) \ (A \in B(\mathcal{H}))$ が成り立つので $\rho = \rho'$ である。したがって条件を満たす密度作用素 ρ は一意に存在する。
逆に任意の密度作用素 ρ が与えられたとき、$\phi(A) = \mathrm{Tr}(\rho A)$ とすれば任意の正値作用素 A に対して $\phi(A) \geq 0$ を満たし、また $\phi(I) = \mathrm{Tr}(\rho) = 1$ が成り立つので ϕ は $B(\mathcal{H})$ 上の状態である。

(証明終)

次に作用素に関する Cauchy-Schwarz の不等式について説明する

命題 5.1 (Cauchy-Schwarz) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を $B(\mathcal{H})$ の部分代数、T を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への単位的 CP 写像とする。このとき任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して、

$$T(A^\dagger A) \geq T(A)^\dagger T(A)$$

が成り立つ。

証明) 任意に $A \in \mathcal{A}$ をとる。このとき

$$X \equiv \begin{bmatrix} A^\dagger A & -A^\dagger \\ -A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} A & -I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とする。このとき X は正値作用素で、さらに T は単位的 CP 写像なので

$$(\mathrm{id} \otimes T)(X) = \begin{bmatrix} T(A^\dagger A) & -T(A)^\dagger \\ -T(A) & I \end{bmatrix}$$

も正値作用素である。任意に $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ をとり、$\xi = \begin{bmatrix} \psi \\ T(A)\psi \end{bmatrix}$ とする。このとき

$$\begin{aligned}
\langle \xi, (\mathrm{id} \otimes T)(X)\xi \rangle &= \langle \begin{bmatrix} \psi \\ T(A)\psi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T(A^\dagger A) & -T(A)^\dagger \\ -T(A) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ T(A)\psi \end{bmatrix} \rangle \\
&= \langle \psi | T(A^\dagger A) | \psi \rangle - \langle \psi | T(A)^\dagger T(A) | \psi \rangle - \langle \psi | T(A)^\dagger T(A) | \psi \rangle + \langle \psi | T(A)^* T(A) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | T(A^\dagger A) | \psi \rangle - \langle \psi | T(A)^\dagger T(A) | \psi \rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって任意の $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ に対して $\langle \psi | T(A^\dagger A) | \psi \rangle - \langle \psi | T(A)^\dagger T(A) | \psi \rangle \geq 0$ が成り立つので $T(A^\dagger A) \geq T(A)^\dagger T(A)$ である。

(証明終)

5.2 CP 射影の性質

本節では CP 射影の性質について詳しく説明する。まず始めに $B(\mathcal{H})$ の部分代数 $\mathcal{B}$ を直和分解することを考える。

命題 5.2 $\mathcal{B}$ を $B(\mathcal{H})$ の部分代数とする。このとき $\mathcal{B}$ の中心 (center) $Z_{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$ は $\sum_\alpha P_\alpha = I$ を満たす直交射影 $\{P_\alpha\}$ で生成される。すなわち任意の $B \in Z_{\mathcal{B}}$ は直交射影 $\{P_\alpha\}$ と複素数 $\{b_\alpha\}$ を用いて

$$B = \sum_\alpha b_\alpha P_\alpha$$

と表すことができる。

証明) B を $Z_{\mathcal{B}}$ の任意の要素とする。このとき $Z_{\mathcal{B}}$ は可換な部分代数なので Z_B の任意の要素は同時対角化可能である。したがってある共通のスペクトル射影 $\{P_\alpha\}$ をもつので

$$B = \sum_\alpha b_\alpha P_\alpha$$

と表すことができる。

(証明終)

定理 5.2 *[14]* T を $B(\mathcal{H})$ 上の単位的 CP 写像とし、その Kraus 作用素を $\{V_i\}$ とする。このとき $B \in B(\mathcal{H})$ が $T(B^\dagger B) = T(B^\dagger)T(B)$ を満たすならば、任意の i に対して $V_iT(B) - BV_i = 0$ が成り立つ。また、任意の $A \in B(\mathcal{H})$ に対して

$$T(AB) = T(A)T(B),\ T(B^\dagger A) = T(B^\dagger)T(A)$$

が成り立つ。

証明) $T(X) = \sum_i V_i^\dagger X V_i\ \left(\sum_i V_i^\dagger V_i = I\right)$ である。このとき

$$\begin{aligned}\sum_i (V_iT(B) - BV_i)^\dagger (V_iT(B) - BV_i) &= \sum_i \Big(T(B)^\dagger V_i^\dagger V_i T(B) - T(B)^\dagger V_i^\dagger BV_i \\ &\qquad - V_i^\dagger B^\dagger V_i T(B) + V_i^\dagger B^\dagger BV_i\Big) \\ &= T(B^\dagger)T(B) - T(B^\dagger)T(B) - T(B^\dagger)T(B) + T(B^\dagger B) = 0\end{aligned}$$

となるので、任意の i に対して $V_iT(B) - BV_i = 0$ が成り立つことがわかる。したがって

$$T(AB) = \sum_i V_i^\dagger ABV_i = \sum_i V_i^\dagger AV_iT(B) = T(A)T(B)$$

である。また $T(B^\dagger)V_i^\dagger = V_i^\dagger B^\dagger$ より

$$T(B^\dagger A) = \sum_i V_i^\dagger B^\dagger AV_i = \sum_i T(B^\dagger)V_i^\dagger AV_i = T(B^\dagger)T(A)$$

である。

（証明終）

この定理から次の系 5.1 が簡単に導ける。

系 5.1 $\mathcal{B}$ を $B(\mathcal{H})$ の部分代数、E を $\mathcal{B}$ の上への単位的 CP 射影とし、その Kraus 作用素を $\{V_i\}$ とする。このとき任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して $[V_i, B] = 0\ (i = 1, \ldots, k)$ が成り立つ。また任意の $A \in B(\mathcal{H}),\ B \in \mathcal{B}$ に対して

$$E(AB) = E(A)B\ ,\ E(BA) = BE(A)$$

が成り立つ。

証明) 任意に $B \in \mathcal{B}$ をとる。このとき E は $\mathcal{B}$ の上への CP 射影なので $E(B) = B,\ E(B^\dagger) = B^\dagger$ を満たす。また $\mathcal{B}$ は部分代数なので $B^\dagger B \in \mathcal{B}$ である。よって $E(B^\dagger B) = B^\dagger B = E(B^\dagger)E(B)$ が成り立つ。したがって、定理 5.2 より任意の i に対して $V_iE(B) - BV_i = 0$ が成り立つ。今、$E(B) = B$ なので $[V_i, B] = 0$ である。また定理 5.2 より任意の $A \in B(\mathcal{H})$ に対して

$$E(AB) = E(A)E(B) = E(A)B,\ E(BA) = E(B)E(A) = BE(A)$$

が成り立つことがわかる。

（証明終）

命題 5.3 $\mathcal{B}$を$B(\mathcal{H})$の部分代数、Eを$B(\mathcal{H})$から$\mathcal{B}$の上への任意のCP射影とする。さらに$\{P_\alpha\}$を$\mathcal{B}$の中心$Z_{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$を生成する直交射影、$\mathcal{B}_\alpha = P_\alpha \mathcal{B}$とする。このとき$B(\mathcal{H}_\alpha)$ $(\mathcal{H}_\alpha = P_\alpha \mathcal{H})$から$\mathcal{B}_\alpha$へのCP射影$E_\alpha$によって

$$E(X) = \sum_\alpha E_\alpha(P_\alpha X P_\alpha)$$

と表わすことができる。

証明）任意に$X \in B(\mathcal{H})$をとり、$E_0(X) = \sum_\alpha P_\alpha X P_\alpha$とする。このとき系5.1より

$$E \cdot E_0(X) = \sum_\alpha E(P_\alpha X P_\alpha) = \sum_\alpha P_\alpha E(X) P_\alpha = E_0 \cdot E(X)$$

が成り立つ。さらに$E(X) \in \mathcal{B}$，$P_\alpha \in Z_{\mathcal{B}}(= \mathcal{B} \cap \mathcal{B}')$より$[P_\alpha, E(X)] = 0$である。したがって$E_0 \cdot E(X) = E(X)$なので、

$$E(X) = EE_0(X) = \sum_\alpha E(P_\alpha X P_\alpha)$$

となる。ここで$P_\alpha X P_\alpha \in B(\mathcal{H}_\alpha)$, $E(P_\alpha X P_\alpha) = P_\alpha E(X) P_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$である。したがって$E$を$B(\mathcal{H}_\alpha)$に制限したときの写像$E_\alpha$は$\mathcal{B}_\alpha$へのCP射影になっている。各$\alpha$に対して$E(P_\alpha X P_\alpha) = E_\alpha(P_\alpha X P_\alpha)$である。以上より

$$E(X) = \sum_\alpha E_\alpha(P_\alpha X P_\alpha)$$

と表すことができる。

（証明終）

命題5.3の特別な場合を考える。

系 5.2 $\mathcal{Z}$を$B(\mathcal{H})$の可換な部分代数、E_Zを$\mathcal{Z}$の上へのCP射影とする。このときE_Zは

$$E_Z(X) = \sum_\alpha \rho_\alpha[P_\alpha X P_\alpha] P_\alpha \ (X \in B(\mathcal{H}))$$

と表すことができる。ここでP_αは$\mathcal{Z}$を生成する直交射影、ρ_αは$B(\mathcal{H}_\alpha)$ $(\mathcal{H}_\alpha = P_\alpha \mathcal{H})$上の状態である。

証明）P_αを$\mathcal{Z}$を生成する直交射影とする。このとき$B(\mathcal{H}_\alpha)$から$P_\alpha \mathcal{Z}$へのCP射影E_αによって

$$E_Z(X) = \sum_\alpha E_\alpha(P_\alpha X P_\alpha) \ (X \in B(\mathcal{H}))$$

と表すことができる。P_α は $\mathcal{Z}$ を生成する直交射影なので $P_\alpha \mathcal{Z} = \mathbb{C}P_\alpha$ である。したがって E_α は $B(\mathcal{H}_\alpha)$ から $\mathbb{C}$ への線形汎関数 ρ_α を用いて

$$E_\alpha(X) = \rho_\alpha(X)P_\alpha \ (X \in B(\mathcal{H}_\alpha))$$

と表すことができる。E_α は CP 射影なので任意の正値作用素 $X \in B(\mathcal{H}_a)$ に対して $E_\alpha(X) \geq 0$、$E_\alpha(P_\alpha) = P_\alpha$ である[4]。である。よって $\rho_\alpha(X) \geq 0,\ \rho_\alpha(P_\alpha) = 1$ なので ρ_α は状態である。以上より

$$E_Z(X) = \sum_\alpha \rho_\alpha[P_\alpha X P_\alpha]P_\alpha \ (X \in B(\mathcal{H}))$$

と表すことができる。

(証明終)

5.3 配送可能性に関する考察

この節では第 5.2 節で示した CP 射影の性質を用いて配送可能な集合がどのような性質を持つのかを見ていく。最初にこれからの議論で用いる記号をまとめて記述しておく。

$\mathcal{H}$ を n 次元 Hilbert 空間、$\mathcal{A} = B(\mathcal{H})$、$S(\mathcal{H})$ を密度作用素の集合とする。
K を $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ への単位的 CP 写像、R と T をそれぞれ $R(X) = K(X \otimes I),\ T(Y) = K(I \otimes Y)\ (X, Y \in \mathcal{A})$
とする。またさらに T と R で不変な集合を

$$\mathcal{A}_T = \{Y \in \mathcal{A} \mid T(Y) = Y\},\ \mathcal{A}_R = \{X \in \mathcal{A} \mid R(X) = X\}$$

で、双対写像 $T^\dagger$ と $R^\dagger$ で不変な密度作用素の集合を

$$\mathcal{E}_T = \{\rho \in S(\mathcal{H}) \mid T^\dagger(\rho) = \rho\},\ \mathcal{E}_R = \{\rho \in S(\mathcal{H}) \mid R^\dagger(\rho) = \rho\}$$

と定義する。さらに T と R を用いて $E_T,\ E_R$ をそれぞれ

$$E_T = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n,\ E_R = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} R^n$$

で定義する。最後に $E'_T,\ E'_R$ を $\mathcal{A}'_T,\ \mathcal{A}'_R$ の上への CP 射影とし、その双対写像によって

$$\mathcal{E}'_T = E'^{\dagger}_T[S(\mathcal{H})],\ \mathcal{E}'_R = E'^{\dagger}_R[S(\mathcal{H})]$$

と定義する。

[4] P_α は $\mathcal{H}_\alpha$ 上の恒等作用素である。

以下の議論では特に断りがない限りは上記の記号を用いることとする。次に上記で定義したものがどのような性質をもっているのかを説明する。

命題 5.4 次の性質が成り立つ。
(1) $E_T T = T E_T = E_T E_T = E_T$, $E_R R = R E_R = E_R E_R = E_R$
(2) $E_T(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_T$, $E_R(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_R$
(3) $T^\dagger(X) = \mathrm{Tr}_1(K^\dagger(X)),\ R^\dagger(X) = \mathrm{Tr}_2(K^\dagger(X))\ (X \in B(\mathcal{H}))$
(4) $\mathcal{E}_T = E_T^\dagger[S(\mathcal{H})]$, $\mathcal{E}_R = E_R^\dagger[S(\mathcal{H})]$

証明) T に関してのみ証明を行う。R に関しても同様に証明できる。
(1)

$$\begin{aligned} E_T T = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n T &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left(\sum_{n=1}^{N} T^n - T + T^{N+1}\right) \\ &= E_T - \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}T + \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}T^{N+1} = E_T \end{aligned}$$

$$E_T E_T = \left(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n\right) E_T = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(T^n E_T) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} E_T = E_T$$

(2) 任意に $A \in \mathcal{A}_T$ をとる。$T(A) = A$ である。

$$E_T(A) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^n(A) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} A = A$$

したがって $A \in E_T(\mathcal{A})$ である。逆に任意に $A \in E_T(\mathcal{A})$ に対して、(1) より $A = E_T(A)$ が成り立つことがわかるので

$$T(A) = T E_T(A) = E_T(A) = A$$

である。よって $A \in \mathcal{A}_T$ である。以上より $\mathcal{A}_T = E_T(\mathcal{A})$
(3) 任意に $X, Y \in \mathcal{A}$ をとる。

$$\begin{aligned} \langle X, T^\dagger(Y)\rangle &= \langle T(X), Y\rangle \\ &= \langle K(I\otimes X), Y\rangle \\ &= \langle I\otimes X, K^\dagger(Y)\rangle \\ &= \mathrm{Tr}(I\otimes X^\dagger\ K^\dagger(Y)) \\ &= \mathrm{Tr}(X^\dagger\,\mathrm{Tr}_1(K^\dagger(Y))) \\ &= \langle X, \mathrm{Tr}_1(K^\dagger(Y))\rangle \end{aligned}$$

よって$T^\dagger(Y) = \mathrm{Tr}_1(K^\dagger(Y))$が成り立つ。
(4) 任意に$\rho \in E_T^\dagger(S(\mathcal{H}))$をとる。ある$\tilde{\rho} \in \mathcal{E}(S(\mathcal{H}))$が存在して$\rho = E_T^\dagger(\tilde{\rho})$とかける。このとき任意の$X \in \mathcal{A}$に対して

$$\langle X, \rho \rangle = \langle X, E_T^\dagger(\tilde{\rho}) \rangle = \langle E_T(X), \tilde{\rho} \rangle$$

が成り立つ。一方、

$$\langle X, T^\dagger(\rho) \rangle = \langle T(X), \rho \rangle = \langle T(X), E_T^\dagger(\tilde{\rho}) \rangle = \langle E_T T(X), \tilde{\rho} \rangle = \langle E_T(X), \tilde{\rho} \rangle$$

よって任意の$X \in \mathcal{A}$に対して$\langle X, \rho \rangle = \langle X, T^\dagger(\rho) \rangle$が成り立つので$T^\dagger(\rho) = \rho$、以上より$\rho \in \mathcal{E}_T$
逆に任意に$\rho \in \mathcal{E}_T$をとる。$T^\dagger(\rho) = \rho$である。任意の$X \in \mathcal{A}$に対して$\langle T(X), \rho \rangle = \langle X, T^\dagger(\rho) \rangle = \langle X, \rho \rangle$が成り立つ。さらに$T(X) \in \mathcal{A}$より$\langle T^n(X), \rho \rangle = \cdots = \langle T(X), \rho \rangle = \langle X, \rho \rangle$である。

$$\begin{aligned} \langle X, E_T^\dagger(\rho) \rangle &= \langle E_T(X), \rho \rangle \\ &= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle T^n(X), \rho \rangle \\ &= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle X, \rho \rangle \\ &= \langle X, \rho \rangle \end{aligned}$$

したがって$E_T^\dagger(\rho) = \rho$であることがわかる。以上より$\rho = E_T^\dagger(\rho) \in E_T^\dagger(S(\mathcal{H}))$である。
(証明終)

この命題の (1)、(2) よりE_T, E_Rはそれぞれ$B(\mathcal{H})$から$\mathcal{A}_T$, $\mathcal{A}_R$へのCP射影であることがわかる。さらに$\mathcal{A}_T$が部分代数ならばE_Tに対して第5.2節の系5.1を適用できることがわかる。また、Kは単位的CP写像なので$K^\dagger$はTP-CP写像である。$K^\dagger$があるTP-CP写像$\mathcal{E}$と$\mathcal{H}$上の密度作用素σを用いて$K^\dagger(\rho) = \mathcal{E}(\rho \otimes \sigma)$と表され、さらに$\mathrm{Tr}_1(K^\dagger(\rho)) = \rho$, $\mathrm{Tr}_2(K^\dagger(\rho)) = \rho$という条件を満たすとき、$\rho$は配送可能である。(3) より、単位的CP写像$K$がTP-CP写像$\mathcal{E}$と密度作用素$\sigma$を用いて$K^\dagger(\rho) = \mathcal{E}(\rho \otimes \sigma)$と表されるとき、集合$\mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_R$に含まれるような密度作用素の集合がトレースを保存する完全正写像$\mathcal{K}^\dagger$で配送可能な集合であるということがわかる。この集合$\mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_R$の可換性を示せれば、配送可能な集合が可換であるということが示せる。

以下の議論では常に忠実状態$\rho_0 \in \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_R$が存在すると仮定する。
次に$\mathcal{A}_T$が$\mathcal{A}$の部分代数になることを示す。

命題 5.5
$\mathcal{A}_T$は$\mathcal{A}$の部分代数である。

証明) (1)$\mathcal{A}_T$が$\mathcal{A}$の部分空間であることは明らか。
(2)$X, Y \in \mathcal{A}_T \Rightarrow XY \in \mathcal{A}_T$を示す。

X を $\mathcal{A}_T$ の任意の元とする。Schwarz の不等式より $X^\dagger X = T(X)^\dagger T(X) \le T(X^\dagger X)$ である。さらに忠実状態 $\rho_0 \in \mathcal{E}_T$ に対して

$$\mathrm{Tr}(\rho_0(T(X^\dagger X) - X^\dagger X)) = \mathrm{Tr}(\rho_0 T(X^\dagger X)) - \mathrm{Tr}(\rho_0 X^\dagger X) = 0$$

が成り立つので $T(X^\dagger X) - X^\dagger X = 0$ である。したがって任意の $X \in \mathcal{A}_T$ に対して $X^\dagger X \in \mathcal{A}_T$ である。
また、

$$X^\dagger Y = \frac{1}{4}\{(X+Y)^\dagger(X+Y) - (X-Y)^\dagger(X-Y) - i((X+iY)^\dagger(X+iY) - (X-iY)^\dagger(X-iY))\}$$

とかけるので $T(X^\dagger Y) = X^\dagger Y$、すなわち $X^\dagger Y \in \mathcal{A}_T$ である。一方、$X \in \mathcal{A}_T$ より $T(X^\dagger) = T(X)^\dagger = X^\dagger$ であるから $A^\dagger \in \mathcal{A}_T$ である。以上より $XY \in \mathcal{A}_T$ である。

（証明終）

この命題と命題 5.4 より E_T は $B(\mathcal{H})$ から部分代数 $\mathcal{A}_T$ への CP 射影であることがわかる。したがって E_T に対しては第 5.2 節で示した CP 射影の性質を適用することができる。

配送可能な集合 $\mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_R$ がどのような集合であるかを説明するために、次の命題を示す。

命題 5.6

$$R(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}'_T$$

が成り立つ。

証明) 任意に $Y \in \mathcal{A}_T$ をとる。
$T(Y) = K(I \otimes Y) = Y$ より、

$$K(I \otimes Y^\dagger Y) - Y^\dagger K(I \otimes Y) - K(I \otimes Y)^\dagger Y + Y^\dagger Y = 0$$

一方、K は単位的 CP 写像なので

$$K(I \otimes Y) = \sum_i V_i^\dagger (I \otimes Y) V_i \quad \left(\sum_i V_i^\dagger V_i = I\right)$$

とかける。したがって

$$\sum_i \Big((I \otimes Y)V_i - V_i Y\Big)^\dagger \Big((I \otimes Y)V_i - V_i Y\Big) = 0$$

が成り立つので、任意の i に対して $(I \otimes Y)V_i - V_i Y = 0$ である。これより

$$\begin{aligned} K(X \otimes Y) &= \sum_i V_i^\dagger (X \otimes I) V_i Y = K(X \otimes I) Y \\ &= \sum_i Y V_i^\dagger (X \otimes I) V_i = Y K(X \otimes I) \end{aligned}$$

である。以上より $[R(X), Y] = 0$ となることがわかるので $R(X) \in \mathcal{A}_R'$ となる。

(証明終)

Lindblad の論文ではこの命題 5.6 より $\mathcal{E}_R \subseteq \mathcal{E}_T'$ が成り立つとしているが、これは一般に成り立たない。実際、次のような例が考えられる。$\mathcal{K}$ を Hilbert 空間、$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_3 = \mathcal{K}$、$\mathcal{H} = \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2 \otimes \mathcal{K}_3$ とする。このとき、$B(\mathcal{K}_1) \otimes B(\mathcal{K}_2)$, $B(\mathcal{K}_2) \otimes B(\mathcal{K}_3)$ 上の状態 ρ_{12}, ρ_{23} を用いて R と T を

$$
\begin{aligned}
R(A \otimes B \otimes C) &= \rho_{23}(B \otimes C) \cdot (A \otimes I \otimes I) \\
T(A \otimes B \otimes C) &= \rho_{12}(A \otimes B) \cdot (I \otimes I \otimes C)
\end{aligned}
$$

と定義し、$B(\mathcal{H}) \otimes B(\mathcal{H})$ から $B(\mathcal{H})$ への写像 K を

$$
K(A \otimes B \otimes C \otimes A' \otimes B' \otimes C') = R(A \otimes B \otimes C) \cdot T(A' \otimes B' \otimes C') = \rho_{23}(B \otimes C) \cdot \rho_{12}(A' \otimes B') \cdot (A \otimes I \otimes C')
$$

とする。このとき K は単位的 CP 写像、R と T はそれぞれ $\mathcal{A}_T = \mathbb{C}I \otimes \mathbb{C}I \otimes B(\mathcal{K})$, $\mathcal{A}_R = B(\mathcal{K}) \otimes \mathbb{C}I \otimes \mathbb{C}I$ の上への CP 射影になっている。したがって

$$
E_T = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} T^n = T, \ E_R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} R^n = R
$$

である。$B(\mathcal{K}_3)$ 上の状態 ρ_3 によって $E_T'(A \otimes B \otimes C) = \rho_3(C)(A \otimes B \otimes I)$ と定義すると、これは $\mathcal{A}_T' = B(\mathcal{K}) \otimes B(\mathcal{K}) \otimes \mathbb{C}I$ への CP 射影になっている。ρ を $\mathcal{H}$ 上の任意の密度作用素とすると、任意の A, B, $C \in B(\mathcal{K})$ に対して

$$
\begin{aligned}
\langle A \otimes B \otimes C, E_R^\dagger(\rho) \rangle &= \langle \rho_{23}(B \otimes C)(A \otimes I \otimes I), \rho \rangle \\
&= \langle A \otimes B \otimes C, \mathrm{Tr}_{23}(\rho) \otimes \rho_{23} \rangle
\end{aligned}
$$

が成り立つので $E_R^\dagger(\rho) = \mathrm{Tr}_{23}(\rho) \otimes \rho_{23}$ となることがわかる。同様にして $E_T^\dagger(\rho) = \rho_{12} \otimes \mathrm{Tr}_{12}(\rho)$, $E'^\dagger_T(\rho) = \mathrm{Tr}_3(\rho) \otimes \rho_3$ であることがわかるので、もし ρ_{23} が積状態[5]でないならば $\mathcal{E}_R \not\subseteq \mathcal{E}_T'$ である。しかし、これは量子配送不可能定理を否定するものではない。この例では $E_T^\dagger(\rho) = \rho_{12} \otimes \mathrm{Tr}_{12}(\rho)$ なので、配送可能な集合 $\mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_R$ は空集合または要素が 1 つの集合となることがわかる。したがってこの例では配送可能な集合は可換である。

次に CP 射影 E_T と E_R が交換可能、すなわち、任意の $X \in B(\mathcal{H})$ に対して $E_T \cdot E_R(X) = E_R \cdot E_T(X)$ が成り立つ場合、$\mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_R$ が可換であることが示せる。実際、任意の $X \in B(\mathcal{H})$ に対して $E_T \cdot E_R(X) = E_R \cdot E_T(X) \in \mathcal{A}_T \cap \mathcal{A}_R$ であり、さらに命題 5.6 より $\mathcal{A}_T \cap \mathcal{A}_R \subseteq \mathcal{A}_T \cap \mathcal{A}_T'$ が成り立つ。また、忠実状態 $\rho_0 \in \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_R$ が存在するので $\mathcal{A}_R \cap \mathcal{A}_T$ は部分代数である。したがって、$E_R \cdot E_T$ は可換な部分代数 $\mathcal{A}_T \cap \mathcal{A}_R$ の上への CP 射影なので系 5.2 より

$$
E_R \cdot E_T(X) = \sum_{\alpha} \rho_\alpha[P_\alpha X P_\alpha] P_\alpha \ (X \in B(\mathcal{H}))
$$

[5] $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$ 上の密度作用素 ρ が $\mathcal{K}$ 上のある密度作用素 σ_1, σ_2 によって $\rho_{23} = \sigma_1 \otimes \sigma_2$ と表すことができるとき ρ を**積状態**（**product state**）という。

と表すことができる。ここで P_α は $\mathcal{A}_T \cap \mathcal{A}_R$ を生成する直交射影、ρ_α は $B(\mathcal{H}_\alpha)$ $(\mathcal{H}_\alpha = P_\alpha \mathcal{H})$ 上の状態である。任意に $\rho \in \mathcal{E}_R \cap \mathcal{E}_T$ をとると、$E_R^\dagger(\rho) = \rho$ かつ $E_T^\dagger(\rho) = \rho$ なので $E_T^\dagger E_R^\dagger(\rho) = \rho$ である。任意の $X \in B(\mathcal{H})$ に対して

$$
\begin{aligned}
\langle X, \rho \rangle &= \langle X, E_T^\dagger E_R^\dagger(\rho) \rangle \\
&= \langle E_R \cdot E_T(X), \rho \rangle \\
&= \sum_\alpha \langle \hat{\rho_\alpha}[X] P_\alpha, \rho \rangle \\
&= \sum_\alpha \langle \mathrm{Tr}(\hat{\rho_\alpha} X) P_\alpha, \rho \rangle \\
&= \sum_\alpha \langle X, \mathrm{Tr}(\rho P_\alpha) \hat{\rho_\alpha} \rangle
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ここで $\hat{\rho_\alpha}$ は $\hat{\rho_\alpha}[X] = \rho_\alpha[P_\alpha X P_\alpha]$ $(X \in B(\mathcal{H}))$ で定義される $B(\mathcal{H})$ 上の状態である。以上より任意の $\rho \in \mathcal{E}_R \cap \mathcal{E}_T$ は

$$
\rho = \sum_\alpha \mathrm{Tr}(\rho P_\alpha) \hat{\rho_\alpha}
$$

と表すことができるので $\mathcal{E}_R \cap \mathcal{E}_T$ は可換な集合である。

謝辞

本研究を進めるにあたり、小澤教授には常日頃より懇切丁寧にご指導をして頂き、本研究を進めていく上で非常に有益なご意見をして頂きました。木村氏には時間や場所を問わず、快く質問に応じ議論をして頂きました。お二方には量子力学や C^* 代数等、様々な事を一から親切丁寧に教えて頂き、大変感謝しております。お二方のお力添えなしには本研究を行うことはできませんでした。また研究に関することだけでなく、様々な場面で支えて頂いた堀田氏、常に暖かい言葉で励まして頂いた数学教室の先輩、後輩の方々に深く感謝致します。生活面等で全力を挙げて支えて頂いた私の家族に深く感謝致します。

参考文献

[1] A. Peres, *Quantum theory: Concepts and methods*, (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993).

[2] W. K. Wootters and W. H. Zurek, *A single quantum cannot be cloned*, Nature (London) **299**, 802 (1982).

[3] D. Dieks, *Communication by EPR devices*, Phys. Lett. **92**A, 271 (1982).

[4] H. P. Yuen, *Amplification of quantum states and noiseless photon amplifiers*, Phys. Lett. **113**A, 405 (1986).

[5] H. Barnum, C. M. Caves, C. A. Fuchs, R. Jozsa, and B. Schumacher, *Noncommuting mixed states cannot be broadcast*, Phys. Rev. Lett. **76**, 2818 (1996).

[6] G. Lindblad, *A general no-cloning theorem*, Lett. Math. Phys. **47**, 189 (1999).

[7] C. A. Fuchs, *Distinguishability and Accessible Information in Quantum Theory*, Ph. D. thesis, The University of New Mexico, Albuquerque, NM, (1996).

[8] M. Ozawa, 講義ノート, 情報基礎数理学 IIIa, (2006)

[9] C. W. Helstrom, *Quantum detection and estimation theory* (Academic Press, New York, 1976).

[10] M. Ozawa, *Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements*, Ann. Phys. **311**, 350 (2004).

[11] M. D. Choi, *Completely positve linear maps on complex matrices*, Linear Algebra and Applications, **10**, 285 (1975).

[12] M. D. Choi, *Positive linear maps on C^*-algebra*, Canad. J, Math. **24**, 520 (1972).

[13] R. Schatten, *Norm ideals of completely Continuous operators*, (Springer-Verlag, Berlin, 1970).

[14] M. Ozawa, *Quantum measuring processes of continuous observables*, J. Math. Phys. **25**, 79 (1984).

[15] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, (Cambridge UP, Cambridge, 2000).