

合理力学の一例としての衝突理論 1720–1730年

有賀 暢迪*

Theory of collision as an example of Rational Mechanics,
from 1720 to 1730

Nobumichi ARIGA

abstract

In his classical work on eighteenth-century mechanics, Clifford Truesdell characterized it as Rational Mechanics, mathematical enterprise aiming for general principles and methods, exercised through special problems. But, then, what were the special problems to be solved? The present paper proposes that theory of collision, or of what was called “communication” of motion, should be included. For this purpose, the author will select several theories proposed from 1720 to 1730, analyzing and comparing how they derived the laws of collision. We will find that ’sGravesande modified his theory between the first edition of his textbook and his controversial paper; that Maclaurin criticized ’sGravesande’s “new” theory but essentially adopted the “old” one, while Maziere expanded it by introducing “elastic ratio”; that Johann Bernoulli aimed at establishing the theory on principles of mechanics, modeling collision process by virtual springs; and that Euler applied to the spring-model what would be now called equations of motion, promising to deduce the laws of collision from “most certain principles of mechanics.” These enterprises not only show some developments of the theory and the popularity of that subject, but also will allow us to tell its history as an example of Rational Mechanics.

§1 序

いまや古典となった 18 世紀力学史の総説的論文『理性の時代の合理力学再発見に向けた一計画』の中で、数理物理学者にして科学史家でもあったトゥールースデルは、この時代になされた理論的な力学研究を「合理力学」Rational Mechanics として記述した。すなわち、それは特別な問題を解くことを通じて一般的な原理や方法を探究する

* 電気通信大学協力研究員 ariga.nobumichi@gmail.com

数学的営みであったという (Truesdell [1960] 1968, 特に p. 96)¹。今日の力学では、運動方程式や変分原理といった一般的な原理が最初に提示され、それが個別の問題に適用されるという行き方が普通であるが、この時代に行われていたのはむしろその逆であった。問題がまず先にあり、工夫をこらした解答が提出され、その試行錯誤の中から一般的な原理が確立されてきたのであった。

ところで 18 世紀初頭にあつて、特別な問題、解かれるべき問題とは何だったのであろうか。考えられる一つの回答は天体力学、より厳密には惑星運動の問題であり、これは実際、ニュートンの『自然哲学の数学的諸原理』(通称『プリンキピア』, 初版 1687) への応答として第一級の数学者たちが取り組んだ主題であった (Guicchiardini 1999; 山本 1997, 第 1 部)。他方、トゥールースデルが主に取り上げたのは弦の振動や流体の及ぼす圧力といった問題であるが、それが彼本来の専門分野——弾性体や流体の力学——と重なっているのはおそらく偶然ではなかったであろう。そもそもトゥールースデルによる一連の研究はオイラーの全集の編者解説という形で発表されており、それらはいずれも弾性体力学や流体力学に関係する内容であった。

いま挙げた問題はいずれも 18 世紀における力学の展開にとって重要なものであったに相違ないが、しかしそのすべてであったわけではないように思われる。当時の学者たちが取り組んだ問題群には少なくともあと一つ付け加えられるべきものがあり、それがここで取り上げる物体の衝突、あるいは当時の言葉遣いでは運動の「伝達」communication と呼ばれた問題である。

二つ(ないしそれ以上)の物体が衝突したとき、その前後で運動がどのように変化するのかという問いは、とりわけデカルトが『哲学原理』(初版 1744) で運動の第 3 法則として議論したことにより、17 世紀後半には自然学の重要な問題の一つとなっていた。デカルトの与えた衝突の規則が経験と合致せず、ウォリス、レン、ホイヘンスという 3 人の人物によってその世紀の終わりまでには正しい法則が見出されたという事情は、力学史ではよく知られている²。しかしながら、衝突の問題が 18 世紀に入ってからどのように議論されたのかについては、これまで断片的に言及されることはあっても、まとまった考察をほとんど欠いていたと言ってよい(後述する中田 (1994) の

¹ トゥールースデルの論文では主に小文字の“rational mechanics”(理論力学)が一般名詞として使われているが、標題にある「理性の時代の合理力学」としては“the Rational Mechanics of the Age of Reason”という大文字表記が採用されている(p. 87を見よ)。本稿ではこれを踏まえ、合理力学という表現をこの時代の特徴的な理論力学を指す歴史用語として用いている。

² 17 世紀における衝突の問題については多くの文献で扱われているが、最近の概観としては Bertoloni Meli (2006, 特に 5.5 節と 8.3 節)を参照。

研究は貴重な例外である)。例えばザボアの『力学原理の歴史』は、いま述べたような17世紀の展開に続けて1730年から始まるオイラーの一連の仕事を取り上げているが、そのあいだの時期については、「ホイヘンスとニュートンの後、衝突理論の[……]分野では本質的な進歩のないまま半世紀が経過した」(Szabó 1996, Kap. 5-A, S. 452)としか述べられていない。仮にそのような評価が適切なものであったとしても、根拠となる具体的事例の詳細が示されていないのは問題であろう。

本稿ではこの空白を少しでも埋めるべく、1720年から1730年までという時期を対象に、衝突の問題に対して採られた理論的アプローチを検討する。取り上げるのは一定の影響力を持ったと推察される5人の著作、計6篇であり、その選び方にある程度の恣意性があることは否定しない。だがそれでも、それらを比較することによって何らかの知見を取り出すことはおそらく可能であろう。実際、中田(1994)は18世紀初頭のフランスにおける種々の衝突理論を検討し、モリエールという人物の衝突理論の同時代的位置付けを探っている。本稿の手法もこれと似たものであるが、筆者の問題意識はむしろ、トゥールスデルの言う合理力学の特徴——特別な問題を解くことを通じて一般的な原理や手法を探究すること——が衝突の場合にも認められるかどうかを検討し、それによって18世紀力学史の一部としてこの主題を語る方途を探ることにある。

本論に入る前に、以下、予備的な注意をいくつか述べておこう。まず、本稿で衝突の法則と呼んでいるのは、衝突前と衝突後の物体の速度を関係づける規則のことである。当時、この意味での法則には2種類のもものが知られており、それらは、「ばね(弾性)を持たない」と形容される物体と、「ばね(弾性)を持つ」(すなわち「弾性的な」)物体とにそれぞれ結び付けられていた。現代の物理学の言葉で述べれば、これらは完全非弾性衝突および完全弾性衝突と呼ばれるものに対応している(イメージとしては、物体が壁に衝突したとき、そこで速度を失って完全に停止するのが前者であり、ぶつかったのと同じ速度で跳ね返るのが後者である)。

これと関連する論点に、物体の「硬さ」の問題がある。一般に「硬い」という形容詞は物体が衝突に際してまったく変形しないという意味で使われており、変形する「柔らかい」物体と対比された。そして物体が「硬い」あるいは「柔らかい」と呼ばれる場合には、弾性を持っていないとされることが多かった(すなわち、「弾性的な」物体は変形後に元の形状を回復するが、「柔らかい」物体は変形したままである)。しかしながら、完全に「硬い」物体の存在を認めず、あらゆる物体は弾性を持つとする立場

もあり、こうした物質観の相違が当時の衝突論では問題となった³。この事情が18世紀の衝突理論の諸相を複雑なものとしているが、本稿の議論にとっては、先に述べた2種類の衝突法則があったという点を押さえておくことが肝要である。

次に、衝突の様式としては「まっすぐ」directと「斜め」obliqueの区別がなされていた。衝突が二つの物体（たいていの場合は球を想定）の重心を結ぶ一直線上で起こる場合が前者であり、それ以外はすべて後者に分類される。まっすぐの場合はさらに、物体が当初同じ向きに動いていた場合（つまり追突）や逆向きに動いていた場合（正面衝突）といった場合分けがなされることが多い。本稿ではこのうち、まっすぐな衝突に話を限定し、さらに主として正面衝突の場合を取り上げる。また、二つの物体の衝突のみを対象とし、三つ以上の物体が関係する多重衝突の問題は扱わない。このように限定するのは、ここでの筆者の関心が衝突の問題についての百科事典的記述にあるのではなく、条件を揃えた単純な事例の検討を通じて理論間の共通点や差異を浮かび上がらせることにあるためである⁴。

§2 「力」の計算

1720年、ライデン大学の教授ス・グラーフエサンデ（Willem Jacob 'sGravesande, 1688–1742）が⁵、後にベストセラーとなった教科書『実験によって確かめられた自然学の基礎、あるいはニュートン主義哲学入門』（初版第1巻）を公刊した（Gravesande 1720）⁶。この中で述べられている衝突理論を、ここでは「旧い」という言葉で形容しておくことにする。と言うのは、この直後の1722年、彼は『物体の衝突に関する新しい理論の試み』と題した論文を書くことになるからである（Gravesande 1722/1774）。以下ではこの新旧二つの理論を順に検討する。

「旧い」理論を考察する上でまず踏まえておくべきなのは、ス・グラーフエサンデにおける「力」の理解である。実際それは、今日の考え方とはいくぶん趣を異にしている。ス・グラーフエサンデによれば、より大きな「力」が物体に刻印されるほど、その

³ 「硬い」物体という概念の歴史は Scott (1970) によって主題的に論じられている。

⁴ 同じ理由から、以下ではすべての事例について、共通の記号を用いることにする。具体的には、質量を m 、衝突前の速度を v 、衝突後の速度を v' とし、物体の名前を添字で表す。

⁵ 邦語文献では「スフラーフェサンデ」と表記されることもある。

⁶ 筆者はラテン語原典と二種類の英語訳の三つを参照した。本稿で参照している箇所に関する限りこれらは同じ内容である。煩雑さを避けるため、参照箇所は節の番号とラテン語版のページ付けによって示す。

物体の運動は大きくなるという。「刻印力」vis impressa (impressed force) とはニュートンの第 2 法則においても使われている表現であるが、ス・グラーフェサンデはこの「力」について、それは運動の量とも呼ばれると補足している (§ 54, p. 15, 定義 5)。さらに運動の量は質量と速度に比例するとされているが (§ 64, pp. 16-17)、このように「力」を物体に内在的なものとして「運動の量」と同一視することは、かつてデカルトが行っていたことであつた⁷。

もう一つ事前に注意しておきたいのは、ニュートンの第 3 法則、すなわち作用と反作用が等しいという命題の使われ方である。以下の議論から見て取れるように、ス・グラーフェサンデはこの法則を衝突にも適用し、二つの物体が衝突する際、一方の物体において生み出されたり打ち消されたりする運動の量は他方の物体において生み出されたり打ち消されたりする運動の量に等しいという解釈を与えている。その結果、衝突現象は、二つの物体が互いに相手の持つ運動の量を——すなわち「力」を——増減させるような現象として捉えられることになる。

以上を踏まえて、衝突の問題が具体的に論じられている場面を見よう。問題の教科書では第 1 書第 2 部第 20 章(硬い物体の場合)および第 21 章(弾性的な物体の場合)がそれに当たっている。ス・グラーフェサンデの主眼はむしろ、衝突の法則の正しさを諸々の実験を通じて確かめることにあつたように思われるが、ここでの関心事は衝突の法則を導き出している次のような推論である。

二つの硬い(弾性のない)物体が正面衝突し、両物体は衝突後、一体となって、運動の量の大きかった方(B とする)が進んでいた方向へ運動するとしよう (§ 174, pp. 54-55, 事例 4)。このとき、運動の量の小さかった方(A とする)は——衝突の結果、進む方向が反転するのだから——もともと持っていた運動を B によってすべて破壊されたことになる。とすると、作用・反作用の法則から、B の持っていた運動も A によってそれと同じだけ破壊されねばならない。その結果、衝突後に残っている運動の量の総計は、B の運動の量から A の運動の量を差し引いた残りということになる。衝突後、二つの物体は一体となって動く想定されているのだから、その速度を求めるには、残った運動の量を質量の和で割ればよい。これで衝突後の速度が得られたことになる⁸。

弾性的な物体の衝突の場合は、二つの段階に分けて考察される。衝突の際に両物体

⁷ デカルトにおける「力」についての最近の議論としては、武田 2009 がある。なお、ここではスカラー量が問題になっているため、今日の用語である「運動量」を避けて「運動の量」としている。

⁸ 式で表せば、 $v_A = v_B = (m_B v_B - m_A v_A) / (m_A + m_B)$ 。これは完全非弾性衝突の正しい法則を与えている。

が変形し、その変形が最大となるまでの第一段階と、そこから元の形状を回復するまでの第二段階である(弾性は完全であるとされている)。このうち第一段階は、先に見た硬い物体の場合と何ら変わらない。すなわち、衝突の際に両物体のなす相互作用により、運動の量の増減が起こるとされる。だが弾性的な物体の場合は、ここで話が終わらない。ス・グラーフェサンデによれば、二つの物体は元の形状を回復して跳ね返る際、もう一度作用を及ぼしあう。この二度目の相互作用は一度目と等しいとされるため、衝突全体では結局、作用が二倍となる(以上 § 178, p. 56)。ここから、弾性的な物体の衝突において両物体がそれぞれ得る(あるいは失う)運動の量は弾性がなかった場合の2倍である、という「規則」が得られることになる (§ 180 および 181, p. 57)。弾性衝突における衝突後の速度は、この「規則」を利用することで求められる⁹。

このス・グラーフェサンデの議論は、今日の目にはあまりに奇妙なものに映るであろう。しかしそれにもかかわらず、2種類の正しい法則がそれなりに筋の通った推論によって導かれているという意味では、この理論は一応の成功を収めていたと言ってよい。ところがス・グラーフェサンデは、わずか2年後にこれを撤回しなければならなくなった。この理論の拠って立つ前提に、重大な変更が生じたためである。

1722年の論文『物体の衝突に関する新しい理論の試み』は、一般に、活力論争において重要な役割を演じた著作として知られている(Gravesande 1722/1774)¹⁰。ス・グラーフェサンデはこの論文で、「力」が質量と速度に比例する(したがって運動の量と同一視できる)という立場から「力」は質量と速度の2乗とに比例するという立場に転向し、以降、活発な論争に身を投じるようになった¹¹。

本稿の議論にとって重要なのは、この「力」の尺度の変更に伴い、先の理論は必然的に変更を要求されるという点である。1720年の教科書では、両物体が衝突後に持っている「力」(すなわち運動の量)をまず決定し、それを質量で割るという手順で計算がなされていた。だがこれによって得られるのは今や、速度ではなく速度の2乗のは

⁹ 一例として、 $m_A = 1, m_B = 3, v_A = 5, v_B = 11$ という場合を紹介する (§ 182, p. 58, 実験 6)。弾性がなければ、衝突後の速度は $v_A = v_B = (3 \times 11 - 1 \times 5)/(1 + 3) = 7$ (v_B の向き) となり、それゆえ両物体の運動の量の変化はどちらも 12 と計算される。よって弾性衝突における運動の量の変化は 24 のはずであり、ここから衝突後の運動の量は $m_A v_A = 19, m_B v_B = 9$ となる。これをそれぞれの質量で割ると、 $v'_A = 19, v'_B = 3$ という正しい結果が得られる。

¹⁰ 筆者は初出論文と後に著作集に収録された版とを参照したが、内容に違いは認められなかった。以下では両方の版のページ付けを「p」で区切って記しておく。

¹¹ 活力論争とは、ライブニッツのデカルト批判(1686)に端を発し、物体の「力」の尺度をめぐる戦わされた一連の議論のことを言う。その概要については有賀(2009)とそこで挙げられている文献を参照。

ずであろう。「力」が質量と速度の 2 乗とに比例するという前提で、正しい衝突の法則が導き出せるような理論を新たに構築すること、これがこの論文の課題であった¹²。

主として同論文第 7 項で展開される「新しい」理論の核となっているのは、衝突時に物体が変形し——したがってここでは「硬い」物体の概念は放棄されている——その際に「力」が消費されるという考え方である。それゆえ非弾性衝突の場合、衝突後に両物体が有している「力」は、衝突前にあった「力」から、変形に要した「力」を差し引いた残りということになる。このようにして衝突後の「力」が求められれば、それを質量で割ったものが速度の 2 乗を与える。以上が「新しい」理論の基本的な考え方である (§ 59, pp. 38-40/238-239, 命題 20)¹³。なお、弾性衝突の場合は「古い」理論と同じく、衝突による速度の変化が 2 倍になると考えればよい (§ 71, pp. 50-51/145-146, 命題 26)。

変形に必要な「力」をどのように見積もるかという点に関する議論は錯綜しているが、概略次のようなものである。まず、衝突前の二つの物体の「相対速度」*vitesse respective* が同じであれば失われる「力」は等しいとス・グラーフェサンデは述べる (§ 49, pp. 31/233-234, 命題 14)¹⁴。ここで特殊な場合として、方向が逆向き（正面衝突）で質量に逆比例するような速度を持っている（すなわち運動の量が等しい）場合を考えると、このとき衝突前の両物体の「力」の和は「相対速度」が等しいという制約の下で最小となっており (§ 50, pp. 31-32/234, 命題 15)、さらにこの場合、衝突によって両物体は静止するから (§ 53, pp. 33-34/235, 命題 18)、最初にあった「力」がすべて失われている。これらを総合すると、一般に非弾性衝突において衝突時に失われる「力」を求めるには、考えている場合と「相対速度」が同じで、かつ等しい運動の量をもって正面衝突するような事例を考えればよいという結論になる (§ 58, pp. 38/237-238, 命題 19)。ここから、失われる「力」を表す一般的な関係式が得られる¹⁵。

¹² 論文の標題自体がス・グラーフェサンデの問題意識を語っているように筆者には思われるが、活力論争との関連でこの論考を取り上げている先行研究は概してこの点に注意を払っていないように思われる。

¹³ この「力」はそのまま、現代の力学的エネルギーという言葉で置き換えてよさそうにも思われる。だがス・グラーフェサンデはこの論文において、「力」とは「運動物体の中にあつてある場所から別の場所へとそれを運ぶもの」とであると規定しており (§ 5, pp. 4-5/219, 定義 2)、そうした安易な読み替えを許さない。

¹⁴ ここでの「相対速度」は両物体の持つ速度の大きさの差（強いて記号で表せば $\|v_1| - |v_2||$ ）という意味で言われているため、今日の意味と区別するために鍵括弧を付けておく。

¹⁵ 「相対速度」を d とすると、失われる「力」は $m_A m_B d^2 / (m_A + m_B)$ で与えられる。よって、これを衝突前の「力」 $m_A v_A^2 + m_B v_B^2$ から引けば、衝突後の「力」として $(m_A v_A + m_B v_B)^2 / (m_A + m_B)$ が得られる（ただし $d^2 = (v_A - v_B)^2$ を用いた）。非弾性衝突のため、二つの物体は衝突後一体となって運動す

こうしてス・グラーフエサンデは、衝突の法則を改めて導き出すことに成功した。「旧い」理論と比べてみると、衝突後の「力」を先に計算してそこから速度を得るというアプローチそのものは同じであり、弾性衝突の扱い方にも変化はない。しかしながら、「力」の尺度に関する立場が変わったことに伴い、「新しい」理論には物体の変形とそれによる「力」の消費という新たな要素が取り入れられることになった。導出すべき法則が、理論を改訂する際の指針を与えていたのであった。

§3 パリ科学アカデミー懸賞

衝突の問題、あるいは当時の表現で言うところの「運動の伝達」の問題は、パリ科学アカデミーでも積極的に取り上げられた。とりわけ、1724年度と1726年度の二つの懸賞課題として硬い物体と弾性的な物体の衝突がそれぞれ取り上げられたことは、当時この問題に対して与えられていた重要性の程度を示しているように思われる。審査の結果、二つの懸賞ではそれぞれ、マクローリン (Colin Maclaurin, 1698–1746) とマズィエール (Jean-Simon Mazières, 1679–1761) の論文が賞を獲得することになった¹⁶。今から見るように、二人が展開した主張はス・グラーフエサンデの理論、特に「旧い」理論に連なるものである。

マクローリンの受賞論文『物体の衝突法則の例証』(Maclaurin 1724)は、冒頭、物体の運動に関する「公理と原理」を7項目にわたって挙げている(第1節, pp. 5–7)。最初の三つとしてニュートンの3法則(ただしニュートンの名前は出てこない)、4番目として一様運動における通過距離が速度と時間の積であることが挙げられた後、5番目に「速度の等しい諸物体の力はそれらの質量に比例する」と述べられている。さらに6番目の項目では、弾性が関与しない場合、「ある物体の中に生み出される力が、その物体に運動を伝達する作用主体が持っていた力よりも大きいことはあり得ない」とされているから、マクローリンもス・グラーフエサンデと同様、物体が何らかの意味で「力」を持つと考えているのは明らかである。これに続く最後の項目では、いわゆる運動の相対性が主張されている¹⁷。

るから、残った「力」を質量の和 $m_A + m_B$ で割ったものは、共通の速度の2乗を与える。これより、求める速度は $(m_A v_A + m_B v_B) / (m_A + m_B)$ である (§ 59, pp. 38–40/238–239, 命題 20)。

¹⁶ マクローリンは後にイギリスの代表的な「ニュートン主義者」として知られることになるが、この懸賞論文は彼の有名な著作としては最初のものであった。一方のマズィエールについては、ポントワーズ生まれのオラトリオ会士という以外、詳しいことが知られていない。名前と生没年は18世紀の著者人名録 *La France littéraire*, t. 2 (Paris, 1769), p. 78 に依る。

¹⁷ ただし、マクローリンは一様な回転運動(具体的には地球の自転)に言及しているので、こうした場

このあと、マクローリンは「力」が質量と速度に比例するという主張を展開する(第2節)。これは前節で取り上げたス・グラーフェサンデの『新理論』に対する批判という形でなされており、論考全体の半分近くがそれに費やされている。その詳細には立ち入らないが、マクローリンの行っている議論を一つだけ紹介しておこう(pp. 7-9)いま、二人の人物がそれぞれ、舟の上と海岸に立っており、舟は一定の速度(2とする)で進んでいるとする。このとき二人が、舟の進んでいる方に向かって等しい物体を同じように投げたとしよう(その速さを8とする)。これによってどちらの物体も同じだけ「力」を獲得したことになり、仮に「力」が速度の2乗に比例するなら、その大きさは64である。ところで舟の上の物体は元々2の速度を、したがって4の「力」を持っていたのだから、「力」は合わせて $64 + 4 = 68$ となったはずである。ところがその物体の空気中における速度は $8 + 2 = 10$ なのだから、「力」は100でなければおかしい。要するに、「力」が速度の2乗に比例するというのは、運動の相対性に抵触するはずなのである。

こうした諸々の議論によって土台を固めたところで、マクローリンは衝突についての議論に移る(第3節でまっすぐな衝突が、第4節で斜めの衝突が扱われる)。ここでの関心事であるまっすぐな衝突の理論という点に関する限り、その内容はある意味で、驚くべきものである。実際、マクローリンによれば、硬い(弾性のない)物体が正面衝突する際、「大きい方の力は[……]小さい方を打ち消し、またそれを打ち消す際、それ自身は第3の原理[引用者注:作用・反作用の法則を指す]によって、この小さな力と等しい量だけ減少させられる」(命題2, pp. 17-18)。よって衝突後に残る「力」は衝突前にあった両物体の「力」の差に等しい。また、完全な弾性を持つ物体の場合、ばねの作用によって「力」の変化は2倍になる(命題3, p. 19)。ここで言われていることは、ス・グラーフェサンデが以前に行っていた議論とまったく同じである。本人にそのつもりがあったかどうかは分からないが、マクローリンが行ったのは実質的に、ス・グラーフェサンデの「新しい」理論を批判して「古い」理論を支持することにほかならなかった¹⁸。

これと比較して、マズィエールの論考には衝突理論の明らかな拡張が見られる。『完全または不完全ばねを持つ物体の衝突法則』という表題が示しているように、マズィ

合にも相対性が成り立つと考えていたようである。

¹⁸ マクローリンの衝突理論については Scott (1970, pp. 24-29) も詳しく論じており、かつ別の箇所ではス・グラーフェサンデの教科書も参照されているが、なぜか両者の議論の相似性は指摘されていない。

エールはこの中で、弾性が完全でない場合（すなわち非弾性衝突一般）についても適用できる理論を提示した（Maziere 1726）。以下ではこれが述べられている論考の後半部を主に取り上げる¹⁹。

マズィエールの理論の要石は、「弾性比」*rapport élastique* という概念である。いま、いくらかの弾性を持つ二つの物体を既知の「力」で衝突させ、衝突後の「力」を観察するとしよう。このとき、衝突前の「力」に対する衝突後の「力」の比は、物体の持つばねが圧縮されるときの「力」に対する復元時の「力」の比を表すとマズィエールは述べ、これを「弾性比」と名付けている（§ 38, p. 16, 前提 2）。なお、マズィエールもやはり物体の持つ「力」について語っているが、これは質量と速度に比例するとされる（§ 3, p. 3, 原理 2）。

その上で、四つの「衝突の法則」が提示される（§ 44–47, pp. 28–29）。それらは順に、(1) 衝突の際、圧縮が終わった時点では両物体の速度が等しいこと、(2) 正面衝突の場合、圧縮が終わった時点では両物体が等しい「力」を失っていること、(3) 追突の場合、後ろから衝突する物体の失う「力」が衝突された物体の獲得する「力」に等しいこと、(4) 同じ性質の物体においては弾性比が一定であること（特に、弾性が完全であれば弾性比 r は 1 であり、不完全であれば 1 より小さい、云々）となっており²⁰、最後の項目を除けば、ス・グラーフェサンデやマクローリンと基本的には同じ考え方をしているのが分かる。

衝突後の速度を求めるには次のようにする（§ 50, pp. 31–32, 場合 2；二つの物体 A と B が正面衝突し、衝突前の「力」は A の方が大きいとする）。衝突の過程全体を、物体の圧縮と復元という二つに分けて考えよう。圧縮時には、A は一定量の「力」を失い、B はそれと同じだけの「負の力」を失う、すなわち同量の「力」を得る（速度の向きに応じて、「力」に正負が設定されている）。続く復元時には、A は先ほど失った「力」に弾性比を乗じただけ「力」をさらに失い、B はこれと同じだけの「力」を得る。これにより、衝突前と衝突後の「力」を結び付ける方程式が両物体について得られる。これを連立させて解くことで衝突後の運動が求められ、そこから最終的に「衝突の法

¹⁹ 前半部では、物体の弾性の原因が論じられている。マズィエールによれば、物体には無数の孔があり、その中を微細物質の渦が満たしている。この渦の遠心力が弾性を生むとされている。

²⁰ このことから分かるように、弾性比は実質的に反発係数に相当する。ただし、これがマズィエールの創案になるものかどうかは不明である。

則の一般公式」が導かれることになる (§ 54-56, p. 33)²¹.

マズィエールの議論は、その基本的枠組みこそス・グラーフェサンデやマクローリンのものと同じだが、弾性比という概念を導入することで、衝突理論の一般性を大幅に高めている。実際、得られた「一般公式」で弾性比を 1 とすれば弾性が完全な場合の式となり (§ 58, pp. 34-35, 系 3), 0 とすれば弾性をまったく持たない場合の式が得られることをマズィエールは示した (§ 59, p. 35, 系 4)。ここでは、既知の法則を導くことができるという以上の豊かな内容を理論が獲得していると言えるであろう。

§4 ばねによる衝突過程のモデル化

パリ科学アカデミーの懸賞には、バーゼル大学教授であった高名な数学者、ヨハン・ベルヌーイ (Johann Bernoulli, 1667-1748) も応募していた。二度応募し、二度とも賞に届かなかった。しかしながらその論文『運動の伝達法則についての論議』はアカデミーからも一定の評価を受け、パリで出版されるに至った (Bernoulli 1727/1742)²²。実際、前節までに見てきた著作と比較して、ベルヌーイは衝突の問題に対する新しいアプローチを提示しているように思われる。それを可能にしたのは仮想的なばねについての考察であった。

ベルヌーイはあらゆる物体を弾性的であるとし、完全弾性衝突の法則を導出する。そのためにまず主張されるのは、二つの物体の (衝突前の) 速度の比が質量に逆比例している場合、両物体は衝突後、それぞれ来たときと同じ速さで逆向きに跳ね返るという命題である (ch. 3, § 10, p. 27, 「定理」の第 1 項目)。ス・グラーフェサンデは「新しい」理論の中で完全非弾性衝突についてこのような場合 (二物体の運動の量が等しい場合の正面衝突) を利用していたが、ベルヌーイは完全弾性衝突をこの特権的な場合に基づいて論じる。すなわち、二つの物体の衝突として考えられるあらゆる場合は、

²¹ すなわち、A が圧縮時に失った「力」を $m_A x$ (x は未知量) とすれば、次の二つの式が得られる。

$$m_A v'_A = m_A v_A - m_A (r + 1)x, \quad m_B v'_B = m_B v_B + m_A (r + 1)x.$$

これを x について解き、得られた結果を元の式に代入し直せば、非弾性衝突に関する正しい法則が得られる。「一般公式」とは、次の式、もしくはそれを書き換えたものである。

$$v'_A = v_A - m_B \times \frac{(r + 1) \times (v_A - v_B)}{m_A + m_B}, \quad v'_B = v_B + m_A \times \frac{(r + 1) \times (v_A - v_B)}{m_A + m_B}.$$

²² 筆者は、後に全集に収録された版を主に利用し、懸賞論文集に収められた版を併せて参照した。引用は章と節の番号および全集版のページ付けによって行う。

この事例に帰着できるのである。二物体の運動がある平面上でなされるとし、この平面が両者の共通重心の速度で一樣に動いていると考えよ、とベルヌーイは言う（今日の物理学者なら、重心座標系に移行せよ、と言うであろう）。そうすれば、この平面上で考えたときには、衝突は先の特権的な場合になっているであろう。そこで、この動く平面上で考えたときの衝突後の速度を先の「定理」によって求めたなら、あとは平面の運動をそこから再び差し引けばよい（ch. 4, § 1-3, pp. 28-29）。これにより、衝突前と衝突後の速度の関係が得られたことになる。マクローリンは運動の相対性を「力」の尺度の議論に利用していたが、ベルヌーイはそれを衝突法則の導出に組み込んだ。実際、衝突が行われる平面が静止していても一樣運動していても衝突によって生じる運動は等しいということが、この議論を行うに先立ち、「仮設 2」として述べられている（ch. 3, p. 27, § 12）²³。

ところで、その特権的な場合についての主張（「定理」とされているもの）はどのようにして正当化されるのであろうか。この点に関するベルヌーイの議論は必ずしも明確な構造をとっていないが、おそらくは以下で述べる二つの主張を組み合わせた結果として了解されていると思われる。

一つ目は、次の「仮設 1」である。

二つの作用主体が釣りあう、あるいは等しいモメントを持つのは、それらの絶対的な力がそれらの仮想速度に逆比例するときである。ただし相互作用する力は運動していても静止していてもよい（ch. 3, § 2, p. 23）²⁴。

「静力学と力学の普通の原理」（*principe ordinaire de Statique et Mécanique*）とされるこの主張はいわゆる仮想速度の原理であり、擬アリストテレスの『機械学』にまで遡る長い伝統を有している²⁵。したがってこの「仮設 1」自体は目新しいものではないが、ベルヌーイはこれを、物体が加速される場合に適用してみせる。いま、静止した

²³ なお、本稿の議論と直接は関係しないが、Maltese (2000) はオイラーにおける運動の相対性の利用について述べた論文で、相対性が単なる哲学上の問題ではなく数学的道具でもあったことを強調している。筆者もこの意見に賛同する。

²⁴ “Deux agens sont en équilibre, ou ont des momens égaux, lorsque leurs forces absolües sont en raison reciproque de leurs vitesses virtuelles ; soit que les forces qui agissent l’une sur l’autre soient en mouvement, ou en repos.”（参照した二つの版では句読点や綴りに異同が見られるが、ここでは全集版に依った。）なお、ここで「モメント」と言われているものは今日の力学で言う仮想仕事に相当している。後にラグランジュは『解析力学』において、「モメント」を力と仮想速度の積として定義し、この概念をガリレオに帰している（Lagrange [1788] 2011, p. 134）。

²⁵ 仮想速度の原理の歴史については Benvenuto (1991, vol. 1) が詳しい。

二つの物体のあいだに縮められたばねが置かれているとしよう。このばねが元に戻る時、両側の物体は押されて加速するが、その各瞬間に獲得される微小な速度（ベルヌーイによれば、これが「仮想速度」とされる）は物体の質量（これは「慣性の力」に比例）に反比例する。その結果、最終的に得られた速度も物体の質量に反比例するであろうとベルヌーイは主張する（ch. 3, § 3, p. 24）。

他方でベルヌーイは、一端が固定されているばねに物体が衝突するという例について、ばねが縮むときに要する「力」と伸びるときに生み出される「力」は等しいという議論を行っている（ch. 2, § 2, pp. 15-16）。そこで言われているのは要するに、ばねが圧縮される時と元に戻る時にはちょうど反対のプロセスを経るということであるから、これを先の主張と組み合わせれば、質量と速度が逆比例するような関係を保って衝突した二つの物体は、来たときと同じ速度で帰っていくということになるのである。

ベルヌーイはこのようにして、ばねを介した二物体の衝突を考え、さらにばねを十分小さいものと見なすことで、完全に弾性的な物体の衝突の効果を考察できると説明する（ch. 3, § 9, pp. 19-20）。言うなれば、ばねによる衝突過程のモデル化である。このアプローチを先に見た動く平面（重心座標系）の利用と組み合わせることで、ベルヌーイは前節までに検討してきたものとは本質的に異なるタイプの理論を提案した。と言うのも、ベルヌーイの理論は衝突後の物体の速度を導き出すにあたって、両物体の「力」がどれだけ増減したかという考察を一切必要としていないからである。ベルヌーイのこの論考は活力論争において活力説（物体の「力」は質量と速度の2乗とに比例する）を支持した重要なテキストの一つとして知られているが、こと衝突理論に関する限り、ベルヌーイは「力」についての直接的議論を回避していると言ってよい²⁶。その主張が十分に基礎づけられているかどうかは議論の余地があるとしても、それがス・グラフェサンデ・マクローリン・マズィエールの系譜に属していないことははっきりしている。

²⁶ 筆者の考えでは、これがベルヌーイの衝突理論の際立った特徴である。問題の論考における衝突の取り扱いについては Scott (1970, pp. 30-39) を始めとする多くの研究で論じられているが、管見の限りこの点が指摘されたことはないと思われる。近年の研究から一例を取り上げると、野澤 (2006, 第2節) はベルヌーイが運動量の保存と活力の保存という両方の道具立てを用いている点を強調している。確かにベルヌーイは衝突後の物体の速度を得た後、そこからこれら二つの保存則（および「相対速度」の保存という三つ）を導き出して利用しているが、筆者がここで問題にしているのは、これらの法則が「力」を直接介さずに得られているという点である。なお、衝突後の速度を得た後にベルヌーイが行っている議論については、野澤を始めとする諸家の研究に譲る。

この論考に序文として付されているアカデミー宛の書簡では²⁷、ベルヌーイは自分の衝突理論について次のように語っている——ホイヘンス、マリオット、レン、ウォリスといった人々によって運動の伝達の規則が与えられてきたけれども、「一種の帰納によって (par une espece d'induction) 一般的な規則を極めて単純な場合から引き出すことにはほとんど満足がいきませんでしたので、筆者は彼らとは異なる、また同時にもっと自然である方法を自らに命じました」。さらに続けて、ベルヌーイはこう述べる。「筆者が一般的な規則を確立したのはまさに力学の原理そのものの上なのであり、次いでその一般的な規則から、ことごとく系として、それぞれの場合における個別の規則を導き出したのです」(pp. 3-4)。ベルヌーイが志向したのは、衝突の問題に対する一般的な規則を「力学の原理そのもの」 *principes même de la Méchanique* に依拠して導き出すことであった。そしてこの態度は、次に見るオイラーの場合にはさらに徹底されることになる。

§5 「極めて確実な力学の諸原理」

ペテルブルク科学アカデミーの 1730-1731 年度の紀要に掲載されたオイラー (Leonhard Euler, 1707-1783) の論文、『物体の衝突における運動の伝達について』 (Euler 1730-31/1965) は、衝突の問題を主題としたオイラーの著作としては最初のものである²⁸。前節までに見てきた一連の理論と比較して、この論考には二つの特徴的な点を認めることができる。

一つは、物体の衝突の問題が、物体のあいだに置かれた弾性体 (論文に添えられた図版は明らかにばねを描いている) によって考察されている点である。衝突の際には、このばねが少しずつ変形していき、やがて圧縮が限界に達する。次いで、物体が完全に弾性的であれば、ばねが復元して両物体は新たに速度を獲得する。弾性を持たない物体の場合は、最大限圧縮されたところでばねが復元力を急に失うと考えればよい (§ 9, p. 3)。こうしてオイラーも、ベルヌーイと同じく、ばねによって衝突のプロセスをモデル化する。ベルヌーイの仕事には言及されていないが、実のところオイラーはペテルブルクに赴く以前のパーゼル時代、ヨハン・ベルヌーイの手助けを受けて数学を学んでいた (Fellmann [1995] 2002, 4-5 および 22 頁)。この論文がベルヌーイの論

²⁷ 全集版では 1723 年 11 月 1 日という日付がある。

²⁸ 筆者は全集版を主に利用し、アカデミー紀要版も併せて参照した。言及箇所は節番号と全集版のページ付けによって示す。

考を知らずに書かれたとは考えにくいように思われる。

もう一つの、いっそう本質的な特徴は、このモデルから衝突の法則を導出するときの手續きにある。以下、その概略について述べよう (§ 10, p. 3 以下。詳細は本稿の「付録」を参照)。まず衝突の前半(ばねの圧縮)では、両物体が最初の接触後少しづつ変形し、中心間の距離が縮まっていく。オイラーはこの変化を、ばねの復元力を受けて速度が徐々に変化(減速)するという形で記述する。これは現代的な観点から言えば、相互作用による両物体の運動状態の変化について運動方程式を立てるということに相当している。この式を別の適当な関係式と組み合わせることで、オイラーは最終的に二つの方程式を得る。これらはそれぞれ、(同じく今日の表現で言えば)運動エネルギーの変化が仕事に等しいという関係と、重心運動の保存(運動量の保存)とを表すものである。

得られたこの二つの式を組み合わせれば、衝突後の速度が求められる。その際、完全弾性衝突の場合には、ばねが完全に復元したところで衝突のプロセスが終わるという条件を適用し (§ 19, p. 6)、完全非弾性衝突の場合には、ばねの圧縮が最大になったところで相互作用が終わると考える (§ 20, p. 6)。弾性が完全ではない場合については具体的に論じられていないが、同様にして考えることは容易いとオイラーは述べている (§ 22, p. 6)。

オイラーのこの解法は、衝突を有限の時間にわたって生じる連続的な変化のプロセスとして捉え、仮想的なばねの作用に対して「運動方程式」を適用するというものである²⁹。ここでは、本稿でこれまで見てきたような、物体の「力」の増減に関する考察も、運動の相対性の利用もまったく現れない。ばねによる衝突過程のモデル化という点でベルヌーイの発想を受け継いでいるとしても、オイラーはそこからさらに大きな一歩を踏み出していると言うべきであろう。オイラー全集におけるこの論文の編者が述べている次のような評価に、筆者は完全に同意する。すなわち、「それ以前は力の概念を衝突の概念に帰着させようということがなされていたのに、オイラーは道筋を逆にし、衝突の理論全体を、有限の力の効果の下における運動の理論の特殊な一例、あるいは少なくとも限られた一例にすぎないものに還元することを試みようとしてい

²⁹ 本稿の趣旨を外れるためここでは立ち入らないが、オイラーは実際、運動の変化は「跳躍によってではなく、段階的に」(successive, non saltu) なされるとしている (§ 4)。「連続律」として知られるこの主張はベルヌーイの基本的立場でもあった (Bernoulli 1727/1742, ch. 1, 特に § 5, p. 9)。Scott (1970) や Hanks (1970, pp. 170-175) は、この連続律と硬い物体の問題が密接に関連していたことを論じている。

る」と (Blanc 1968, p. VII).

オイラー自身も、自らの理論が根本的に新しいものであると自負していた。この論文の始めの方で、オイラーはレン、ウォリス、ホイヘンスが衝突の規則を発見したことに触れ、それらが実験によって十分に確かめられていることをまず認める。その上で、衝突法則に対するさまざまな証明が考案されてきたと述べるのだが、「しかしそのうちのどれ一つとして、私の見る限りでは、真正なものでなく、むしろいずれも異質な諸原理から (ex alienis principiis) 派生している」とされる (§ 2, p. 1)。さらにこれに続く一節は、以下に全文を引用しておくに価するであろう。

これに加え、これまで誰も運動の変化の原因そのものを示してこなかったし、物体がどのように相互作用しうるのかを説明してもこなかった。このことゆえに、運動の伝達の諸規則が極めて確実な力学の諸原理から導かれ、また同時に、衝突そのものにおいて物体がどのように相互作用し、運動を変化させるのかが見明かされるような論考を提出するのは、やりがいのあることだと私は判断したのである (§ 3, p. 1)³⁰。

オイラーが目指したのは、物体が衝突の際にどのように相互作用するのかという観点に立って、衝突の法則を「極めて確実な力学の諸原理から導く」ことであった。この論文の内容から見て、「極めて確実な力学の諸原理」は我々なら運動方程式と呼ぶであろうものを指すと考えられるが、上の引用を前節の終わりに見たベルヌーイの主張と比較してみるのは興味深い。と言うのも、ここでオイラーが表明しているのは——ベルヌーイの論考を知っていたとすれば、であるが——ベルヌーイの目指している方向は正しいが出発点に据えるべき具体的な原理の選定が不適切だという見解にほかならないからである。

§6 結論

トゥルースデルに始まる 18 世紀力学史の研究において、衝突の問題はこれまでほとんど無視された存在であった。確かに、この世紀の力学の到達点とも言うべきラグランジュの『解析力学』(初版 1788 年)において衝突は取り上げられておらず、この間

³⁰ “Accedit ad hoc, quod nullus adhuc ipsam alterationis motus causam monstraverit, neque quomodo corpora in se mutuo agere possint, explicuerit. Hanc ob rem operae pretium fore existimavi, istam dissertationem proponere, in qua regulae communicationis motus ex certissimis mechanicae principii deducantur; simulque ostendatur, quomodo in ipsa collisione corpora in se mutuo agant motusque immutent.”

題の重要性が相対的に減少していったという可能性は考えられる。しかしながら、少なくとも世紀の前半においては、事情は異なっていたと見るべきであろう。運動の伝達という主題が幾人もの人々によって、さまざまな場所で論じられていたという事実は、当時これが特別な問題であったという予感を我々に抱かせる。むしろ、衝突の問題の地位低下は力学の理論体系の確立と表裏一体をなす現象であったのだと言えるかもしれない(この点は今後さらに検討されるべき課題である)。

本稿では、1720年から1730年にかけて著されたいくつかの論述を通じて、この時期の衝突理論の諸相を素描しようと試みた。それらの内容を比較してみると、理論の発展と呼べるものをそこにいくつか認めることができる。ス・グラージェサンデの「旧い」理論から「新しい」理論への移行や、マズィエールによる「弾性比」の導入は、物体の持つ「力」という今日馴染みのない概念に支えられているとしても、やはり「発展」と呼ぶべき類の出来事であろう(マクロローリンの衝突理論はス・グラージェサンデの「旧い」理論と基本的に同じものであるが、本稿で論じなかった斜め衝突への適用という点では新しさが認められるかもしれない)。さらに、ベルヌーイが行ったばねによる衝突過程のモデル化や、それを推し進めて「極めて確実な力学の諸原理」から衝突の法則を導出しようとしたオイラーの試みは、個々の問題を通じて一般的な原理や手法を探究するという合理力学の特徴によく当てはまっていると言える。それゆえ、衝突は惑星運動を始めとする諸問題と並んで、18世紀の力学史における正統的なテーマと見なすことができよう。衝突の理論は力学の一般原理が探究された特別な問題の一つに数え入れられるべきなのであり、種々の衝突理論に見られる個別性が一般原理からの演繹によって置き換えられていく過程に、18世紀力学史の本質的な一面を認めることができるのである。

トゥールースデルが半世紀前に提示した計画は、18世紀の理論的な力学研究を「合理力学」として捉えるという方向性においては間違っていなかったと筆者は考えるが、対象を狭く限定し過ぎていたことが一つの欠点であったように思われる。衝突の問題はトゥールースデルの歴史叙述では完全に無視されており、それを力学史の正統に組み入れることに彼が同意したかどうかは疑わしい。だがそれでも、当時解かれるべき問題とは何であったのかを批判的に問うことによってこそ、その計画は真に豊かなものとなるに違いないのである。

付録：オイラーによる衝突法則の導出

オイラー (Euler 1730–31/1965) による衝突法則の導出について、具体的な手続きを以下に示す (オイラーは追突の場合で説明しているが、ここでは正面衝突の場合に置き換えている)。

まず、二つの物体が接近した (ばねの縮んだ) 分の距離を x とし、両物体がこの過程で進む微小距離をそれぞれ $dr, -ds$ とすれば、 $dx = dr + ds$ である (§ 14, p. 4)。次に、両物体の速度を、それに対応する自由落下の高さ (物体をそこから自由落下させることで、考えている速度が獲得されるような高さ) v_h, u_h で表すとすれば、 $dr : ds = \sqrt{v_h} : \sqrt{u_h}$ の関係がある (§ 15, p. 4。混乱を避けるために添字 h を付した)。このように速度を対応する高さで表すというのは、初期のオイラーが頻繁に用いる手法である (現代的に言えば、実際の速度 v は重力加速度を g として $v = \sqrt{2gh}$ であるから、オイラーの「速度」 v_h は実際には v^2 に比例する量であることに注意)。

ここでばねの復元力を P とすれば、 $dv_h = -Pdr/m_A, du_h = -Pds/m_B$ となる (§ 12, pp. 3–4 および § 16, p. 5)。これは、強いて現代的に解釈すれば運動エネルギー ($\frac{1}{2}mv^2$) の変化が仕事 (力と変位の積) に等しいということであるが、やはり初期のオイラーがしばしば用いた関係であり、伊藤 (2006) はこれを「『高さ』による運動方程式」と呼んでいる。

二つの物体に関する「運動方程式」から

$$-m_A dv_h - m_B du_h = Pdr + Pds = Pdx.$$

これを積分すると

$$\text{const.} - m_A v_h - m_B u_h = \int Pdx.$$

初期条件として、衝突が始まる時 ($x = 0$) の「速度」を v_0, u_0 (オイラーの記号では a と b) とすれば、

$$m_A(v_0 - v_h) + m_B(u_0 - u_h) = \int Pdx.$$

この式は、 v_h などが実際には速度の 2 乗に相当することに注意すれば、合計の運動エネルギーの変化が相互作用によってなされた仕事に等しいことを表している (以上, § 16, p. 5)。

他方、「運動方程式」と先に得られていた関係式を組み合わせることで

$$m_A(\sqrt{v_0} - \sqrt{v_h}) + m_B(\sqrt{u_0} - \sqrt{u_h}) = 0.$$

これは重心運動の保存（運動量の保存）を表す関係である (§ 17, p. 5).

完全弾性衝突の場合には、ばねが完全に復元したところで衝突のプロセスが終わるという条件を適用する. 具体的には $x = 0$, $\int P dx = 0$ とし, 今しがた得られた二つの式にこれを用いると, 衝突後の物体の速度が得られる (§ 19, p. 6).

完全非弾性衝突の場合には, ばねの圧縮が最大になったところで相互作用が終わるものとする. これは $dx = 0$ という条件であり, このとき $v_h = u_h$ である. そこで, 重心運動の保存の式において $v_h = u_h$ とすれば, 衝突後の物体の速度 (両方とも等しい) が得られることになる (§ 20, p. 6).

参考文献

- Benvenuto, Edoardo. 1991. *An introduction to the history of structural mechanics*, 2 vols. New York: Springer-Verlag.
- Bernoulli, Johann. 1727/1742. *Discours sur les loix de la communication du mouvement [...]*. Paris: Claude Jombert (pub. 1727). Rep. dans *Recueil des pieces qui ont remporté les prix de l'Academie royale des sciences [...]*, t. 1. Paris: Gabriel Martin [et al.], 1752. / *Johannis Bernoulli, Opera omnia [...]*, t. 3, pp. 1-107. Lausannae et Genevae: Sumptibus Marci-Michaelis Bousquet et Sociorum. Rep. curavit J. E. Hofmann. Hildesheim: Georg Olms, 1968.
- Bertoloni Meli, Domenico. 2006. *Thinking with objects: The transformation of mechanics in the seventeenth century*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
- Blanc, Charles. 1968. Préface des volumes II 8 et II 9. *Leonhardi Euleri Opera omnia*, ser. 2, vol. 9, pp. VII-XXXIX. Basileae.
- Euler, Leonhard. 1730-1731/1965. De communicatione motus in collisione corporum. *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, tomus 5: ad annos 1730 et 1731* (pub. 1738), pp. 159-168. / *Leonhardi Euleri Opera omnia*, ser. 2, vol. 8, pp. 1-6. Turici.
- Fellmann, Emil Alfred (E. A. フェルマン). [1995] 2002 年. 『オイラー：その生涯と業績』山本敦之訳. 東京：シュプリンガー・フェアラーク東京. [原書：Leonhard Euler. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag.]
- Gravesande, Willem Jacob 's. 1720. *Physices elementa mathematica, experimentis confirmata [...]*. [Vol. 1.] Lugduni Batavorum: Apud Petrum Van der Aa et Bal-

- duinum Janssonium Van der Aa. / English trans.: *Mathematical elements of natural philosophy, confirmed by experiments [...]*. Translated into English by J. T. Desaguliers. London: printed for J. Senex, and W. Taylor, 1720. [同書の第5版(London: Printed for J. Senex, 1737)までは同一内容の再版と見られる.] / Another English trans.: *Mathematical elements of physicks, prov'd by experiments [...]*. Revis'd and corrected, by Dr. John Keill. London: printed for G. Strahan [et al.], 1720.
- . 1722/1774. Essai d'une Nouvelle Théorie sur le Choc des Corps. *Journal Littéraire, De l'année 1722* (pub. 1723), pp. 1–54. Rep. Geneve: Slatkine, 1968. / Essai d'une nouvelle théorie du Choc des Corps, *Oeuvres philosophiques et mathématiques de Mr. G. J. 's Gravesande*. Rassemblées et Publiées par Jean Nic. Seb. Allamand [...]. 1re Partie, pp. 217–247. Amsterdam: Marc Michel Rey, 1774.
- Guicciardini, Niccolò. 1999. *Reading the Principia: The debate on Newton's mathematical methods for natural philosophy from 1687 to 1736*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hankins, Thomas L. 1970. *Jean d'Alembert: Science and the Enlightenment*. Oxford: Clarendon Press.
- Lagrange, Joseph Louis (J・L・ラグランジュ). [1788] 2011年. 「『解析力学』(抄): 釣りあいと運動の一般公式」有賀暢迪訳. 『科学哲学科学史研究』第5号, 127–148頁. [原書: *Mécanique analytique*, Paris: Veuve Desaint. Rep. Paris: Jacques Gabay, 1989.]
- Maclaurin, Colin. 1724. Démonstration des loix du choc des corps. *Piece qui ont remporté le prix de l'Academie royale des sciences ; Proposé pour l'année mil sept cens vingt-quatre [...]*. Paris: Claude Jombert (pub. 1724). Rep. dans *Recueil des pieces qui ont remporté les prix de l'Academie royale des sciences [...]*, t. 1. Paris: Gabriel Martin [et al.], 1752.
- Maltese, Giulio. 2000. On the relativity of motion in Leonhard Euler's science. *Archive for History of Exact Sciences* 54: 319–348.
- Mazieres, Jean-Simon. 1726. Les loix du choc des corps à ressort parfait ou imparfait [...]. *Piece qui ont remporté le prix de l'Academie royale des sciences ; Proposé pour l'année mil sept cens vingt-six [...]*. Paris: Claude Jombert (pub. 1727). Rep. dans *Recueil des pieces qui ont remporté les prix de l'Academie royale des sciences [...]*, t. 1. Paris: Gabriel Martin [et al.], 1752.

- Scott, Wilson L. 1970. *The conflict between atomism and conservation theory, 1644-1860*. London: Macdonald & Co.; New York: Elsevier.
- Szabó, István. 1996. *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, hrsg. von Peter Zimmermann und Emil A. Fellmann. Korrigierter Nachdr. der 3. Aufl. Basel: Birkhäuser.
- Truesdell, C[lifford]. [1960] 1968. A program toward rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason, in idem., *Essays in the history of mechanics*, pp. 85-137. Berlin: Springer-Verlag. [Originally pub. in *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 1 (1960), pp. 3-36.]
- 有賀暢迪. 2009 年. 「活力論争とは何だったのか」『科学哲学科学史研究』第 3 号, 39-57 頁.
- 伊藤和行. 2006 年. 「オイラーの運動方程式」『科学哲学科学史研究』第 1 号, 153-169 頁.
- 武田裕紀. 2009 年. 『デカルトの運動論: 数学・自然学・形而上学』京都: 昭和堂.
- 中田良一 (Nakata, Ryoichi). 1994. Joseph Privat de Molières: Reconciler between Cartesianism and Newtonianism in collision theory. *Historia Scientiarum* 3: 201-213.
- 野澤聡. 2006 年. 「ヨハン・ベルヌーイの力学: 衝突法則からの再評価」『科学史研究』第 45 巻, 1-10 頁.
- 山本義隆. 1997 年. 『古典力学の形成: ニュートンからラグランジュへ』東京: 日本評論社.

