群ラベル付きグラフにおける組合せ最適化

山口　勇太郎

グラフにおける組合せ最適化は，アルゴリズムの理論に関する中心的な話題として，20 世紀半ばから盛んに研究されてきた．群ラベル付きグラフは，ネットワーク構造における偶奇性や周期性，対称性，位相幾何学的な性質などを，ラベル付けに用いる群を替えることで統一的に表現できる概念である．そのような群ラベル付きグラフにおける組合せ最適化を考え，効率的に解ける限界を追究したり，一見無関係であるような問題の背後に潜む扱いやすさを共通の枠組みで捉えて整理したりすることで，組合せ最適化の理論の発展に貢献したい．本稿では，その一端を紹介する．

キーワード：組合せ最適化，アルゴリズム，グラフ，マッチング，パス，マトロイド

1. はじめに

マッチングや**パス**は，グラフにおける基本的な構造であり，組合せ最適化の中心的な対象として盛んに研究されてきた．たとえば，2 頂点間の最短パスを求める**最短路問題**は，典型的な**扱いやすい**（効率的に解ける）組合せ最適化問題であり，全頂点をちょうど一度ずつ訪れる最短パス（閉路）を求める**巡回セールスマン問題**は，代表的な **NP 困難問題**としてよく知られている．まずは古典的な話題から始め，群ラベル付きグラフにおける組合せ最適化へと繋げていこう．

2. マッチング，パス詰込み，マトロイド

マッチングに関する初期の研究は 20 世紀初旬にまで遡り，行列の組合せ的な性質の解析に端を発する．とりわけ重要な結果として，2 部グラフにおける完全マッチングの存在を特徴付ける Hall の定理 [1] と，最大マッチングの大きさを特徴付ける Kőnig の定理 [2] が挙げられる．当時はまだ**計算量**や**アルゴリズム**といった概念が確立されていなかったが，Kőnig の証明は**増加道**に基づく構成的なものとなっており，最大マッチングを求める多項式時間アルゴリズムを同時に与えているとも見なせる [3]．また，後にそれらの理論が発展するに従い，この定理は「2 部マッチング問題（判定版）が **NP ∩ coNP** に属する」ことを示す**良い特徴付け**であるという位置付けを得ることとなる．

2 部とは限らない一般のグラフにおけるマッチングに関する良い特徴付けとして，Tutte–Berge 公式 [4, 5] がある．こちらは構成的には証明されておらず，一般のグラフで最大マッチングを求める最初の多項式時間アルゴリズムは Edmonds [6] によって与えられた．

効率的に解ける組合せ最適化問題の代表格である**最大流問題**の整数版の変種として，2 頂点 s, t 間のパスを内点（端点以外の頂点）が共有されないように詰め込む**内点素 s–t パス詰込み問題**が考えられる．この問題も 2 部マッチングを一般化[1]しており，良い特徴付けとして Menger の定理 [8] が古くから知られている．これに対し，Gallai [9] が構成的な証明を与えているほか，Ford and Fulkerson [10] の最大流アルゴリズムを適用することでも多項式時間アルゴリズムを得られる．

マッチングと内点素 s–t パス詰込みの共通の一般化として，Gallai [11] は**内点素 A パス詰込み問題**を導入し，Mader [12] はこの問題に対する良い特徴付けを与えた．ここで，A は端点候補として入力される頂点集合であり，A 内の異なる 2 頂点を結ぶパスを **A パス**と呼ぶ．この問題に対する最初の多項式時間アルゴリズムは，マッチングと**マトロイド交叉**を統合する枠組みである**マトロイド・マッチング**への帰着を通じて，Lovász [13, 14] により与えられることとなる．

2 部マッチングは，「2 つの分割マトロイドの共通独立集合」と言いかえることができ，マトロイド交叉の特殊ケースとも見なせる．さらに，マトロイド・マッチング問題自体は，一般には（オラクルモデルでは）効率的に解けないことが知られている [14, 15]．

以上をまとめると図 1 のようになり，2 部マッチングから別々に発展した問題同士の関係を明らかにしつつ，一方の問題の多項式時間可解性を肯定的に解決する形になっており，非常に興味深い．

[1] 実は本質的に等価であり，相互に線形時間帰着可能であることも知られている [7].

やまぐち　ゆうたろう
九州大学大学院システム情報科学研究院
〒 819–0395 福岡県福岡市西区元岡 744
yutaro_yamaguchi@inf.kyushu-u.ac.jp

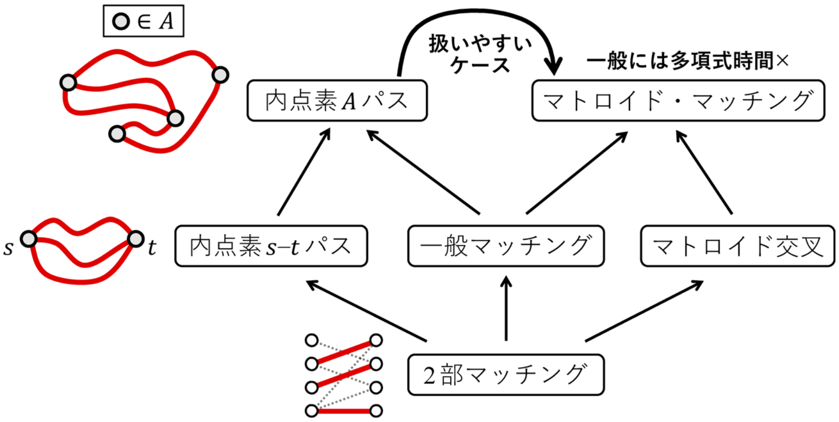

図 1　2 部マッチングからパス詰込みへの発展

3. 群ラベル付きグラフにおける組合せ最適化

3.1 非零制約下でのパス詰込み

Chudnovsky et al. [16] は，内点素 A パス詰込み問題の一般化として，群ラベル付きグラフにおける**点素非零 A パス詰込み問題**を導入し，Mader の定理の拡張となる最大最小定理を与えた．**群ラベル付きグラフ**とは，固定された群の要素を用いてグラフの各枝にラベルを付けたものである（詳細は 4 節を参照）．ラベル付けに用いる群に応じて，経路長の偶奇性や，ネットワーク構造の周期性・対称性，曲面に埋め込まれたグラフの位相幾何学的な性質などを共通の枠組みで表現でき，組合せ最適化問題としての幅が広がっている．また，Chudnovsky et al. [17] は，この問題に対する（群に依らない）多項式時間アルゴリズムを提案しており，この結果から内点素 A パス詰込み問題を特殊ケースとして直接解くアルゴリズムを得ることもできる．

筆者は，文献 [18] で，Lovász [13] の結果を一般化する形で，点素非零 A パス詰込みがマトロイド・マッチングの枠組みに収まることを示し，最大最小定理 [16] の別証明を与えた．文献 [19] では，この問題が**線形マトロイド・パリティ問題**への帰着を通じて高速に解けるための必要十分条件を，群の表現可能性により特徴付け，群に依って問題の難しさが本質的に異なる可能性を示唆した．線形マトロイド・パリティ問題は，行列が入力されるようなマトロイド・マッチングの特殊ケースであり，この結果は，Schrijver [3] による Lovász [13] の帰着の行列表現を一般化し，同時にその限界を示している．さらに，文献 [20] では，この構図が重み付きの問題に対しても成り立つことを示し，Iwata and Kobayashi [21] による重み付き線形マトロイド・パリティ問題に対する多項式時間アルゴリズムの助力を得て，長年未解決であった重み付き内点素 A パス詰込み問題を含む，多項式時間で解けるケースを明らかにしている．

3.2 非零制約下での最短路

重み付き点素非零 A パス詰込み問題で，$A = \{s, t\}$ などと 2 頂点からなる集合を選ぶと，無向グラフにおける 2 頂点間の最短路問題に非零制約を追加した問題となる（詳細は 4 節を参照）．この問題は，通常の無制約最短路問題に加え，**偶奇制約付き最短路問題**や，曲面に埋め込まれたグラフにおける**最短非可縮閉路**を求める問題などを共通に一般化している．

ラベル付けに用いる群の位数が 2 のとき，この問題はまさに偶奇制約付き最短路問題と等価である．偶奇制約の場合は，重み付きマッチング問題に帰着して多項式時間で解けることが事実として知られており，前述の文献 [20] と文献 [21] による結果（の一部）は，この事実を「ラベル付けに用いる群の位数が素数であれば，重み付き線形マトロイド・パリティ問題に帰着して多項式時間で解ける」という形に一般化している．また，Kobayashi and Toyooka [22] は，ラベル付けに用いる群が有限かつ可換である場合に対し，多項式行列のパーマネントの計算に帰着して擬多項式時間で解く乱択アルゴリズムを提案している．

曲面上の最短非可縮閉路問題は，計算幾何などの分野で研究されており，やはり多項式時間アルゴリズムが知られている（文献 [23, 24] など）．可縮性を含む位相幾何学的な制約を群ラベル付きグラフで表現するためには，その曲面の基本群やホモロジー群をラベル付けに用いる．しかし，これらの群は，トーラスやクラインの壺などの簡単な場合ですら無限や非可換となり，

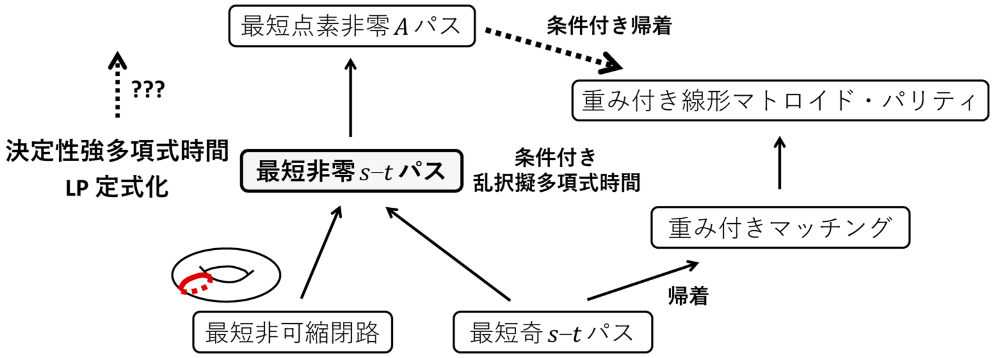

図 2　非零制約付き最短路問題周辺

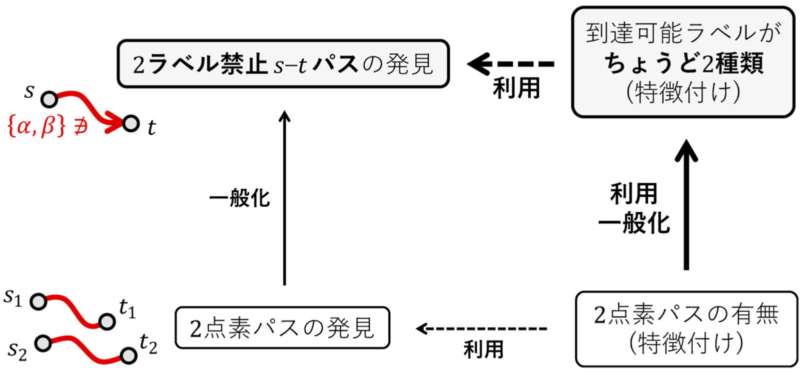

図 3　2 ラベル禁止制約下での到達可能性判定問題の解決

前述の結果では，一般化された枠組みの一部としての扱いやすさは説明できていない．

筆者は，文献 [25] で，ラベル付けに用いる群に依らない決定性強多項式時間アルゴリズムを提案した．この結果は，Derigs [26] による偶奇制約付き最短路問題に対する直接的なアルゴリズムを本質的に一般化しており，偶奇性や位相幾何学的条件に基づく制約の背後に共通に潜む組合せ的な扱いやすさを，群ラベル付きグラフを用いることで統一的に理解できることを示唆している．さらに，後続研究として，文献 [27] では，このアルゴリズムの高速化を，無制約最短路問題の双対問題のようなポテンシャル最大化型の線形計画問題 (LP) としての定式化を通じて達成しており，従来の組合せ最適化の理論における位置付けも明確にした．

以上をまとめると図 2 のようになり，目下のところ，一般の重み付き非零パス詰込み問題の解決に向けた進展が期待されている．

3.3　2 ラベル禁止制約下での到達可能性

これまでに述べた非零制約は，ラベル付けに用いる群の単位元を禁止ラベルとするものである．非零制約に関しては，制約下での最大パス詰込みや最短路が効率的に求まり，それらの従来の組合せ最適化の枠組みにおける位置付けも明らかになっており，比較的扱いやすい制約であると言える．しかし，制約の自由度を上げると，ハミルトン閉路問題や k 点素パス問題といった NP 困難問題を記述できるなど，その難しさが簡単に増大してしまうことが観察された．

筆者は，文献 [28] で，「任意に 2 つの要素を選んで禁止ラベルとできる」ように制約を拡張し，その制約下での**到達可能性判定問題**が多項式時間で解けることを示した．この問題は，無向グラフにおける **2 点素パス問題**を一般化しており，Seymour [29] による 2 点素パスが存在するための必要十分条件を利用し，それを一般化する形で到達可能性を特徴付けることで解決している（図 3）．

4.　非零制約付き最短路問題

本節では，3.2 節で紹介した**非零制約付き最短路問題**を題材に，群ラベル付きグラフにおける組合せ最適化の一端を紹介する．以下では，**パスはすべて単純経路を指す**とし，同じ頂点を複数回通ることは許さないものとする．また，入力グラフは連結であるとし，頂

点数と枝数をそれぞれ n, m で表す．

4.1　問題設定

まず，通常の最短路問題は以下のような問題である．

問題 4.1（無制約最短路問題）**.**

- 入力：　無向グラフ $G=(V,E)$，枝長 $\ell \in \mathbb{R}^E_{\geq 0}$，端点 $s,t \in V$．
- 目標：　ℓ に関して最短である G 中の s–t パス P を求める．

この問題は，Dijkstra 法 [30] を用いることで $\mathrm{O}(n^2)$ 時間[2]で解くことができる．また，Dijkstra 法は，始点 s から任意の頂点への最短路を含むような G の部分木を計算する．以下では，この木を **s を根とする** (G,ℓ) **の最短路木**と呼ぶ．

最短路問題に，経路長（枝数）に関する偶奇制約を導入した問題が次の問題である．

問題 4.2（偶奇制約付き最短路問題）**.**

- 入力：　無向グラフ $G=(V,E)$，枝長 $\ell \in \mathbb{R}^E_{\geq 0}$，端点 $s,t \in V$．
- 目標：　ℓ に関して最短である G 中の**奇数枝数** s–t パス P を求める．

先述のとおり，この問題は重み付きマッチング問題に帰着して多項式時間で解くことができる（文献 [3] など）．また，Derigs [26] は，この問題を直接解くような $\mathrm{O}(m \log n)$ 時間アルゴリズムを提案している．

偶奇制約を群ラベル付きグラフにおける非零制約に一般化したのが，本題となる問題である．Γ を群とし，各枝に向き付きで Γ の要素を**ラベル**として付与したグラフを **Γ ラベル付きグラフ**と呼ぶ．パスの**ラベル**を群演算により自然に定義し，ラベルが単位元でないことを**非零である**という．また，Γ ラベル付きグラフ G における枝やパスのラベルを $\psi_G(\cdot)$ で表す（図 4）．

問題 4.3（非零制約付き最短路問題）**.**

- 入力：　Γ ラベル付きグラフ $G=(V,E)$，枝長 $\ell \in \mathbb{R}^E_{\geq 0}$，端点 $s,t \in V$．
- 目標：　ℓ に関して最短である G 中の**非零** s–t パス P を求める．

図 4 の例では Γ を整数の加法群 $(\mathbb{Z},+)$ としている

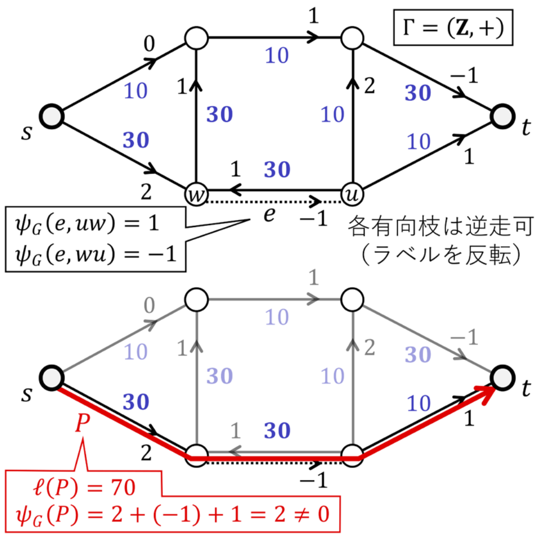

図 4　非零制約付き最短路問題の入力と最適解の例（各枝の中央付近の数値が枝長，矢印付近の数値がラベル）

が，これを $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = (\{0,1\}, + \pmod 2)$ として，各枝にラベル $1\ (=-1)$ を付与することで，前述の偶奇制約付き最短路問題を表現できる．その他，さまざまな例は文献 [16, 27] を参照されたい．

一般論として，制約を無視した無制約問題を解いて得られた最適解が幸運にも制約を満たしていれば，それは明らかに制約付き問題に対する最適解である．したがって，まず Dijkstra 法で最短路木を求めた後，必要に応じて以下の問題を解けば，非零制約付き最短路問題を解くことができる．ここで，s を根とする (G,ℓ) の最短路木 T に対し，G 中の u–w パス（または枝 $e=\{u,w\} \in E$）が**不整合である**とは，そのラベルが T 中の唯一の u–w パスのラベルと異なることをいう．

問題 4.4（不整合制約付き最短路問題）**.**

- 入力：　Γ ラベル付きグラフ $G=(V,E)$，枝長 $\ell \in \mathbb{R}^E_{\geq 0}$，端点 $s,t \in V$，s を根とする (G,ℓ) の最短路木 T．
- 目標：　ℓ に関して最短である G 中の**不整合** s–t パス Q を求める．

文献 [25] では，この問題に対する $\mathrm{O}(nm)$ 時間アルゴリズムを提案した．アルゴリズムは Edmonds [6] のマッチングアルゴリズムで用いられる花縮約技法を応用したものになっている．文献 [27] では，陽な縮約操作を避けてデータ構造を活用することで，$\mathrm{O}(m \log n)$ 時間に高速化することに成功した．また，無制約最短路問題の双対 LP のような，ポテンシャル最大化型の

[2] データ構造を活用すれば高速化可能（文献 [31] など）．

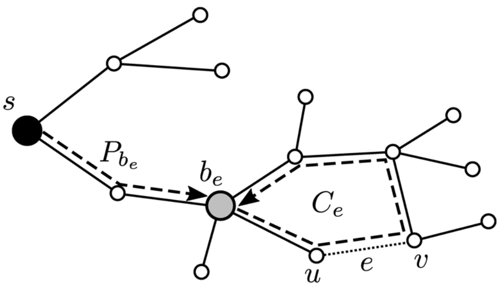

図 5　花 C_e の例（実線部分が最短路木 T）

LP 定式化を与えた．

4.2　花縮約アルゴリズム

本節では，$\mathrm{O}(nm)$ 時間アルゴリズムの概略を述べる．

不整合なパスを得るためには，不整合な枝を少なくとも 1 本以上使う必要がある．逆に，不整合な枝をちょうど 1 本使うようなパスは，必ず不整合となる．この観察から，不整合なパスを得るための鍵となる概念として，**花**を導入しよう．以下では，頂点 $v \in V$ に対し，T 中の唯一の s–v パスを P_v で表す．

定義 4.1　不整合な枝 $e = \{u, v\} \in E \setminus T$ に対し，$T \cup \{e\}$ 中の唯一の閉路 C_e を**花**と呼ぶ（図 5）．C_e 上で s に最も近い頂点 b_e を C_e の**基点**と呼び，P_{b_e} を**茎**と呼ぶ．C_e の高さを $\frac{1}{2}(\ell(P_u) + \ell(P_v) + \ell(e))$ で定義し，高さが最小の花を**最近花**と呼ぶ．

以下の補題は，最近花に関して T を迂回して得られる不整合パスが常に最短であることを主張している．

補題 4.2　C_e を最近花とし，e を対応する不整合な枝とする．このとき，基点 b_e を除く C_e 上の任意の頂点 w に対し，$e \in Q_w \subseteq T \cup \{e\}$ を満たす唯一の s–w パス Q_w は G 中の最短不整合 s–w パスである．

補題 4.2 より，終点 t がある最近花 C 上にあって，かつその基点 b でなければ，最短不整合 s–t パスが即座に求まる．以下では，そうでないとき，C を b に適切に縮約することで，問題を保ったままグラフを縮小できることを述べる．

定義 4.3　C を最近花とし，b をその基点とする．C を b に**縮約する**とは，以下の操作で新しい Γ ラベル付きグラフ $\tilde{G}$ と枝長 $\tilde{\ell}$ を得ることをいう（図 6）．まず，C 上の b 以外の頂点を，接続する枝とともにすべて除去する．次に，除去された枝 $f = \{w, x\} \in E$ であって，$w \in C$ かつ $x \notin C$ であるものに対し，平行枝 $\tilde{f}_i = \{b, x\}$ $(i = 1, 2)$ をそれぞれ追加する．追加された枝 $\tilde{f}_i$ の長さとラベルは，C 中の二つの b–w パス $R^i_{b,w}$ $(i = 1, 2)$ を用いて，$\tilde{\ell}(\tilde{f}_i) = \ell(R^i_{b,w}) + \ell(f)$ と $\psi_{\tilde{G}}(\tilde{f}_i, bx) = \psi_G(R^i_{b,w}) \cdot \psi_G(f, wx)$ により定義する．

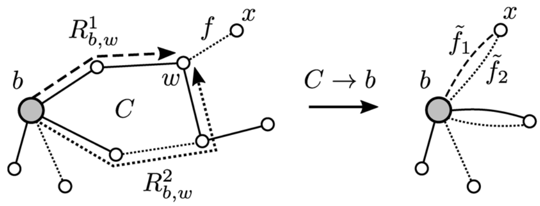

図 6　花 C の基点 b への縮約（実線部分が最短路木）

ここで $\cdot$ は群 Γ の演算を表す．

以下の補題は，終点 t が最近花 C 上にない（あるいはその基点 b である）場合には，C を b に縮約して，問題を再帰的に解けばよいことを主張している．

補題 4.4　最近花 C を基点 b に縮約して Γ ラベル付きグラフ $\tilde{G}$ と枝長 $\tilde{\ell}$ を得たとする．$t \notin C \setminus \{b\}$ のとき，$\tilde{G}$ 中の任意の最短不整合 s–t パスを展開[3]すると，G 中の最短不整合 s–t パスが得られる．

最後に計算量に関して言及しておこう．補題 4.4 により，不整合制約付き最短路問題を再帰的に解くことが正当化され，縮約が起こるごとに頂点数は必ず減少する．したがって，再帰の深さは $\mathrm{O}(n)$ である．また，各再帰では，最近花を一つ見つけるだけ[4]であり，これは枝数に関する線形時間で可能である．ここで，「ラベルが最短路木に沿ったものと同じであるかどうかのみが重要である」という問題の性質から，各頂点対間には高々 2 本の枝しかない状態を仮定してよく，縮約で生じる平行枝に関しても同じことが言える．したがって，3 本目以上が生じるたびに不要な枝を除去しておけば，入力グラフの枝数の 2 倍を超えないことが保証でき，最近花を一つ見つける計算量が $\mathrm{O}(m)$ であることが従う．以上をまとめると，全体の計算量を $\mathrm{O}(nm)$ とできる．

謝辞　RAMP シンポジウムでの講演の機会をくださった福永拓郎氏，本稿執筆のお誘いをくださった高野祐一氏に感謝いたします．また，本稿で紹介した研究成果の共著者である岩田陽一氏をはじめ，共同研究者の皆様に感謝申し上げます．本稿で紹介した研究成果の一部は，JSPS 科研費 No. 13J02522, 16H06931, および，JST ACT-I No. JPMJPR16UR の援助を受

[3] **展開**は縮約のほぼ逆操作であるが，同じ頂点を複数回通るウォークが得られる場合には，適切に簡約化する必要がある．本稿で厳密に述べるには不必要に煩雑であるので，詳細は文献 [27] を参照されたい．

[4] 定義 4.3 では簡単のため明示していないが，(G, ℓ) の最短路木 T から $(\tilde{G}, \tilde{\ell})$ の最短路木 $\tilde{T}$ も同時に（自然に）得られる．詳細は文献 [27] を参照されたい．

けたものです.

参考文献

[1] P. Hall, “On representatives of subsets,” *The Journal of the London Mathematical Society*, **10**, pp. 26–30, 1935.

[2] D. Kőnig, “Graphok és matrixok,” *Mathematikai és Fizikai Lapok*, **38**, pp. 116–119, 1931.

[3] A. Schrijver, *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*, Springer, 2003.

[4] C. Berge, “Sur le couplage maximum d’un graphe,” *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie de Sciences*, **247**, pp. 258–259, 1958.

[5] W. T. Tutte, “The factorization of linear graphs,” *The Journal of the London Mathematical Society*, **22**, pp. 107–111, 1947.

[6] J. Edmonds, “Paths, trees, and flowers,” *Canadian Journal of Mathematics*, **17**, pp. 449–467, 1965.

[7] A. Frank, *Connections in Combinatorial Optimization*, Oxford University Press, 2011.

[8] K. Menger, “Zur allgemeinen Kurventheorie,” *Fundamenta Mathematicae*, **10**, pp. 96–115, 1927.

[9] T. Gallai (T. Grünwald), “Ein neuer Beweis eines Mengerischen Satzes,” *Journal of the London Mathematical Society*, **13**, pp. 188–192, 1938.

[10] L. R. Ford, Jr. and D. R. Fulkerson, “Maximal flow through a network,” *Canadian Journal of Mathematics*, **8**, pp. 399–404, 1956.

[11] T. Gallai, “Maximum-minimum Sätze und verallgemeinerte Faktoren von Graphen,” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **12**, pp. 131–173, 1961.

[12] W. Mader, “Über die Maximalzahl krezungsfreier H-Wege,” *Archiv der Mathematik*, **31**, pp. 387–402, 1978.

[13] L. Lovász, “Matroid matching and some applications,” *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **28**, pp. 208–236, 1980.

[14] L. Lovász, “The matroid matching problem,” *Algebraic Methods in Graph Theory, Vol. II: Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, **25**, pp. 495–517, 1981.

[15] P. Jensen and B. Korte, “Complexity of matroid property algorithms,” *SIAM Journal on Computing*, **11**, pp. 184–190, 1982.

[16] M. Chudnovsky, J. Geelen, B. Gerards, L. Goddyn, M. Lohman and P. Seymour, “Packing non-zero A-paths in group-labelled graphs,” *Combinatorica*, **26**, pp. 521–532, 2006.

[17] M. Chudnovsky, W. H. Cunningham and J. Geelen, “An algorithm for packing non-zero A-paths in group-labelled graphs,” *Combinatorica*, **28**, pp. 145–161, 2008.

[18] S. Tanigawa and Y. Yamaguchi, “Packing non-zero A-paths via matroid matching,” *Discrete Applied Mathematics*, **214**, pp. 169–178, 2016.

[19] Y. Yamaguchi, “Packing A-paths in group-labelled graphs via linear matroid parity,” *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **30**, pp. 474–492, 2016.

[20] Y. Yamaguchi, “Shortest disjoint $\mathcal{S}$-paths via weighted linear matroid parity,” In *Proceedings of the 27th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2016)*, pp. 63:1–63:13, 2016.

[21] S. Iwata and Y. Kobayashi, “A weighted linear matroid parity algorithm,” *SIAM Journal on Computing*, to appear.

[22] Y. Kobayashi and S. Toyooka, “Finding a shortest non-zero path in group-labeled graphs via permanent computation,” *Algorithmica*, **77**, pp. 1128–1142, 2017.

[23] J. Erickson, “Combinatorial optimization of cycles and bases,” *Advances in Applied and Computational Topology*, **70**, pp. 195–228, 2012.

[24] É. Colin de Verdière, “Computational topology of graphs on surfaces,” *Handbook of Discrete and Computational Geometry, 3rd Ed.,* C. D. Toth, J. O’Rourke and J. E. Goodman (eds.), Chapman and Hall/CRC, pp. 605–636, 2017.

[25] Y. Yamaguchi, “A strongly polynomial algorithm for finding a shortest non-zero path in group-labeled graphs,” In *Proceedings of the 31st Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2020)*, pp. 1923–1932, 2020.

[26] U. Derigs, “An efficient Dijkstra-like labeling method for computing shortest odd/even paths,” *Information Processing Letters*, **21**, pp. 253–258, 1985.

[27] Y. Iwata and Y. Yamaguchi, “Finding a shortest non-zero path in group-labeled graphs,” arXiv:1906.04062v4, 2020.

[28] Y. Kawase, Y. Kobayashi and Y. Yamaguchi, “Finding a path with two labels forbidden in group-labeled graphs,” *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **143**, pp. 65–122, 2020.

[29] P. D. Seymour, “Disjoint paths in graphs,” *Discrete Mathematics*, **29**, pp. 293–309, 1980.

[30] E. W. Dijkstra, “A note on two problems in connexion with graphs,” *Numerische Mathematik*, **1**, pp. 269–271, 1959.

[31] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest and C. Stein, *Introduction to Algorithms, 3rd Ed.*, MIT Press, 2009.