無限に小さいとは

— 無限小 (*infinitesimal*) の意味と形式

角田 譲

§1. ライプニッツの無限小及びその排除

最初に, ツェノンの逆理と呼ばれている“アキレスは決して亀を追い抜くことはできない”という逆理について考えてみましょう. 今, アキレスは毎秒 a m, 亀は毎秒 b m で同方向に向かって同時にスタートを切るとする. ただし, アキレスは亀の後方 l m に位置しているとする. アキレスは当然亀よりも走るのがはるかに速いので, $a > b$ です. いつアキレスが亀を追い抜くかと言う問題は, いわゆる旅人算により, $\dfrac{l}{a-b}$ 秒後であるとすぐ解けます. しかし, 次のように主張されたらどうするでしょうか?

アキレスが亀のスタート点に到着したときには, その間に亀はアキレスの前方何メートかの地点 x_1 に進んでいる. 次に, アキレスが地点 x_1 に到着したときには, 亀はやはりアキレスの前方何メートルかの地点 x_2 にいる. 次にまた, アキレスが地点 x_2 に到着したときには, 亀はやはりアキレスの前方何メートルかの地点 x_3 にいる. このことは無限に繰り返される. 従って, 永遠にアキレスは亀を追い抜くことはできない.

上のもっともらしい屁理屈をどの様に論破したらいいのでしょうか? 確かに, 上のプロセスは無限に繰り返されます. だからといって, 永遠にアキレスは亀を追い抜くことができないと言うことになるでしょうか? アキレスが亀のスタートした地点 x_0 に到着するのはスタートを切った時点から $\dfrac{l}{a}$ 秒後です. その間, 亀は $\dfrac{l}{a} \times b$ m 進んでいます. アキレスが地点 x_1 に到着するのはスタートを切った時点から $\dfrac{l}{a} + \dfrac{l}{a} \times b \times \dfrac{1}{a} = \dfrac{l}{a} + \dfrac{l}{a} \times \dfrac{b}{a}$ 秒後です. その間, 亀は $\dfrac{l}{a} \times \dfrac{b}{a} \times b$ m また進んでいます. アキレスが地点 x_2 に到着するのはス

タートを切った時点から $\frac{l}{a}+\frac{l}{a}\times\frac{b}{a}+\frac{l}{a}\times\frac{b}{a}\times b\times\frac{1}{a}=\frac{l}{a}+\frac{l}{a}\times\frac{b}{a}+\frac{l}{a}\times\frac{b^2}{a^2}$ 秒後です. 同様にして, アキレスが地点 x_n に到着するのはスタートを切った時点から

$$\frac{l}{a}\left\{1+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right\}$$

秒後であることが判ります.

$$S_n=1+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

とおくと,

$$\frac{b}{a}\times S_n=\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{b}{a}\right)^n+\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}$$

となるので,

$$S_n-\frac{b}{a}\times S_n=1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}$$

となります. 従って,

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1-\frac{b}{a}}$$

です. 従って, アキレスが地点 x_n に到達するのはスタートを切ってから

$$\frac{l}{a}\times S_n=\frac{l}{a-b}\times\left\{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right\}$$

秒後です.

$$\frac{l}{a-b}-\frac{l}{a}\times S_n=\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}$$

を考えてみます. $0<\frac{b}{a}<1$ なので $\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}$ は n を十分に大きく取れば欲すれば欲するだけ小さくできる量となります. 結論としては, 確かに, 思考的プロセスとしてツェノンの逆理におけるプロセスは無限に繰り返すことがで

きますが, アキレスが地点 x_n に到達する時点はスタート時点から $\dfrac{l}{a-b}$ 秒後にいくらでも近くなるのです. 従って, 永遠にアキレスは亀を追い越すことができないと言うことはなく, $\dfrac{l}{a-b}$ 秒後についには追い越すこととなるのです. この逆理の巧妙さは, 思考的プロセスが無限に繰り返すことができると言うことと, 時間的に永遠であるということを心理的に同一してしまう錯覚を旨くついたところにあるようです.

私たちが重要とするのは, 欲すれば n を大きくすれば欲するだけいくらでも小さくなる量 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}$ です. いかなる正数 $r>0$ を取ってきても, n さえ十分に大きく取れば $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n+1}<r$ となります. このようにある変化する量の絶対値が限りなく小さくなるとき, それを**無限小** (*infinitesimal*) と呼びます. 現在では, 通常, 無限小と云った場合, ある量 y がある量 x に従属して変化している場合, 量 x が一定の値に近づくとき, それにつれて y が 0 に限りなく 0 に近づくとき, y を無限小といいsます. 関数の極限の概念を使用すれば, 関数 $f(x)$ に対して $\lim_{x\to a} f(x)=0$ なるとき "$x\to a$ のとき $f(x)$" は無限小である等と云います. しかし, この無限小の定義にもよく考えると何をさして無限小と言っているのか今ひとつ明瞭でありません. x が a に限りなく近づくという仮定のもとに, $f(x)$ が 0 に限りなく近づく関数 f のことをさしているのか? それでは x が a に限りなく近づくという仮定とは一体いかなることであるのか? それは $x-a$ が無限小と言うことではないのではなかろうか? このように無限小というものが何を指し示しているのかを真剣に考えると, それほど容易に解決がつく問題ではありません. そもそも無限小という概念が重要となってくるのは微積分の創始者であるライプニッツがその基盤を無限小においていたからです. 微積分はライプニッツ (G. W. Leibniz, 1646–1716) とニュートン (I. Newton, 1642–1727) によって創始されましたが, その基盤とするところは両者は異なっていました. ライプニッツは無限小の概念を基盤として, ニュートンは流率の概念 (今で云う, 極限の概念に近い) を基盤として微積分を創始しました. ライプニッツの無限小の概念については, 当初から問題を孕んでいました. ライプニッツは無限小及び無限大について一見矛盾をしている次のような二つの見解を述べています.

(a) 無限小や無限大は微積分を展開するために便宜的に導入された仮想的な数 (*fiction*) であり，必要であればそれらを排除してアルキメデス流の取り尽くし法に還元できる．

(b) 無限小や無限大は有限の量である．ただし，それは通常の量とは異なり，変動する量である．無限小は欲すれば欲するだけ小となる，無限大は欲すれば欲するだけ大となる変動する量である．

この二つの無限小と無限大についての見解は，後に見るように，一つの概念の二面をつく深い洞察を含んでいるものでありますが，当時の一級の知性の持ち主の人にさえ理解しがたいものであったと思います．(a) の見解において，ライプニッツは無限小を通常のいかなる数よりもその絶対値が小となる仮想的な数として捉えるべきであると云っているのです．実際，その実在性については，他の部分で "実在性については実のところ自分は判らない" と告白しています．その当時の人にとって，その実在性も不確かなものを認めるのには相当に抵抗があり，いろいろの批判や論争があったようです．それにも関わらず，ライプニッツの創始した微積分はその記号法の便利さから，無限小という曖昧な概念を引きずりながらも急速に発展をなし，科学技術の基礎となり 19 世紀にいたりコーシー (A. L. Cauchy, 1789–1857) により "解析学教程" が著され，微積分の基礎はかなり今のものに近づいていきます．しかし，コーシーの解析学教程においても無限小の概念は取り除かれることはなかったのです．コーシーは無限小を最初に述べたように関数が 0 に近づく状態として捉えていたと思われがちですが，関数については無限小よりも後の章で説明されており，無限小を基本的な概念として捉えていたことが判ります．結局，19 世紀中期から末にかけて，ボルツアーノ (B. P. N. J. Bolzano, 1781–1848), ワイエルシュトラス (K. T. W. Weierstrass, 1815–1897) 等の努力により，微積分の基礎が固まり，ライプニッツの無限小を完全に排除することができたのです．

§2. 無限小の復活

解析の基礎が堅固にされ，無限小や無限大というような曖昧な概念に依存

しなくてもよくなっても，

無限小を導入して解析学を整合的な方法で展開することができるか?

ということは人々にとって，依然として魅力的な問題でした．0でない無限小というものを通常の実数として捉えることはできません．なぜなら，ϵ を0でない無限小とするとき，それはいかなる正実数 r に対しても $|\epsilon| < r$ となりますが，ϵ が通常の実数であれば，$|\epsilon| < |\epsilon|$ となり矛盾がおこってしまいます．この矛盾を回避するためには，どうしたらいいか? すぐに思いつく解決方法は，有理数の体系から実数の体系へと数の体系を拡張したように，実数の体系を無限小を含むような体系に拡張することです．実際に，実数全体の集合 $\mathbf{R}$ を真に含み，実数の四則演算及び順序が拡張されているような数体系を考えれば，必然的にその中には無限小が存在します．しかし，それではどのようにしてライプニッツがなした如く微積分をその拡張された数体系を基にして展開するのか? ライプニッツは無限小に対してもあたかも通常の実数と同じように扱っています．結局のところ，そのような新しい数体系の拡張をして，微積分を展開するには数理論理学の発展を待たねばならなかったのです．そのことは, ようやく，1950年代の終わりに; ロビンソン (A. Robinson, 1918–1974) により解決されました．ロビンソンは 数理論理学の基本的な定理であるコンパクトネス定理を使用して，集合としては真に $\mathbf{R}$ よりも拡大している $\mathbf{R}^*$ で，$\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}^*$ は文章としては全く同じものが成立する数体系の拡張を考えたのです．その方法は微積分だけでなく他の数学にも応用され，直感的な展開とそのエレガントさで，多数の人に注目され, 超準解析学 として知られるようになりました．ロビンソンはライプニッツの微積分を完全に厳密に具現化したと見なされました．しかし，本当にライプニッツはそのような数体系の拡張をすることによって彼の無限小を正当化しなければならないと思っていたのでしょうか? それにしてはライプニッツの無限小についての先に挙げた二つの見解が気になります．見解 (a) について考えてみましょう．ロビンソンのように無限小を $\mathbf{R}^*$ の数として具現化するのではなく, 仮想的な実数であると捉えていると見解 (a) を考えるべきではないでしょうか? しかし, そのような実際に存在しない仮想的なものを私たちは無責任に取り扱っていいのでしょうか? しかし, カントール (G. Cantor) の云ったように “数学はその自由性にある”．存在性が言えない仮想的なものでも, それから矛盾が

生じなければ取り扱ってもいいのではないでしょうか? しかし, その取り扱い方法は? 仮想的なものを対象とする論理は通常の論理で対応できるのか? ここで私たちが数学で通常使用する論理について反省して, 仮想的なものを扱うことのできる論理を探し出しだしてみましょう.

§3. 述語と超述語

命題と述語　命題とは原則的に真偽が定まっている文章を云います. 例えば, "三角形の内角の和は 180 度"は真な命題ですが, "太陽は西から上る"は偽な命題です. 命題を示すのに $A, B, C, \ldots$ 等の文字を用いることにしましょう. 命題の内には, いくつかの命題が連結されてできているものと考えられるものがあります. 例えば, 命題

"太郎は貧しいが心は美しい"

は二つの命題

(1) "太郎は貧しい"
(2) "太郎の心は美しい"

を "かつ"で連結させて得られる命題

"太郎は貧しくかつ太郎の心は美しい"

と論理的には同じものと考えられます. "かつ" は, 通常, 論理記号 $\wedge$ で示されます. 従って, (1), (2) の命題をそれぞれ A, B で示すと, 上の命題は $A \wedge B$ と表されることになります. この例のように, 命題を連結させて, 新しい命題を生成するものを列挙すると表 1 のようになります.

A を一つの命題とするとき $\neg A$ は命題 A が偽となるときそのときに限り真となる命題を示します. 例えば, (1) の命題を A とするとき, $\neg A$ は

"太郎は貧しくない"

連結詞	論理記号	読み
... でない	$\neg$	not
... かつ ...	$\wedge$	and
... または ...	$\vee$	or
... ならば ...	$\rightarrow$	implies

表 1: 命題論理記号

を表すことになります．$A \wedge B$ は，命題 A 及び B がともに真であるとき，そのときに限り，真となる命題を表します．$A \vee B$ は，命題 A または B の一方または両方が真であるとき，そのときに限り，真となる命題を表します．例えば，A 及び B をそれぞれ (1), (2) を表す命題とするとき，$A \vee B$ は

“太郎は貧しいかまたは太郎の心は美しい”

となります．“ならば” については注意が必要です．命題 $A \rightarrow B$ において，A が偽であるときには，日常の会話では意味のない主張と受け取られます．実際，

“太郎は貧しいならば太郎の心は美しい”

なる命題は，太郎が裕福であるときには，何も主張していないと考えるのが普通です．この命題が明らかに偽であると思われる状況を考えると，それは，太郎が貧しいにも関わらず心が美しくないときです．即ち，(1) の命題が真で (2) の命題が偽となるときです．そこで，私たちは，命題 $A \rightarrow B$ を A が真で，B が偽となるとき，そのときに限り，偽となる命題を表すものとします．以上を表にして示すと表 2 の様になります．但し，ここで，T は真 (true) を示し，F は偽 (false) を示しています．

これまでは $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ 等に連結されている命題がどのようにより単純な命題に分解されていくかを考察してきましたが，それ以上に命題を分解して考察しませんでした．次のような命題を考えてみましょう．

“5 は素数である”

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T

表 2: 真理値

この命題は主語である “5” と述語である “... は素数である” の二つの部分からなっています．述語 “... は素数である” の働きは主語である対象の性質を叙述するものです．“...” の部分を変数を使用して

“x は素数である”

とするとより述語の働きが明確になるでしょう．一般に対象の性質や関係を叙述するものを，通常の文法の用語とは異なりますが，**述語**とここでは云う事にします．例えば，

x は y の約数である”

も述語と云う事にします．要するに，述語とは不定な対象を含んでいる様な文章で，その不定な対象を特定の定まった対象に置き換えると真偽が明確となる文章，即ち，命題となるものとするのです．不定な対象は変数を用いて表すと，それらの不定な対象の関係が明確になります．不定な対象と云っても，我々は考える対象を前もって制限するのが普通です．前述の二例の述語を考えますと，考える対象は整数に限定しています．即ち，変数 x, y の領域は整数の全体の集合としているのです．このように，変数を導入するときは常にその変数の動く範囲—変数の領域—を固定して考えます

述語に，$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ を施すと再び述語が得られますが，述語に関しては他に重要な働きをするものがあります．次の命題を考えてみましょう．

“すべての実数に対してその二乗は 1 よりも小である”

実数を走る変数 x を使用して

“全ての x に対して x の二乗は 1 よりも小である”

と明確に書き直す事ができます．この命題は，述語

“x の二乗は 1 よりも小である”

に “全ての x に対して” が x を限定作用さして得られるものと考えられます．
　他の例として，変数 x, y の領域を整数全体の集合とするとき，

“x は平方数である”

という述語は

“ある y が存在して $x = y^2$ である”

と同じですが，この述語は，述語

“$x = y^2$ である”

に “ある y が存在して” が y を限定作用して得られるものと考えられます．この様な “全ての x に対して” や “ある y が存在して” の様にある変数を限定して述語に作用するものを**量化子**と呼びます．“全ての ... に対して” を**普遍量化子**あるいは**全称量化子**，“ある ... が存在して” を**存在量化子**あるいは**特称量化子**と呼びます．普遍量化子及び存在量化子は記号で $\forall$ 及び $\exists$ で表し，それぞれ，普遍記号及び存在記号といいます．上の二つの例は，普遍記号及び存在記号を使用すれば，それぞれ

$$\forall x(x^2 \text{ は 1 よりも小である})$$

及び

$$\exists y(x = y^2)$$

と表す事ができます．述語にある変数を量記号で作用さしたとき，その変数はその量記号で**束縛**されるといいます．例えば，上の 2 例で，最初の例では “x^2 は 1 よりも小である” における変数 x は $\forall x$ で束縛されています．第 2 の例では，$x = y^2$ における y が $\exists y$ で束縛されています．束縛された変数には，もはや特定の対象を代入する事はできません．最初の例は命題となり，

第2の例は x に関する性質を表す述語となります．述語に現れる変数で束縛されていないものをその述語に於いて**自由**であるといいます[1]．例えば，第2の例に於ける x は自由です．

以後, 変数の領域は実数全体と簡単のためにしますが, どの様な領域を持つ変数であっても以後の話は有効です.

述語 P に現れる自由変数が高々 $x_1, \ldots, x_n$ であるとき, P を $x_1, \ldots, x_n$ に関する述語であるといい, $P(x_1, \ldots, x_n)$ で示すことにします．従って, P に現れる自由変数 $x_1, \ldots, x_n$ にそれぞれ定数 $a_1, \ldots, a_n$ を代入して得られる命題は $P(a_1, \ldots, a_n)$ で示されます.

$\forall$, $\exists$ の役割をもう一度述べておきましょう.

$P(x)$ を x に関する述語とする.

(i) 命題 $\forall x P(x)$ が真であるとは, すべての定数 a に対して $P(a)$ が真となることである.

(ii) 命題 $\exists x P(x)$ が真であるとは, ある定数 a が存在して $P(a)$ が真となることである.

無限小と超述語　述語というものは現に存在するものについての性質や関係を叙述するものでした．無限小というものをライプニッツがいうように *fiction* であれば, それら *fictions* についての性質や関係を叙述するものは述語としては表現ができないでしょう．実際, “x は無限小である” を述語と考えると, この述語を満足する実数は 0 のみとなります．“x は無限大である” を述語と考えると, この述語を満足する実数は存在しなくなります．従って, 述語と考えると両者とも無意味な述語となるのです．仮想的なものについての性質や関係を叙述する表現を超述語と呼ぶことにしましょう．それでは超述語とはどの様なものでしょうか? 実は超述語はそれほど難解なものではないのです．例として, “x は無限小である” なる超述語を考えてみましょう．無限小というものは $|x| < r$ ($r > 0$ は定数) なる形の x に関する述語をすべて満足する仮想的な実数を意味します．従って, $|x| < r$ ($r > 0$) なる形の述

[1] 述語に現れる変数が必ずしも量化記号によってのみ束縛されているというわけではない．例えば, $\int_a^x f(x)dx$ 等の表現ように積分記号の上限である x は自由であるが, 他の x は dx によって束縛されている．述語の中に現れる変数が束縛されているか自由であるかを判定する方法としては, 自由なものには定数を代入できると云うことと概ね考えておけばよい.

語をすべて“かつ”で結んでできる表現—これを $\bigwedge_{r>0}(|x|<r)$ で示そう—が“x は無限小である”と言う超述語と見なせる. 同様に, “x は無限大である”と言う超述語は $\bigwedge_{r>0}(r<|x|)$ なる表現と見ることができます. 一般に, 変数 $x_1,\ldots,x_n$ に関する述語からばかりなる集まりを $x_1,\ldots,x_n$ に関する述語系と云い, $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ の様にギリシャ大文字で示すと, $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ に属する述語すべてをを“かつ”で結んだ表現 $\bigwedge\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ は超述語となります. それではどの様な述語系 $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ を考えても $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ に属する述語すべてを満足する $x_1,\ldots,x_n$ を想定することができるのでしょうか? 言い換えると, 超述語 $\bigwedge\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ を満足する $x_1,\ldots,x_n$ を想定することができるのはいかなるときでしょうか? $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ の述語すべてを仮定して矛盾を生じさせないのであれば, $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ に属する述語すべてを満足する $x_1,\ldots,x_n$ が存在しなくとも, 想定はできるでしょう. それでは, 述語系 $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ に属する述語すべてを仮定して, ある述語 $P(x_1,\ldots,x_n)$ が導かれるということはいかなることでしょうか? 手始めに, あるいくつかの不等式を仮定してある一つの不等式が導き出されるということを考えてみましょう. $x<1$ と $-1<x$ を仮定して $x^2<1$ が導かれることは次のように示されます.

$x<1$ および $-1<x$ を仮定する. $x<1$ を使用して, $x-1<0$ となる. $-1<x$ を使用して, $0<x+1$ となる. 従って, $x^2-1=(x-1)(x+1)<0$ となる. このことより, $x^2<1$ となる.

この推論を考察すると, $x^2<1$ を導く過程において, 必要なときに x に関する仮定 $x<1$, $-1<x$ を使用して $x^2<1$ を導いてます. その考えを拡張して, 仮定が必ずしも有限個でないときを考えてみましょう. 例えば, $|x|<r$ ($r>0$ は定数) なる形の述語すべてを仮定して, $x^2+x^3+x^4<1$ が導かれること, 即ち, x が無限小のとき, $x^2+x^3+x^4<1$ が導かれることは次のようになるでしょう.

x を無限小と仮定する. 仮定 $|x|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を使用して $x^2<\dfrac{1}{3}$ となる. 仮定 $|x|<\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ を使用して $x^3<\dfrac{1}{3}$ となる. 最後に, 仮定 $|x|<\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ を使用して $x^4<\dfrac{1}{3}$ となる. 従って, $x^2+x^3+x^4<\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=1$ を得る.

一般に, 述語系 $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ を仮定して, 述語 $P(x_1,\ldots,x_n)$ が導かれる

ということは, 述語系 $\Gamma(x_1,\dots,x_n)$ に属する有限個の述語

$$Q_1(x_1,\dots,x_n),\dots,Q_m(x_1,\dots,x_n)$$

を選ぶことができて[2]

$$Q_1(x_1,\dots,x_n)\wedge\cdots\wedge Q_m(x_1,\dots,x_n)\to P(x_1,\dots,x_n)$$

がすべての $x_1,\dots,x_n$ に対して成立することということになります. このとき,

$$\Gamma(x_1,\dots,x_n)\vDash P(x_1,\dots,x_n)$$

で示しましょう.

$\Gamma(x_1,\dots,x_n)$ が矛盾を導かない, 即ち, いかなる命題 A についても

$$\Gamma(x_1,\dots,x_n)\vDash A$$

であるならば A が真であるとき, $\Gamma(x_1,\dots,x_n)$ を整合的な述語系ということにしましょう.

$\Gamma(x_1,\dots,x_n)$ を整合的な述語系としましょう.

$$Q_1(x_1,\dots,x_n),\dots,Q_m(x_1,\dots,x_n)$$

を $\Gamma(x_1,\dots,x_n)$ に属する任意の有限個の述語とします.

$$Q_1(x_1,\dots,x_n)\wedge\cdots\wedge Q_m(x_1,\dots,x_n)$$

を仮定すると, 明らかに,

$$\exists x_1\cdots\exists x_n(Q_1(x_1,\dots,x_n)\wedge\cdots\wedge Q_m(x_1,\dots,x_n))$$

が言えるので,

$$Q_1(x_1,\dots,x_n)\wedge\cdots\wedge Q_m(x_1,\dots,x_n)\to \\ \exists x_1\cdots\exists x_n(Q_1(x_1,\dots,x_n)\wedge\cdots\wedge Q_m(x_1,\dots,x_n))$$

[2] $Q_1(x_1,\dots,x_n),\dots,Q_m(x_1,\dots,x_n)$ の選び方は $P(x_1,\dots,x_n)$ が変われば変わりうる.

が成立します. 従って, 定義より,

$$\Gamma(x_1,\ldots,x_n) \vDash \exists x_1 \cdots \exists x_n (Q_1(x_1,\ldots,x_n) \wedge \cdots \wedge Q_m(x_1,\ldots,x_n))$$

となります. $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ は整合的であるので, 命題

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n (Q_1(x_1,\ldots,x_n) \wedge \cdots \wedge Q_m(x_1,\ldots,x_n))$$

は真となります.

以上で, $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ が整合的であれば, 次の性質を持つことが判ります.

$\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ に属する任意の有限個の述語

$$Q_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,Q_m(x_1,\ldots,x_n)$$

に対して, それらの述語を同時に満たす $a_1,\ldots,a_n$ が存在する.

この性質を述語系が持つとき, その述語系は有限充足的であるということにしましょう. 従って, 整合的な述語系は有限充足的であることが示されました. 実は, この逆も成立します. そのことを示すために, $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ を有限充足的とします. A を

$$\Gamma(x_1,\ldots,x_n) \vDash A$$

となる任意の命題とします. $\vDash$ の定義により, $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ から有限個の述語 $Q_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,Q_m(x_1,\ldots,x_n)$ がとれて

$$Q_1(x_1,\ldots,x_n) \wedge \cdots \wedge Q_m(x_1,\ldots,x_n) \to A \tag{1}$$

すべての $x_1,\ldots,x_n$ に対して成立します. 一方, $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ が有限充足的であるので

$$Q_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,Q_m(x_1,\ldots,x_n)$$

を同時に満足する $a_1,\ldots,a_n$ が存在します. 即ち,

$$Q_1(a_1,\ldots,a_n) \wedge \cdots \wedge Q_m(a_1,\ldots,a_n)$$

が真となる $a_1,\ldots,a_n$ が存在します. (1) より,

$$Q_1(a_1,\ldots,a_n) \wedge \cdots \wedge Q_m(a_1,\ldots,a_n) \to A$$

が真となります. 従って, A は必然的に真となります[3]. 以上, $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ は整合的であることが示されました.

述語系 $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ が整合的であるとき, 同じことですが, 有限充足的であるとき, $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ に属する述語すべてを満足する $x_1,\ldots,x_n$ を想定することができる—同じことですが, 超述語 $\bigwedge\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ を満足する $x_1,\ldots,x_n$ を想定することができるのです. このことは, ライプニッツの無限小に対する見解 (a) に関連しています.

$\Gamma(x)$ を整合的とするとき, ある命題が真であることを次のように主張できます.

$$\left.\begin{array}{c} \text{$\bigwedge\Gamma(x)$ なる x の想定しても,} \\ \text{矛盾が生じないのであるから} \\ \text{その任意の一つを x とする.} \\ \vdots \\ A \end{array}\right\} \quad \text{$\Gamma(x)$ から命題 A を導く推論}$$

従って、命題 A が成立する.

このことは, ライプニッツが微積分の展開のために無限小という仮想的なものは便宜的に導入するのであり, その存在性は方法論自身には関係ないのであると言う見解を現代的に解釈したものと取れないでしょうか? ライプニッツの無限小に対する (b) の見解についても, 次のように解釈できます.

x が無限小であるとき, $P(x)$ であることを云いたいとする. それは, x が無限小を仮定して 述語 $P(x)$ を導くと云うことであるから, $|x|<r$ $(r>0)$ なる形の有限個の述語 $|x|<r_1,\ldots,|x|<r_m$ を選んで

$$|x|<r_1\wedge\cdots\wedge|x|<r_m\to P(x)$$

がすべての x について成立すると云うことである. r を $r_1,\ldots,r_m$ の内で最小のものとすれば, 上のことは

$$|x|<r\to P(x)$$

[3]命題 $A\to B$ が偽となるのは, A が真で, B が偽となるときに限ると云うことに注意.

がすべての x について成立することである．即ち，十分に (絶対値が) 小さい x に対して $P(x)$ が成立すればいいのである．言い換えると，無限小とは欲すれば欲するだけ (絶対値が) 小さくとれる実数である．

この様に，ライプニッツの二つの見解とは同じことの二つの側面であることがわかります．

さて，述語系 $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ に対して，それに属するすべての述語を “かつ” で結んだ $\bigwedge \Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ のみが超述語ではありません．例えば，ある定数 $r > 0$ に対して $|x| \leq r$ となる実数 x を有界な実数といいます．それでは，“x は有界である” は述語とみるべきでしょうか? a を実数とするとき，$|a| \leq |a|$ であるので $|x| \leq |a|$ を満たします．従って，a は有界となります．もし，“x は有界である” を述語と見なせば，それはどんな実数 a に対しても成立してしまう意味のない述語となってしまいます．“x は有界である ” は仮想的な実数をも含んだ想定でき得る実数に関する性質を示す超述語と捉えるべきです．実際，“x は有界である ” は $|x| \leq r$ $(r > 0)$ なる形の x に関する述語すべてを “または” で結んだ $\bigvee_{r>0} (|x| \leq r)$ なる形の超述語となります．例えば，無限大は有界でないことは明らかです．

実は，超述語というものはすべて述語から出発して，有限個無限個のものに関わらず “かつ” や “または” で結んで得られる操作を有限回施して得られるのです．この様にして得られた超述語に対して $\neg \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}$ が定義することができます．ここで，$\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ は超述語を示しています

例 1　(i) a を定数とする．$|x - a| < r$ $(r > 0)$ なる形の x に関する述語を全て “かつ” で結んでできる超述語 $\bigwedge_{r>0} (|x - a| < r)$ を “x は a に無限に近いと云い，$x \to a$ で示す．$x \to 0$ は x が無限小であることにすぎない．

(ii) $|x - y| < r$ $(r > 0)$ なる形の x, y に関する述語を全て “かつ” で結んでできる超述語 $\bigwedge_{r>0} (|x - y| < r)$ を $x \approx y$ で示し，x は y に無限に近いと云う．$x \to a$ は $x \approx a$ であることにすぎない．

(iii) $x - y < r$ $(r > 0)$ なる形の x, y に関する述語を全て “かつ” で結んでできる超述語 $\bigwedge_{r>0} (x - y < r)$ を $x \lesssim y$ で示す．$x \approx y$ は $x \lesssim y$ かつ $y \lesssim x$ と同値である．

(iv) $x \neq a$ (a は定数) なる形の x に関する述語を全て “かつ” で結んででき

る超述語 $\bigwedge_{a\in\mathbf{R}}(x \neq a)$ を “x は非定数である” あるという.

(v) ある定数に無限に近い実数を**近定数**と言う. “x は近定数である” は $x \approx a$ (a は定数) なる超述語すべてをを “または” で結んで得られる超述語 $\bigvee_{a\in\mathbf{R}}(x \approx a)$ である.

上の例で, (i)–(iv) において, それぞれの超述語をつくる述語系は全て有限充足的, 従って, 整合的です. 従って, それらを満足する実数を想定することができます. 例えば, (iv) の例を考えてみよう. $x \neq a$ なる形の述語を任意に有限個 $x \neq a_1, \ldots, x \neq a_n$ 取ってくる. 実数は無限にあるので $a \neq a_1, \ldots, a \neq a_n$ なる実数 a が存在する. この a が

$$x \neq a_1 \wedge \cdots \wedge x \neq a_n$$

なる述語を満たす. 従って, $x \neq a$ (a は定数) なる形の述語からなる述語系は有限充足的である.

超述語に対しても $\exists x \boldsymbol{P}$, $\forall x \boldsymbol{P}$ なども定義できます. ただし, 意味合いが述語の場合と違ってきます. $\exists x \boldsymbol{P}(x, x_1, \ldots, x_n)$ は $\boldsymbol{P}(x, x_1, \ldots, x_n)$ なる x が想定できると解釈されます. そして, $\forall x \boldsymbol{P}(x, x_1, \ldots, x_n)$ は想定できるすべての x に対して $\boldsymbol{P}(x, x_1, \ldots, x_n)$ であると解釈されます. 例えば, $\Gamma(x, y)$ が述語系のとき $\bigwedge \Gamma(x, y)$ なる超述語に対して $\exists x \bigwedge \Gamma(x, y)$ は $\exists x(Q_1(x, y) \wedge \cdots \wedge Q_n(x, y))$ ($Q_i(x, y)$ は $\Gamma(x, y)$ に属する述語) なる形の述語すべてを “かつ” で結んだ超述語で定義します.. 有限充足的であればそれらを満たすものが想定できるということから, この様に定義することが判るでしょう.

例 2 無限小にも互いに比較すると, 一方より無限に大きいと考えられるものもある. 無限大についても同じである. “y は x に比べて無視できるという超述語を

$$y = \epsilon x \text{ なる無限小 } \epsilon \text{ が存在する}$$

と定義する. 例えば, x が無限小である場合, x^2 は x と比較して無視できる.

§3. 構文的解析学

実数の連続性　仮想的なものも対象にすると, 微積分は直感的に展開できる. 先ず, 実数の基本的な性質を超述語を使用して表現してみよう.

[**実数の連続性**] 有界な実数は近定数である. 即ち,

$$\forall x(\bigvee_{r>0}(|x| \leq r) \to \bigvee_{a \in \mathbf{R}}(x \approx a))$$

が成立する.

実数の連続性は何も超述語を使用しなくとも, 勿論, 表現できます. ここでは述べませんが, これらと上のことは実際同値であることが証明されます. この実数の連続性から連続関数に関する基本的な性質を証明してみましょう. 連続関数の定義から始めよう.

関数 $f(x)$ が集合 A の各点で定義されているとする. 関数 $f(x)$ が A で連続であるとは, すべての A の点 a に対して

$$x \in A, x \approx a \to f(x) \approx f(a)$$

が成立することである.

[**最大値最小値の原理**] 関数 $f(x)$ が閉区間 $a \leq x \leq b$ で連続であれば, $f(x)$ はその区間で最大値及び最小値を取る.

(証明) $a \leq x \leq b$ と $f(t) \leq f(x)$ ($a \leq t \leq b$ は定数) なる形の述語すべてからなる述語系を $\Gamma(x)$ とする. $\Gamma(x)$ は明らかに有限充足的である. (確かめよ!) 従って, $\Gamma(x)$ に属する全ての述語を満足する x を想定することができる. いまそれを x とせよ. $a \leq x \leq b$ であるので, x は有界である. 従って, 実数の連続性より, x は近定数となる. 今, $x \approx c$ とする. $a \leq c \leq b$ は簡単に言える. 関数の連続性より, $f(x) \approx f(c)$ となる. t を $a \leq t \leq b$ なる任意の定数とする. $f(t) \leq f(x)$ であるので, $f(x) \approx f(c)$ から $f(t) \lesssim f(c)$ となる. t, c は定数であるので $f(t) \leq f(c)$ となる. 故に, 関数 $f(x)$ は c で最大値を取る.

この証明は典型的なライプニッツの (a) の見解に見られる思想の延長上にあります. $\Gamma(x)$ に属する述語全てを満足する x の存在性についてはとやかく言わなく (実際には, その存在性は最後にいえるのですが), *fiction* として

導入して, 最終的に関数 $f(x)$ が最大値を取ることを導き出すのです. 実際に, このような仮想物を便宜上考えることによって, 微積分は展開できます. 微積分だけでなくおおかたの数学も展開できます. これはロビンソンの超準解析で開発されたテクニックをほとんどそのまま使えます. ロビンソンは仮想物を実際に超準モデルで具現化することにより, 展開したのです. しかし, 私は無限小という概念は, それぞれの超準モデルに依存するものでなくライプニッツの云うように便宜的に導入された *fiction* であると思っています. 多分, 論理学者でない普通の数学者はそのように思っているのではないでしょうか? 結局, 無限小や無限大という仮想的な実数は (それだけでなく仮想的なものは) 私たちの文章の中での述べ方として存在するのであって, 数学的に存在を言えるものではないでしょう. (もっとも, 数学的存在と言っても, 現実の世界に実在するものでなく, 結局は形式的に存在証明がある公理体系のもとで (現今では, 数学の根本をなしている集合論の体系) 言えるに過ぎないものでしょうけれども.) 少し難しい言葉を借りれば, ライプニッツの無限小や無限大の概念というものは構文的 (シンタクティカル) な形式的な概念と言えるでしょう. それにひきかえて, ロビンソンのそれらの概念は意味論的 (セマンティカル) な概念と言えるでしょう. この様に, 仮想物を導入して展開する方法を "構文的解析学" と呼んでもいいでしょう. [4]

(かくだ ゆずる, 神戸大学工学部)

[4] この拙文は, 1998 年 3 月に名城大学で開催された日本数学会年会における市民講座でお話ししたことに, 加筆したものです.