1.10 偶置換と奇置換・交代群

命題 1.29. 任意の置換はいくつかの互換 $\tau_1, \ldots, \tau_n$ の積として,

$$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_n$$

と表される. (各 τ_i は数字 j_i と k_i の互換 $\tau_i = (j_i\ k_i)$).

例 1.30. (1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ のとき, $\sigma = (1\ 3) = (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)$.

(2) $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ のとき, $\sigma = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)(5\ 6)$. 一般に, 長さ r のサイクル $(i_1 i_2 \cdots i_r)$ は,

$$(i_1\ i_2\ \cdots\ i_r) = (i_1\ i_2)(i_2\ i_3)\cdots(i_{r-1}\ i_r) \tag{1.3}$$

と (隣合う) 互換の積で表される.

上の例 (1) からもわかる通り, 置換の互換の積としての表し方は一意でない. しかし,

命題 1.31. σ を互換の積として表すとき, 互換の個数 r の偶奇は表し方に寄らず一意に定まる.

任意の互換は差積 (Van del monde 行列式)

$$\Delta := \prod_{i<j}(x_j - x_i)$$

に (-1) 倍で作用する. 命題において置換 $\sigma \in S_n$ を 2 通りの互換の積で表し, Δ に σ を作用させ, 符号を比較することで証明される. 偶数個の互換の積で表される置換を偶置換, 奇数個の積で表される置換を奇置換という.

対称群 S_n(n 次置換のなす群) において, 偶置換全体は部分群をなし (各自で確認),

定義 1.32.

$$A_n = \left\{\sigma \in S_n \;\middle|\; \sigma \text{ は偶置換}\right\} \subset S_n$$

を (n 次の) 交代群という.

例 1.33. (1) 3 次対称群 S_3 は $6(= 3!)$ 個の元

$$e, \quad \rho_1 = (1\ 2\ 3), \quad \rho_2 = (1\ 3\ 2), \quad \tau_1 = (2\ 3), \quad \tau_2 = (1\ 3), \quad \tau_3 = (1\ 2)$$

からなる. このうち, ρ_1 と ρ_2 は, (1.3) より $\rho_1 = (1\ 2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3), \rho_2 = (1\ 3\ 2) = (1\ 3)(3\ 2)$ と表される. 従って偶置換は e, ρ_1, ρ_2 であり, $A_3 = \{e, \rho_1, \rho_2\}$.

(2) S_4 の元は $24(= 4!)$ 個の 4 次置換からなる. 具体的には,

- 恒等置換 e
- 互換 $(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4)$
- 可換な 2 個の互換の積 $(1\ 2)(3\ 4)$,$(1\ 3)(2\ 4)$,$(1\ 4)(2\ 3)$
- 長さ 3 のサイクル $(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)$
- 長さ 4 のサイクル $(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)$

の 24 個である. 交代群 $A_4 \subset S_4$ は恒等置換 (1 個), 可換な 2 個の互換の積 (3 個), 長さ 3 のサイクル (8 個) からなる.

[‡]講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2012/gt.html