特集　カルマン・フィルター

カルマン・フィルター理論
——その発展と展望——

近　藤　次　郎

1. 予測とフィルター——統計的予測法からウイナーの予測理論まで

システムの状態をあらわす量xが時間の関数として確定的に$x=x(t)$とあらわせる場合には，この関数形を定めることができれば，将来の任意の時点$t+\alpha$, ($\alpha>0$)におけるシステムの状態は単に$x(t+\alpha)$を計算すれば求めることができる[1]．このように状態が時間とともに変化するとき動的システムという．電気系や機械系のシステムでは$x(t)$が連続関数で，その瞬間的な変化率に注目すれば，システムの特性が微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=F(x,\ t) \tag{1}$$

であらわされることが多い．xをベクトルに拡張すれば，高階の常微分方程式の場合でも，一般には式(1)のようにあらわすことができる．この場合でも微分方程式(1)を解けばxはtの関数になる．とくに式(1)が線形化できて，

$$\dot{x}=f(t)x(t) \tag{2}$$

とかける場合には変数分離法で，解は容易に求められる．

さて，問題はこのような関数形を観測データをもとにして推定することである．いま推定式を$\hat{x}(t)$，観測値を$x(t)$とするとき，常に$\hat{x}(t)=x(t)$となっていれば問題はない．しかし現実には単純な場合にも観測誤差が入るから，それを，

$$e(t)=x(t)-\hat{x}(t) \tag{3}$$

とおくと，一般には$e(t)\neq0$となる．そこで推定式としては，最大の誤差があらわれてもそれが大きくならないようにするために条件式

$$\max|e(t)|:\mathrm{min}. \tag{4}$$

が成立するように推定式をきめるやり方や，平均的に誤差が最小になるようにするために，

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|e(t)|dt:\mathrm{min} \tag{5}$$

とする方法が考えられる．

観測が離散時点t_iで行なわれるときには最小二乗法で，

$$\sum e(t_i)^2:\mathrm{min}. \tag{6}$$

となるように，推定式$\hat{x}(t)$を決定する方法が考えられる．この場合には$\hat{x}(t)$に適当な数式モデルを想定して，式中のパラメータを条件式(6)できめるのである．統計学の古典的な予測理論では，このような方法で$\hat{x}(t)$をきめ，それを長期傾向，周期変動などとよんでいる．

観測が連続的に行なわれている場合には式(5)に対応して条件

$$\langle e^2\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}e(t)^2dt:\mathrm{min} \tag{7}$$

が最小二乗原理に対応する．

しかるに複雑な現象になると$\hat{x}(t)$の数式モデルをつくることが困難であるし，しかもそれはある種の先入観をもって現象を予測するので好ましくはない．そこで，原理的には$-\infty$から現時点tまでのデータの積み上げにより，重みづけ関数$k(t)$

を適当に選んで，予測値を，

$$\hat{x}(t+\alpha)=\int_{-\infty}^{t}k(t-\xi)x(\xi)d\xi \tag{8}$$

とすることが考えられる．この右辺で $t-\xi=\tau$ とおき積分変数を ξ から τ に変更すると式(8)は，

$$\hat{x}(t+\alpha)=\int_{0}^{\infty}x(t-\tau)k(\tau)d\tau \tag{9}$$

となる．ここで条件式(7)により $k(\tau)$ をきめることにすれば，これはデータのみによって予測値を求めるやり方であるから，客観性が保たれている．

これは戦時研究として N. Wiener (1894-1964) が高射砲の算定具(照準をきめる道具)の開発のために考えた方法で，同じ頃 A. N. Kolmogorov (1903-) も同様な研究を行なっていた．上の $k(\tau)$ は線形予測子とよばれるものである．フーリエ変換の理論によれば，$k(\tau)$ は積分方程式

$$R(t+\alpha)=\int_{0}^{\infty}R(t-\tau)k(\tau)d\tau \tag{10}$$

の解として求められる．ここで $R(t)$ は観測データのコレログラムで，

$$R(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t+\xi)x(\xi)d\xi \tag{11}$$

と定義される[2]．このようにウイナーの予測方法はなまのデータを用いないで，統計的に安定なコレログラムを利用するので，現象が定常でコレログラムが求まっていれば予測子が厳密に求められる．方程式(10)はウイナー・ホッフ型積分方程式で，これを解くにはフーリエ変換を利用した特殊な手法が必要である．ウイナーはフーリエ解析が得意である[3]から，$R(t)$ が特別な形をしている場合には厳密な解を求めているが，方程式(10)を解くのはそれほど容易ではない．

これまでは，$\alpha>0$ として式(8)を予測式としたが以下の式をみちびくのにはこの仮定は不必要である．そこで，式(8)で $\alpha<0$ とすると，これは過去 $(-\infty, t)$ のデータから過去の特定の時点 $t+\alpha$ の状態量を推定する場合で，内挿(interpolation)である．また $\alpha=0$ とすると，データの蓄積から現時点の観測値に含まれる異常をとり除くもので平滑(smoothing)という．$\alpha>0$ のときは予測(prediction)にあたるが，これは外挿(extrapolation)とよんでもよい．そこで1949年に刊行されたウイナーの有名な本の題名は「工学的な応用を含む定常時系列の外挿および平滑」[4]である．また現実のデータは信号 $\hat{x}(t)$ と雑音 $e(t)$ とからなると見ると，この方法による平滑化は雑音除去のためのフィルターと見ることができる．事実，ウイナーは式(10)を満足するような特性 $k(\tau)$ をもつフィルターを実際に製作し，そのハードウエアが前記の算定器として使用されたのである．

また，自動制御ではシステムの入力を $x(t)$，出力を $\int_{-\infty}^{t}k(t-\xi)x(\xi)d\xi$ として，条件式(7)が成立するように重み関数 $k(t)$ を決定するとすると，その条件はまったく式(10)と同様になる[5]．このように時系列の予測理論は自動制御理論やフィルター理論，情報理論などと相互に深い関連をもっている．

実際に，ウイナーの予測理論は統計学者や経済学者よりも自動制御や機械工学者によって研究されいろいろな展開[6]が行なわれて，離散確率過程の場合を含めて使いやすい形に改良された．その代表的な例はつぎのカルマンの理論である．

2. カルマン・フィルター

1960年，R. E. Kalman は動的システムの予測に関する新しい理論を発表した[7]．従来のウイナーの理論はシステムの状態を観測して得られる確率過程 $\{x(t)\}$ が定常で，その統計的特性関数 $R(t)$ が既知である場合にしか応用ができなかった．そしてこの $R(t)$ を得るためには式(11)に示すように相当長期にわたるデータの蓄積を必要とした．理論的にはこの期間は無限大である．

しかし，カルマンの方法によれば時々刻々の予想値と観測値を比較してフィルターを改良していくので，データの蓄積とともに予測法が改良され，誤差を次第に減らすことができる．このようなやり方であるからかならずしも定常確率過程で

なくても応用ができる．これは一種の適応性(adaptive)のある予測法である．

また，最適予測子を決定する条件式が式(10)のような積分方程式ではなくて，後出の式(19)のようなリッカチ型の微分方程式であって解法が比較的に容易であり，コンピュータによって実時間処理をするのに適しているなどの特色がある．

この場合に，ノイズをシステム内部に発生するものと観測によって生じ，データに含まれるものとに分離し，その場合に，システムに固有な動的特性を利用して予測の効率化をはかるような工夫が施されている．

図 1 はカルマン・フィルターの概念を示したものである．カルマンの理論では最初から多重過程について定式化されているのが特長のひとつであるが，ここでは単純な場合について説明する[8)]．

システムの状態が確率過程 $\{x(t)\}$ であらわされ，式(2)の代わりに，

$$\dot{x}=f(t)x(t)+g(t)u(t) \tag{12}$$

とあらわされるものと考える．ここで $u(t)$ は平均0，分散 U の正規分布 $\mathrm{N}(0,\ U)$ をもつと仮定する．U は時間とともに変化してもさしつかえない．そのときは $U(t)$ である．$g(t)$ はこのシステム内攪乱の拡大率で，それが状態の変化に式(12)のように印加されるのである．ここで $f(t)$，$g(t)$ は既知関数である．このとき状態の時間的な変化が時点 t の状態だけできまってしまうのであるから，この式は確率過程が1次マルコフ過程であることを示している．

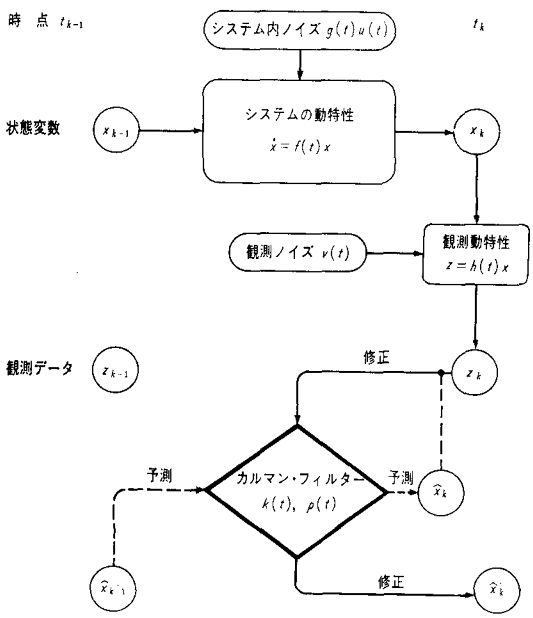

図 1　カルマン・フィルターの概念図

自記記録計などによらないかぎり，観測は等間隔の離散時点 t_i で行なわれるのが普通で，そのときのデータ $z(t_i)$ の構造モデルとしては，

$$z(t_i)=h(t_i)x(t_i)+v(t_i) \tag{13}$$

と仮定する．ここで $v(t)$ は観測誤差で，正規分布 $\mathrm{N}(0,\ V)$ にしたがうものとする．前のように分散 V は時間的に変化してもよく，そのときには $V(t_i)=V_i$ とすればよい．

このようにシステムと観測とを分離してあるので，それぞれのノイズ $u(t)$，$v(t)$ は互いに独立であるとしてもそれほど大きな制限にはならないであろう．しかし上に説明したように，これらを白色ガウス雑音過程(white Gaussian noise process)とするのはウイナー理論よりはきびしい仮定になっている．

ところで，確率過程を定常とし，$f(t)$，$g(t)$ をそれぞれ $f=1$，$g=-1$ とおくと，式(12)は $x(t)-u(t)=0$ となる．また状態量 $x(t)$ を直接に観測するとして，$h(t)=1$，$v(t)=0$ とおくと式(13)は $z(t_i)=x(t_i)$ となる．したがって問題は $u(t)$ を予測することになってガウス過程の仮定を除いておけば，データ $x(t_i)$ から $u(t)$ を求めることになり，ウイナーの場合に帰する．ここで，$u(t)$ が白色ガウス雑音過程とすると $\hat{x}(t)=0$ となり，意味のない解になってしまう．

さてカルマンによる平滑手順はつぎのとおりである．一連の時点 t_1，t_2，…，t_{k-1} で観測値を得たとすると，データの蓄積

$$\{z(t_1),\ z(t_2),\cdots,\ z(t_{k-1})\}=\mathbf{z}_{k-1} \tag{14}$$

がある．これは$(k-1)$次のベクトル量 $\mathbf{z}_{k-1}$ であらわされる．また $t_{k-1}\leqq t<t_k$ ではシステムの状態

の推定値 $\hat{x}(t)$ に関して，式(2) のように $\dot{\hat{x}}=f(t)\hat{x}(t)$ が成立するものとして $t=t_{k-1}$ の時点で予測した値 $\hat{x}(t_k)^-$ を求めておく．

t_k で観測値 $z(t_k)$ が得られたとすると，これによっていままで予測していた値 $\hat{x}(t_k)^-$ を次式によって修正する．それは，

$$\hat{x}(t_k)^+=\hat{x}(t_k)^-+K(t_k)[z(t_k)-h(t_k)\hat{x}(t_k)^-] \tag{15}$$

である．ここで $\hat{x}(t_k)^+$ は観測値を得た直後の平滑値である．この $K(t_k)$ はカルマン・フィルターのゲインとよばれるもので，式(13) から観測誤差 $v(t_k)$ に相当するものの修正であることが明らかである．

このゲイン $K(t_k)$ はやはり順次に修正されるものであるが，リッカチ型の微分方程式

$$\dot{P}=f(t)P(t)+P(t)f(t)$$
$$-P(t)h(t)U^{-1}(t)h(t)P(t)+g(t)U(t)g(t) \tag{16}$$

の解として時点 t_{k-1} に得られた事前の $P(t_k)^-$ を用いて，

$$K(t_k)=P(t_k)^-h(t_k)[h(t_k)P(t_k)^-h(t_k)+V_k]^{-1} \tag{17}$$

と計算される．またつぎの時点での推定のため，データ z_k を得た直後では $P(t_k)^-$ を次式

$$P(t_k)^+=P(t_k)^--K(t_k)h(t_k)P(t_k)^- \tag{18}$$

によって修正しておく．この値をもとに $t_k \leqq t < t_{k+1}$ で微分方程式(16)を解けば $P(t_{k+1})^-$ が求まる．

単純な確率過程では $f(t)$，$g(t)$，$h(t)$，$P(t)$ などが通常の関数となるため，式(16)の右辺をこのようにかいてもあまり意味がないが，多重確率過程$\{\boldsymbol{x}(t)\}$のときには $\boldsymbol{P}(t)$，$\boldsymbol{H}(t)$，$\boldsymbol{G}(t)$ などが行列になるから式(16)は，

$$\dot{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{FP}+\boldsymbol{PF}^t-\boldsymbol{PH}^t\Psi_v{}^{-1}\boldsymbol{HP}+\boldsymbol{G}\Psi_v\boldsymbol{G}^t \tag{19}$$

のようになる．ここで t は転置行列，Ψ_v は cov $\{v(t),\ v(\tau)\}=\Psi_v(t)\delta(t-\tau)$ としたときの分散に相当する関数である．δ はディラックのデルタ関数である．

ここでは $x(t)$，$z(t)$ が多次元の場合の理論を展開することが目的ではないので，単純な場合を取りあつかったが式(19)と式(16)とが一致することに注意しておこう．以上のようにゲイン $K(t_k)$ にはシステムの状態方程式(12)や観測方程式(13)の両方が考慮されている．

3. カルマン・フィルターの応用

カルマン・フィルターは適応性制御 (adaptive control) をもつ自動制御系の最適設計に応用されることはもちろんであるが，平滑や予測に関していろいろな場合に応用される．

医学では血圧や血沈その他が定期健診で測定されるがそれらの測定値には観測誤差が入る．またデータから推定される内臓諸機関の機能の動的変化の応答は式(12)のようにモデル化することができるであろう．たとえば糖分摂取後の血糖の変化などはその例である．

このとき体内にも，気分などによって変化する内部攪乱があらわれるであろう．このとき診断で必要なのはこれらのノイズの影響を除いた真の状態量 $x(t)$ である．これはカルマン・フィルターのモデルが適用できる．

アポロ・カプセルのような有人再突入物体についてその運動は大気攪乱などのノイズがあると式(12)のようになる．また地上レーダーでその位置を遠隔測定すると観測方程式は式(13)のようになる．**図2**は重力の方向に突入したときの高度および速度の時間的変化である．このとき運動特性をあらわすパラメータの推定誤差を 1 sec おきの観測によるカルマン・フィルターで修正すると**図3**に示すように誤差を生じても時間とともに減少することがわかる．

このほかにも波浪や洪水の予測，大気汚染の予測[9]などの応用例がたくさんあげられる．それらについては他の執筆者からくわしく述べられることになっているので重複を避けた．

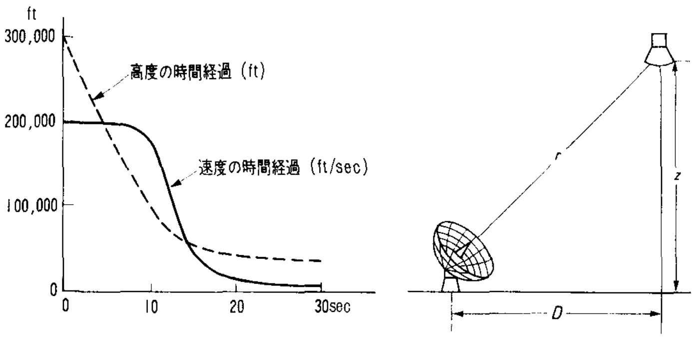

図 2　高度および速度の時間経過

4. 予測理論の発展

ORにおいて予測理論の重要性はしばしば指摘されているとおりである．不確定な需要が正確に予測できれば生産計画も在庫管理も問題ではなく，信頼性管理や予防保全なども少しもむずかしくはない．災害もそれを予知できれば被害を最小にくいとめることができるし，戦争さえもこれを回避することができよう．

したがって予測理論は今後も大勢の研究者の注目を集め，さらに発展することが期待される．ここではウイナーやカルマンの業績を中心にして述べたが，このほかにもE. D. Farmarなどによる全然別の原理を用いた理論がある．

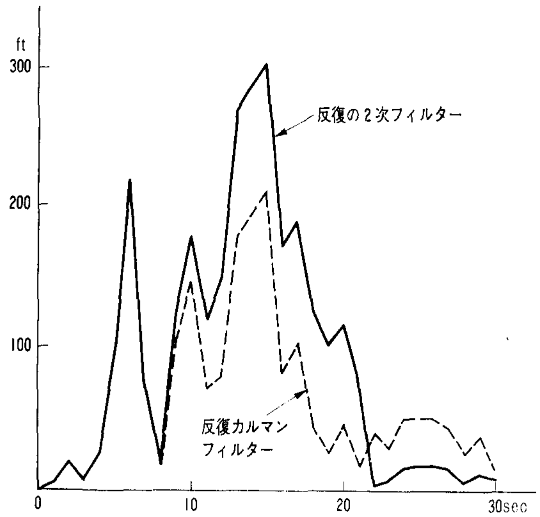

図 3　誤差の変動の時間経過

動的システムの時間変化はある法則にしたがうと考えられるから，ウイナーのように完全に統計量だけに頼って推定を行なうことは確かに効率が悪い．しかしながら，社会・経済現象のように法則性が明確でないものについて，客観的に正しい動的法則を見いだすことは容易でないことが多いから，このような現象にカルマン・フィルターを利用しても純粋に客観的な――したがって科学的な予測とはいい難いであろう．

また，ウイナーの場合にはコレログラム，カルマンの場合にはノイズの分散が事前に求められていることが必要であるが，実際問題としてこれは相当大きな制約になっている．しかし厳密な理論を展開するためにはある程度の仮定が必要であって，まったくなんらの予備知識もなくて現象の予測ができるとすれば，それはもはや科学というよりは霊感とよんだほうが適当であろう．しかしここで述べた条件を緩和する方向に理論的研究が進められている．その中にはシステムの動特性を式(2)のように線形と考えず，式(1)のような非線形の場合にも応用できるように研究したものなどがある[10]．

また，くり返して予測を行なう必要がないとき，条件式(5)ではなく，式(4)のようなマクシミン原理あるいはミニマックス原理による予測も今後は研究の対象となるべきであろう．予測理論の発展の方向を予測することはなかなかむずかしい．しかしながらこれはわれわれの研究心に対して大きな刺戟を与えるものである．

参考文献

1) 近藤次郎：数学モデル，丸善(1970)，9章にはいろいろな動的モデルの説明がある．

2) 近藤次郎：フーリエ変換とその応用，培風館(1970) pp. 128-133.

3) Wiener, N.: The Fourier Integral and Certain of its Applications, Cambridge (1933).

4) Wiener, N.: Extrapolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Application, John Wiley (1949).

5) 上記(2) pp. 174-185. および近藤次郎：システム工学，丸善(1970)，pp. 233-244.

6) 上記システム工学．pp. 85-88. 近藤次郎，松崎功保：予測理論の発展，経営科学, **8**(1964), pp. 27-71.

7) Kalman, R. E: A new approach to linear filtering and prediction problem. Trans. ASME D. Journ. of Basic Engineering, **82** (1960), pp. 35-45.

Kalman, R. E. and Bucy, R. S.: New results in linear filtering and prediction theory, loc. cit., **83** (1961), pp. 95-108.

8) 近藤次郎：社会科学のための数学入門，東洋経済新報社（1973），pp. 154-156.

9) 近藤次郎編：大気汚染，コロナ社（1975），6章.

Sawaragi, Y., Soeda, T., Yoshimura, T., Ohe, S., Chujo, Y. and Ishihara, H.: Statistical prediction of air pollution levels based on Kalman filtering method, pp. 197-204.

IFAC Environmental Systems Planning, Design and Control, 1977, ed. Akashi, H. Pergamon Press (in printing).

10) Sage, A. P. and Melsa, J. L.: System Identification, Academic Press (1971).

こんどう・じろう　1917年生
1940年　京大理学部数学科卒
1945年　東大工学部航空学科卒
　　　　東大工学部教授
1977年　千葉大学工学部教授

論文誌への投稿のおすすめ

昨年度から当学会論文誌は和名を「日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌」，英名を「Journal of the Operations Research Society of Japan」として新発足以来，論文収容能力を飛躍的に増加しましたため，近頃はあまり待たせずに掲載することができるようになりました．たとえば，最新号（vol. 20, No. 3）では受付以来4カ月弱で掲載された論文もあります．

ただ，和文論文は従来年1回しか掲載の機会がありませんでしたが，来年度（vol. 21）からは混載に踏みきることにいたしますので，和文論文の待ち時間も英文と同様になります．そして，これを機会に，英文論文にはいくぶん長目の和文要旨を，和文論文には英文要旨をつけることにいたします．これは，和文論文にも海外で注目してもらえる機会を増やし，英文論文には国内でのより多くの反響を期待したいためです．

編集委員会としては，この論文誌がわが国最高レベルのOR論文を網羅することを願い，つぎのような独創性の高い論文の投稿をお待ちしております．

(1) 問題の発掘，モデル化，解の計算・評価・実行など，一連の過程の全部または一部についてなされた，新しい手法，新しい考え方の提案
(2) 既存の手法，考え方の発展および評価
(3) とくに，いわゆる事例研究（成功例のみならず，失敗例についての考察もふくむ）

また，投稿規定その他の整備も検討中です．近いうちに，投稿規定，執筆要領，清打ち手引，論文原稿表紙等の諸規定を一冊にまとめた「投稿案内」を印刷いたしますので，論文投稿をお考えの方は，事務局にお問合わせください．

本誌に事例報告の原稿を

ORの特徴は実践にあるといわれています．実際的な応用をぬきにした理論ということはORでは考えられません．ところがわが国のOR界の現状では理論的な研究発表に比べて実践的な事例の報告がやや少ない感があります．

本誌でも以前から会員の皆さんからの事例報告をお願いしていましたが，まだ十分な成果をあげているとはいえません．その理由のひとつとしては企業の秘密ということもあると思いますが，ORの実践例というものが理論的な目新しさがなければ価値が少ないと誤解されていることも一因となっている気がします．

もっと気軽に，「こうやったらこれだけ利益があった」とか，「この問題はこう処理したが，もっとよい方法はないか」というような実例や問題提起をどしどししていただきたいと思います．会員同士の智恵の交換というつもりでこの欄の活用をお願いいたします．（編集委員会）