ライプニッツの無限小概念
――最近の議論を中心に――

池田 真治

1. 序

「無限小」―すなわちいかなる有限量よりも小さいが 0 とは異なる量―をめぐる問題は、歴史研究に限らず、現代の数学や哲学において今なお活発な議論の対象である。無限小を用いるニュートン、ライプニッツ流の微積分の基礎に見出された深刻な脆弱性は、19 世紀後半から 20 世紀初頭における解析の基礎づけの展開により、ワイエルシュトラス流の極限概念を基礎に据え無限小を追放するという形で一旦は解決された。しかし、1960 年代に A. ロビンソンが超準解析 (NSA: Non-Standard Analysis) によって実無限小を整合的な数学的概念として含む体系を構成する。以降も、J. L. ベルの「滑らかな」無限小解析 (SIA: Smooth Infinitesimal Analysis) など、無限小に関する議論は現在でも進展中である。

そうした議論の起源である微積分を発見した一人であるライプニッツは、無限小をどのように捉えたのであろうか。彼の無限小概念は、しばしばあいまいであると批判されてきた。彼の無限小概念を捉えるのを困難にしている原因は何であろうか。まず、考えられる第一の原因は、ライプニッツが微積分学に関して複数のアプローチを取っていることである（第 2 節）。第二の原因として、彼の哲学において無限小を位置づけることの複雑さがある（第 3 節）。このことから、無限小をめぐる数学と哲学の関係をどのように理解すればよいのかという問題が生じる（第 4 節）。加えて、ライプニッツの無限小概念との関連が指摘される現代の数学理論が複数ある (第 5 節)。本稿では、最近の議論を中心に、ライプニッツの無限小概念がその体系内で整合的に理解可能かどうかについて検討する。

2. 問題その一：数学的困難―ライプニッツの微積分における無限小の使用

ライプニッツの無限小概念を理解するのを難しくしている第一の要因として、彼が微積分においていくつかの方法を使い分けていることがある。まず、(1) 実際に無限小を用いて直接的に証明する方法がある。ベルヌーイ兄弟やド・ロピタルらを介しライプニッツ流の微積分として一般に理解されたのは、この系譜である。しかしそこに、0 ではないが指定可能ないかなる正の実数よりも小さい新しい種類の数として、無限小という神秘が入り込む。そうした無限小概念に対する批判を意識してか、ライプニッツは (2) 無限小概念そのものに直接訴えないで微分算を実行する方法を公表している。他方で、彼は無限小の方法を正当化するため、(3) 有限的かつ厳密な仕方で間接的に証明する方法および (4) 連続

律に基づき無限小を用いる方法を提示した (Bos, 1974)。(3) は、アルキメデスの取り尽し法[(1)] をより一般化したもので、無限小を用いない。(4) の連続律は (1) でなされる極限移行を保証するための原理であり、その証明は Bos (1974, §4.4) で再構成されている。

上で見た諸方法の関係を理解するため、以下では、(1) の無限小を用いる方法と (2) の無限小を用いない微分算を再構成してみたい[(2)]。((1) と (3) の関係は第 4 節で扱う)。

簡単のため放物線 $y = x^2$ で考える。まず、この曲線上の適当な点 $P(x,y)$ をとる。点 P から任意の長さの線分だけ離れた曲線上の点 $Q(x+dx, y+dy)$ を考える。PQ を通る直線の傾きは、dx を限りなく 0 に近づければ、求める点 P での接線の傾き m_P に近づく。しかし、PQ の傾きは $((y+dy)-y)/((x+dx)-x) = dy/dx$ なので、単純に $dx = 0$ とするわけにはいかない。そこで次のようなステップを踏む。Q は放物線上の点より、$y+dy = (x+dx)^2 = x^2 + 2xdx + (dx)^2$ が成り立つ。条件より $y = x^2$ なので、先の式を整理すると、$dy = 2xdx + (dx)^2$ となる。dx を 0 と異なる任意の有限差分としてとるならば、割り算を実行してよい。したがって、両辺を dx で割って、$\frac{dy}{dx} = 2x + dx$ が得られる。

他方で、dx として無限小をとる場合、それは「いかなる有限の量よりも小さいが 0 とは異なる量」であるから、$dx \neq 0$ である。したがって同様の操作が可能で同じ結果を得る。

問題は、最後の式で右辺に残った dx をどのように処理するかである。dx を無限小とすれば、それは 0 ではないが 0 に限りなく近い量であるから、$2x+dx$ は $2x$ に近似する。したがって、$2x+dx \approx 2x$。(ここで、dx を限りなく 0 に近づける、という極限移行が前提されていよう)。それに対し方法 (2) では、以下に見るように dx が 0 を含意しうるものと考える。Leibniz(1684) では微分化の規則を証明なしに与えており、微分の定義は無限小に触れないものであった。その意図は、無限小に関する論争を避けることにあろう (Bos, 1974, §4.9)。彼は後のテクストでも無限小の代わりに、「比較不可能なほど小さい」(incomparablement petit) という用語を頻繁に用いる。dx は、ライプニッツの言葉によれば、他の量と比較して無限に小さい、あるいは比較不可能なほど小さい。ライプニッツは、任意の微分に対し、それより高階の微分は「比較不可能なほど小である」とする。例えば、dx は x に対して比較不可能なほど小さいし、ddx は dx に対して比較不可能なほど小さい。したがってこの場合 dx は無視できる量であり、$dx = 0$ としてもよいとライプニッツは考えた。こうして、1695 年のニーウェンテイト宛の手紙で述べられているように、「その差が完全に 0 であるだけでなく、ある比較不可能なほど小さいときも、それらの項は等しい」、としてライプニッツは「=」の概念を比較不可能な量を含むものにまで拡大する (GM V, 322)。すなわち、$2x+dx = 2x$。よって、求める傾きは $2x$ となる。

以上見たように、ライプニッツの無限小概念の理解を困難にしている原因の一つに、ラ

イプニッツの無限小の使用に関する不徹底な態度がある。とりわけ、無限小量を 0 でない（$dx \neq 0$ として dx で割っている）としつつ、実質的に 0 である（$dx = 0$ として無視できる量としている）ともしていることに批判の原因があろう。ライプニッツの微積分には極限概念の萌芽が見られることがしばしば指摘されるが、彼はそれを微積分の基礎として徹底しなかった。たとえばクーラントらは、その時代の哲学的態度や人間本性、知的伝統が、ライプニッツに極限を基礎とすることを許容しなかったとする (Courant & Robbins(1996))。しかし、あいまいな無限小量の概念をなぜ放棄しなかったのかに関する、ライプニッツ固有の理由が存在する。第 4 節の議論を先取りすると、ライプニッツはこれらの方法が互いに置換可能であり表現において異なるにすぎないと考える。しかし、そのことは必ずしも明晰な仕方で提示されなかったため、第 3 節で見るような解釈上の対立を引き起こした。

3. 問題その二：哲学的困難—無限小をめぐる諸解釈とその争点

ライプニッツの無限小をめぐる第二の困難は、哲学における無限小の位置づけである。まず、ライプニッツの無限小に関するロビンソンの実無限小解釈 (Robinson, 1996) と石黒の有限主義的解釈 (石黒, 2003) を対比する。次に、最近の議論としてアーサーの解釈を紹介し、ライプニッツの哲学における無限小の存在身分について検討する。

3.1. ロビンソンの実無限小解釈と石黒の有限主義的解釈

A. ロビンソンは 1960 年代に、その超準解析によって実無限小を数学的に厳密な概念として復興した (Robinson, 1996)。通常の実数体 $\mathbb{R}$ はアルキメデス性を充たす、あるいは「アルキメデスの公理」とコーシーの収束条件を前提して構成される。アルキメデスの公理とは、「任意の正の実数 a,b に対して、$n \cdot a > b$ を満たすある自然数 n が存在する」という公理である。実数順序体が「アルキメデス的」とは、任意の正実数 $a,b \in \mathbb{R}$ に対し、ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在して、$a + a + \cdots + a(n$ 個$) > b$ となることである（n が対象言語ではなくメタのレベルでの自然数を意味することに注意)。「非アルキメデス的」とは、アルキメデス的でないことである。彼は現代論理学の形式的道具立てに基づき、非アルキメデス的順序体である、実数の超準モデル R^* を構成した(3)。すなわち R^* では、非アルキメデス的な対象であり、「いかなる正の実数よりも小さい数」としての無限小(4)の存在に関する言明が成立する。ロビンソンは、この体系により、無限小を用いるライプニッツ流の微積分が完全に正当化されたと考えた (Robinson, 1996, ch.I)。それは極限の観点からではなく、無限小の観点から解析の根本的概念を定義することを可能にするものであった。

しかし、石黒はロビンソンを次のように批判する。「［ロビンソンが］ライプニッツにとって無限小とは、それを指示しないですむことができる観念的な虚構と看做したからに

せよ、それを非アルキメデス的大きさを持つ定数で、その導入によって証明が簡潔にされるものであった、と信じているのは妥当ではない」(石黒, 2003, 97 頁)。（ここで「証明」という言葉が用いられているが、より厳密には「発見法」と言うべきであろう[(5)]）。

石黒解釈によれば、無限小は虚構でしかなく、「無限大とか無限小は、いくらでも大きくあるいは小さくすることのできるような大きさのことしか意味しない」(GP VI, 90) という『弁神論』での表明からも明らかなように、ライプニッツはロビンソンの先駆者というよりもコーシーあるいはヒルベルト流の有限的定義の先駆者である。

このように、石黒はライプニッツの無限小概念を有限主義的に捉え、コーシーの無限小の定義との類似性を指摘する。それによれば、コーシーの定義は確かに極限をより明確に定式化したが、ライプニッツの定義との間に根本的な相違はない。たとえばコーシーは『微分積分学要論』で無限小を次のように定義する。「一つの変数の絶対値が、限りなく減少し、どのような値を与えても、それよりも小さくなる、というときには、この変数は「無限小」であるとか、限りなく小さい量であるとか名づけられているものになる。この種の変数はゼロを極限値としている」。この定義によれば、無限小は「極限としてゼロを取る変量」である。すなわち、コーシーは極限として再定義することで無限小を受容した。

石黒解釈で注目すべきもう一点は、無限小は（収束という）規則（を指示するの）であって、何か特別な大きさを指示するのではないとしていることである。またそれは何か独自な存在を指示する言葉ではなく、共義的 (syncategorematic) な概念であって、その言葉が使われる命題の中で定義されるものだ。したがってライプニッツにおいて、無限小は（フレーゲの意味で）文脈的に定義されるのであり、指示対象が特定されずに導入されているという批判 (Kitcher, 1981) は該当しない。石黒によれば、ライプニッツの虚構としての無限小の共義的解釈は、有限主義的な整合的理論であるとともに彼の哲学においてよく動機づけられており、基礎に対する批判から彼の微積分を救うものである。

だが、ライプニッツが非アルキメデス的量として無限小を指示している箇所が実際にある。たとえば、ライプニッツは 1695 年のニーウェンテイト宛の手紙で、比較不可能な差分をアルキメデスの公理を満たさない量と考えた (GM V, 322)。ここで「比較不可能」(incomparable) とは次のことを指す。「[…] その差が比較不可能である量は等しいと私は考えます。私が比較不可能な大きさとして呼んでいるのは、その一方がいかなる有限数によって乗じられても、他方を越えることがない大きさのことです」(ド・ロピタル宛書簡, 1695.6.14-24, GM I, 288)。少なくともこの箇所では、比較不可能な量＝非アルキメデス的量＝無限小量である。（ロビンソンもこの箇所を引用している (Robinson, 1996, ch.XII)）。

しかし、有限主義的解釈がそのことから直ちに拒否されるわけではない。ロビンソンも

理解していたように、ライプニッツは一方で実無限小を発見のための有用な虚構として用いながら、他方で無限小の有限主義的解釈もとる。このことは果たして整合的に理解されうるのだろうか。

3.2. アーサーの解釈および無限小の存在身分について

歴史的な観点から見れば、ライプニッツは非アルキメデス性を認める実無限小から有限主義的解釈へ向かった。たとえばアーサーは、初期ライプニッツにおける無限小の解釈を次のように整理する。「(1) (1669 年) 連続体は指定不可能なギャップによって分離された、指定可能な点から構成される。(2) (1670-1 年) 連続体は無限数の不可分な点から、あるいはいかなる指定可能なものよりも小さな部分から、それらの間にいかなるギャップもなしに構成される。(3) (1672-75 年) ある連続的な線は、点からではなく無限に多くの無限小の線から構成される。その各々は分割可能であり、かつある瞬間において生成している運動（コナートゥス）に対して比例的である。(4) (1676 年-) 無限小は虚構的対象であり、数学的推論を縮約するいわば「縮約語法」(*compendia loquendi*) として用いられる。それらは、結果の誤差が任意の前もって指定された誤差よりも小さいという仕方で、任意の小ささとしてとられた有限量の観点から正当化できる」(Arthur, forthcoming)。

このように、ライプニッツは、当初こそ無限小の存在を連続体のうちに現実的に存在する非アルキメデス的な対象とみなしていたが、少なくとも 1676 年までに、虚構としての無限小、および無限小の有限主義的解釈を展開した。たとえば、『無限数について』(1676) では、無限小は虚構とされ、連続体においては全体が部分に先立つことが主張される (LC, 88, 96)。これらの主張は、後期の現実的なものと観念的なものという存在身分の区別へとつながる。またライプニッツは無限小だけでなく想像力が関わる点で連続体や点・角度も同様に虚構であるとするが、それでも幾何学は真なる実在を確立すると考える。「たとえこうした対象が虚構的であっても幾何学は真なる実在を確立する、それはそれらなしに他の仕方でも表現されうる。しかし、こうした虚構的対象は、表現にとって非常に優れた縮約であり、この理由によって極めて有用である」(LC, 89-91)。われわれの精神はその角の個数がある法則にしたがって増加するような正多角形から究極的な多角形すなわち完全な円を想像しうる (A VI-3, 498 = LC, 89)。そして、完全な円も虚構的対象 (Ens fictitium) でありその像は虚偽であるが、それでもそのうちに含まれる対象は真であり、精神のうちには完全な円が存在する、あるいはむしろ実在的な像 (imago realis) があるとまで言われる。

ここで、ライプニッツにおいて真理と実在がしばしば混同されていることを注意しておく。それは、ライプニッツが用いる実在性概念が、現実に存在するものの領域に限定されず、論理的に可能な概念をも範疇に含む、より広範な概念であることに関わる。「［テオ

フィル：］観念はまた、現実存在するものがそれに全く対応していなくても、可能であれば実在的でしょう」(GP V, 245 = NE II, ch.30, §1)。実在的観念に対比される不可能な観念、つまり矛盾を含む観念は、空想的観念と呼ばれる。ライプニッツにおける実在的概念とは、当の概念がアポステリオリに検証されるものか、その可能性の証明がアプリオリに為されるものであるか、あるいはそれらの混合によってなるものであるかの場合を言う(6)。なお、ここでの「証明」とは、原初的概念あるいは自同命題への還元を意味する。

このように、ライプニッツの無限小概念を理解するには、彼の認識論や形而上学、とりわけ数学的抽象概念の構成における精神や想像力のはたらきに関する見解を分析する必要があろう。彼が無限小を虚構とみなした第一の理由は、それが指定不可能、つまり直接的かつ有限的に指示が与えられえないものだからである。無限小のような極めて微小な間隔が、実際に構成されるわけではなく、また知覚されるわけでもない。そのような対象は、想像力を介して、われわれの精神の内にのみ表れる。ライプニッツは、『無限数について』において、感覚される像は不規則 であるが、われわれは精神によって、それらに一様性や規則性をあてはめ、そのようにして完全な円という実在的な像を得ると述べている。こうした規則の実在性は、究極的には神の精神に基礎を持つ (GP V, 246 = NE II, ch.30, §4)。注目したいのは、無限小が虚構的だが実在的でもあるのは、それらが想像される際、精神に基づけられた法則ないし規則にしたがっていることによるという彼の洞察である。

4. 問題その三：数学と哲学のあいだ―無限小の本性の問題

ライプニッツは少なくとも 1676 年までに虚構としての無限小という解釈を提示した。この無限小に関する存在論的主張は、無限小概念に基づく微積分の基礎に直接影響しない。しかし、これらの主張のあいだには当然関係があろう。そこで以下では、1676 年に書かれた『円・楕円および双曲線の算術的求積』(以下『算術的求積』と呼ぶ) をもとに、数学的結果とその哲学的主張とのあいだの関係を分析してみたい。

第 3 節で見たように、ライプニッツは有限主義的な解釈と実無限小解釈という相対立する解釈を自身の無限小に許容していた。しかし、そのことはいかにして可能なのであろうか。それは、ライプニッツが無限小の方法と有限的な方法の同値を主張していることから整合的に理解できる。パルマンティエによれば、ライプニッツは『算術的求積』において、「不可分者の方法(7)」をより厳密な論証へと改訂し、背理法に基づく求積の間接的方法と無限小を用いる直接的方法とが互いに同値になることを示した (Parmentier, 2001)。

ライプニッツが『算術的求積』で不可分者の方法として用いたのは、「何らかの与えられた差よりも差が小となるようにとる」という有限な手続きに他ならず、最終的には帰謬法

で帰結を正当化する手続きで、アルキメデスの取り尽し法をより一般化したものである。

ライプニッツが優れているのは、カヴァリエリやウォリスらよりも一層の厳密化・一般化をしたことにある (cf. 林, 2003, §2.1.3)。ライプニッツはそれまでになされてきた直観的証明に代わり、記号法を重視する観点から証明の厳密性を追究した。また彼はデカルトが築いた代数幾何学の手法の限界をいち早く見極め、「通常の量にも、超越量にも適用されるはるかに普遍的な技巧を考案した」(Leibniz, 1714-)。『算術的求積』では、楕円や双曲線に加え、対数曲線や指数曲線に対する求積の方法も与えられている。ライプニッツはこの方法と相似関係を利用することで変換定理（＝無限小三角形の和の計算を無限小長方形の和の計算に変換する式）をホイヘンス宛の書簡 (1674.10) で示している（変換定理については佐々木 (2005) が明快）。対して無限小の方法では、帰謬法のステップを省き、無限小を用いることで求める極限への直接的な移行を認める。しかしそのようなステップは、いつでも間接的な論証へと変換できる。このようなライプニッツの方法が、一もちろん現代の極限概念に見られる形式論理学的定義に至ったわけではないが一現代的な極限の方法を予期させると言われるのも、微積分の計算を有限の手続きと捉えているからである。

こうしてライプニッツは、有限量しか認めないギリシャ以来の伝統的な言語と無限小を用いた言語とが、結果の正確性と厳密性に関して、方法論的に同値である、すなわち一方の方法で得られた結果をいつでも他方の方法で再構成できる、とする。数学的に正当化されていない無限小概念も、この同値の観点から彼はその使用を次のように正当化する。

> 「無限や無限に小さい量が自然的な量であるかないかは問題ではない。そうした量が定式化や思考において、また論証におけるのと同様発見においてある利便性を与えるならば、ある虚構を通じてそれらが導入されるというだけで十分だからである。それは、内接図形や外接図形の使用、および帰謬法による推論とある誤差はあらゆる指定可能な誤差よりも小さいという論証を不要にする」(Leibniz, 2004, prop.XXIII, scolie, pp.182-185)。

すなわち、無限小の方法は思考や論証にとって便利であり、それと置換可能なアルキメデスの方法に取って代わるものだと主張される。その主張は後期においても維持される。「無限あるいは無限小の代わりに、誤差が与えられた誤差よりも小さくなるように、量を必要なだけ大きくあるいは小さくとることができます。したがってそれ［無限や無限小］は、アルキメデスのスタイルと表現においてしか異ならず、われわれの方法においてより直接的であり、発見の術 (l’art d’inventer) により適合しているのです (1701, GM V, 350)」。この引用から明らかなように、ライプニッツは無限小を発見にとって便利な概念と捉えて

いる。ライプニッツは無限小の方法の発見法 (*ars inveniendi*) としての側面を最も重視したのである。H. シナサーによれば、ロビンソンもまた、ライプニッツの *ars inveniendi* の観念を引き合いに出して、自らの超準解析が発見法として古典的な解析よりもすぐれた側面を持つことを強調している (Sinaceur, 1999, pp.380-382)。ライプニッツはすでに前期の段階で基礎づけの問題を考えていたが、実践的な無限小の方法を先に公表し基礎づけに関する主張を控えたのも、この発見法重視の観点から理解されよう。

ところでライプニッツは、無限や無限小を「虚構的量」として言及していた。しかしパルマンティエによれば、「それらが虚構にしか過ぎないということを肯定することが問題なのではなく、たとえそれらが虚構にしか過ぎないとしても、そのことはそれらの使用を何ら変えないということを言っているのである」(Parmentier, 2001, p. 285)。つまり、無限小はその存在論的問題とは無関係に数学内部で整合的に使用されうる。

しかし、そうだとしても、ライプニッツの体系における無限小の認識論的・形而上学的な位置づけの問題は依然として残る。たとえば G. M. ロスは、「ライプニッツの形而上学において実無限小は存在するか」、という問いに対し、否定的な回答を与える (Ross, 1990)。たしかに、モナドを微積分における実無限小として解釈したい誘惑がある。しかし、ライプニッツは無限小の実在を明確に拒否する。実際、ライプニッツは実無限小の論理的整合性を主張することはできず、記号操作のレベルにおいて有用であるが、虚構的な概念とみなす。ライプニッツにおいて、少なくとも論理的に可能であることを示せなければ、その概念の実在性を主張できない。決定的なのは、彼が数学や自然学の諸概念が属す現象界と、モナドが属す叡智界とのあいだの存在論的次元の区別を後期形而上学の基礎に据えていることである (GP II, 379)。したがって、ロスが分析するように、数学的概念である無限小をモナドとみなすことは、カテゴリーミステイクとなり不可能である。

ではライプニッツの無限小解析の哲学的基礎をどのように考えたらよいのか。パルマンティエは、そのテーゼがライプニッツの数学的な結果に基づいているだけでなく、認識論的および哲学的な条件も含んでいることを示唆する。それは級数の法則の判読可能性について述べた次の箇所に読み取れよう。「ある級数の本性は、それが無限級数であろうと、見抜くことはできる。[…] 一度それを見抜いてしまえば、級数を続けるのは無用であり、そのたびごとに知的な解明を与えることが問題なのであって、機械的な操作を完了することが問題なのではない」(Leibniz, 2004, prop.XXXI, scolie, p. 218f.)。同様の指摘は、同時期の『無限数について』(1676) にも見られる。「ある無限級数が総和を持つと言うとき、そこで言われているのは、同じ規則を持つ任意の有限級数がある総和を持つということである、そして数列が増加するにつれて、誤差は常になくなるのであり、したがって誤差は

われわれが望むだけ小さくなる」(A VI-3, 503 = LC, 99)。

アーサーも指摘するように、この箇所は現代の収束無限級数の定義を予期させるものだ。そうした無限級数の具体例として、ライプニッツの公式 ($\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$) があげられよう。重要なのは、前段落の引用で、たとえその無限級数が完了されえなくても、その級数の本性すなわちその級数を支配している規則を見抜けば、その等しさが厳密であることを主張できる、としていることである。この見解は、石黒解釈においてすでに指摘されていたように、ライプニッツに規則として無限小を再定義することを許すであろう。パルマンティエは、微分計算において欠けている成果は dx という新しい記法だけであり、この論稿で展開された微分計算は、19 世紀に展開された解析の可能な正当化の一つを予期させるものであると考えている。しかし、周知のように、微積分の基礎に関するライプニッツの考察が解析の歴史において注意を払われることはなかった。

5. 問題その四：現代数学との関連

ライプニッツの無限小概念は現代数学との関連においても解釈が分かれる。ライプニッツの無限小を数学的に整合的な概念として現代に復興した体系として、ロビンソンの超準解析 (NSA) がよく挙げられるが、最近では他の候補も考えられている。例えばアーサーは、ベルの「滑らかな無限小解析」(SIA) がよりライプニッツの考えに即すと考える (Arthur, forthcoming)。またラヴァインは、ライプニッツの無限小を無際限小量として解釈することから、ミチェルスキーの「実無限なき解析」の体系を候補に挙げる (Lavine, 1994; Mycielski, 1981)。それらの数学的内容を踏まえた上での検討は別稿を期し、本節ではベルの SIA がどの点でライプニッツの考えに近いとされるのかを確認する。

ロビンソンの NSA では実数体の超準モデルを考えることによって数学的対象としての無限小を保証したが、ベルの SIA ではカテゴリー論を基礎として無限小（すなわち 2 乗すると 0 になるが 0 であることを必ずしも含意しない微小な量）に関する厳密な公理的理論が展開される。そこでは、極限概念によらずに、無限小の伝統的な概念によって微積分学ならびに微分幾何を完全に厳密な仕方で展開できる。（なおベルによれば、SIA にはアルキメデス性を充たすモデルもあれば、非アルキメデス性を充たすモデルもある）。

SIA のモデルでは、「滑らかな[(8)]」世界 $\mathbb{S}$ という、実直線や連続曲線、ユークリッド空間など通常の幾何学的対象を含む世界を考える。ポイントは、$\mathbb{S}$ に属す幾何学的対象の間のあらゆる写像 (map) が連続であるということだ。「SIA ではあらゆる函数は連続なので、それは「自然は飛躍せず」(*Natura non facit saltus*) というライプニッツの連続律を直接的な仕方で具現している」(Bell, 2005)。つまり $\mathbb{S}$ では無限小はあくまで微小な線分であっ

て点ではない。このことは、ライプニッツの連続律と無限小概念を的確に反映しているものとみなせよう (cf. Bell, 1998, p. 9)。

しかしながら、その滑らかな世界 $\mathbb{S}$ においては排中律が一般的に成り立たないことが知られている (Bell, 1998, p. 5)。インフォーマルには、排中律の普遍的な認容が非連続函数の構成を許容することから理解できよう。たとえば、任意の $x \in \mathbb{R}$ について

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とすると、$f(x)$ は $\mathbb{R}$ から $\{1,0\}$ への非連続函数である。この函数は任意の実数 x に対して $x = 0 \vee x \neq 0$ という排中律を前提することにより構成されている。しかし、$\mathbb{S}$ はそもそも連続函数しか含まいので、排中律を一般的に認めることはできないはずである (*ibid*.)。（ブラウワーの）直観主義数学においても連続函数しか存在しないのと、同様の理由である。「簡潔に言えば、普遍的な連続性は排中律が成り立たないことを含意する」(Bell, 2005)。厳密には、ベルの SIA の体系の中では、無限小が 0 であるか 0 でないかのいずれかだということが言えないという形で、排中律の無限小への適用が成り立たない (*ibid*.)。

他方で、排中律はライプニッツの論理数学思想において基礎的な位置を占めるため、これを除外することはできそうもない。そこでは排中律は、命題の真偽の決定可能性にとどまらず、すべての命題は自同命題か矛盾命題に還元されるという証明論的な決定可能性をも含む形で想定されている。よって、SIA が文字通りライプニッツの思想を反映しているとはみなせない。むしろ、普遍的な連続性の仮定は排中律と論理的に矛盾するというベルの指摘が正しいとするならば、ライプニッツに体系的な不整合があることになる。

ライプニッツの数理哲学における核心的な主張として、(a) 点は連続体の部分ではない、(b) 点の合成によって連続体を構成しえない、(c) 連続体はいかなる間隙も含まない、(d) 連続体は無際限に分割可能である、などが挙げられる。無論、候補となりうる主張は他にも多数ある。たとえばブレガーであれば、ライプニッツの数理思想には連続函数しか存在しないことを付加するだろう (Breger, 1992)。これらの基本的主張が、ライプニッツの無限小概念の諸解釈と整合的になりうるかについては、まだまだ検討の余地がある。

6. 結び

ライプニッツは無限小を非アルキメデス的な量として定義し実際にそれを微積分で用いる一方で、アルキメデスあるいはコーシー流の有限的な方法をその正当化として考えていた。このために、ライプニッツは無限小に関してあいまいであると批判され、また相対立する解釈を引き起こした。しかしそうした方法論的多元性は、発見法を重視する観点、お

よび、有限主義的な方法と無限小の方法が互いに同値であるとするライプニッツの立場から整合的に理解されうる。ライプニッツの無限小概念は、現代の数学において今なお影響力を持っている。300 年以上も前のライプニッツの微積分学への興味が現代でも失われないのは、それがはらむ数学上および哲学上の諸問題の豊かさに存するのであり、そうした多産性をこそわれわれは評価すべきなのであろう。

註

(1)「取り尽し法」(method of exhaustion) とは、エウドクソスに由来しアルキメデスが頻繁に用いた古代ギリシャにおける面積計算の手法である。図形の面積を、内接する多角形によって「取り尽す」ことによって求めることに由来する。たとえば、円の求積は内接する正多角形の角を増加し、それらの面積の級数を考え、近似的に計算される。しかし、無限を排するギリシャの数学では極限は取れないため、内接する多角形と外接する多角形を考え（二重）帰謬法で示した (Baron, 1969, pp. 34-46 および Edwards, 1979, pp. 16-19 参照)。

(2) Hahn(1998)、林 (2003)、Katz(1998) を参考に筆者が再構成を試みたものであり、ライプニッツが本論の通りに議論しているわけではない。この再構成はすべて筆者の責任である。

(3) アルキメデスの公理が、「任意の正の実数 a, b に対し、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在し、$R^* \models \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n} > b$」…(∗) のように解釈されるならば、その公理は R^* では満たされない。なぜなら、n は通常の自然数で有限のため、a, b の取り方によっては (∗) の主張を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在するとは限らないからである。たとえば、R^* では a の解釈として 1、b の解釈として無限大自然数 N がとれる。あるいは、a の解釈として無限小 $1/N$、b の解釈として 1 がとれる。このとき、ある正実数 $a, b \in |R^*|$ が存在して、任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ にたいし $a + \cdots + a$ (n 個) $\leq b$ が成り立つ。したがって、R^* は非アルキメデス的である (Robinson(1965, 1996) および田中 (2002) 参照)。

(4) $a \in |R^*|$ が「無限小」なのは、すべての $m \in |R^+|$ に対して $|a| < m$ が成り立つときである。定義より 0 も無限小。

(5) この指摘をしていただいた林晋教授にこの場を借りて感謝申し上げる。

(6) ライプニッツにおける観念や認識の分類に関しては、『認識・真理および観念についての省察』(1684)(G IV, 422-426)、『形而上学叙説』(1686), §24 および『実在的現象を想像的現象から区別する仕方について』(1690?)(GP VII, 319-322) を参照。

(7)「不可分者の方法」は、ガリレオの弟子カヴァリエリに由来する。彼は『ある新しい方法で推進された、連続体の不可分者による幾何学』(1635) で、線の究極的部分、すなわち不可分者は点であり、同様に面の不可分者は線である、また逆に、点の全体は線、線の全体は面をつくる、と考えた。しかし歴史的に不可分者の方法として流通したのは、カヴァリエリのオリジナルの方法ではなく、トリチェリやウォリス、ロベルヴァル、そしてパスカルらによって改訂された「無限小の方法」である。それは、古代の取り尽し法と、古代では認められなかった無限小の概念が融合したものである。ライプニッツが不可分者の方法を取り尽し法と混同したという批判（Hofmann, 1974, p.7）もこの路線で理解する必要がある。なぜなら、ライプニッツは「不可分者の方法が古代の取り尽し法と語り方においてしか異ならない」というパスカルの主張をそのまま借用しているからである (Andersen(1985) および高橋 (2005) 参照)。

(8) 各々微分構造を有する 2 つの数学的対象の間の写像が「滑らか」(smooth) なのは、その写像が無限回微分可能であるときである。

文献

Leibniz, G.W.（ライプニッツの著作に関しては慣例に従い引用は (略号 巻, ページ数) の形で示す).
A…*Sömtliche Schriften und Briefe*, Deutche Akademie der Wissenschaften (Ed.), Akademie-Verlag, 1923-.

GP…*Die Philosophische Schriften von G.W. Leibniz*, C.I. Gerhardt (Ed.), Bd.I-VII, 1875-90.
GM…*G.W. Leibniz Mathematische Schriften*, C.I. Gerhardt (Ed.), Halle, Bd.I-VII, 1843-63.
LC…*The Labyrinth of the Continuum: Writings on the Continuum Problem, 1672-1686*, R. T. W. Arthur (Trans., Ed., and Intro.), Yale U. P. 2001.
――― (1676). *Numeri Infiniti*（＝『無限数について』），A VI-3, 496-504 = LC, 82-101.
――― (1684). *Nova methodus pro maximis et minimis*, GM V, 220-226.
――― (1714-). *Historia et origo calculi differentialis*, GM V, 392-410.
――― (2004). *Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole*（＝『算術的求積』），Introduction, traduction et notes de M. Parmentier, Texte latin édité par E. Knobloch, J.Vrin.
――― (1988-99).『ライプニッツ著作集』，全 10 巻，下村寅太郎ほか監修，工作舎.
Andersen, K. (1985). 'Cavalieri's Method of indivisibles.' *Archive for the History of Exact Sciences, 31*, 291-367.
Arthur, R. T. W. (forthcoming). 'From Actuals To Fictions: Four Phases in Leibniz's Early Thought on Infinitesimals,' in a special issue of *Studia Leibnitiana*, Kulstad & Laerke (Eds.).
Baron, M. E. (1969). *The Origin of the Infinitesimal Calculus*, Pergamon Press.
Bell, J. L. (1998). *A Primer of Infinitesimal Analysis*, Cambridge U.P.
――― (2005). 'Continuity and Infinitesimals,' in Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL=⟨http://plato.stanford.edu/archives/fall2005/entries/continuity/⟩.
Bos, H. J. M. (1974). 'Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus,' *Archive for the History of Exact Sciences, 14*, 1-90.
Breger, H.(1992). 'Le continu chez Leibniz,' in Salanskis & Sinaceur (Eds.), *Le labyrinthe du continu*, pp. 76-84, Springer-Verlag.
Courant, R. & Robbins, H. (1996). Rev. by Stewart, I., *What is Mathematics?*, 2nd Ed., Oxford U.P. (2001,『数学とは何か』，I. スチュアート改訂，岩波書店.)
Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*, Springer.
Hahn, A. J. (1998). *Basic Calculus*, Springer-Verlag NewYork, Inc. (2001, 市村宗武監訳，狩野覚・狩野秀子訳,『解析入門 part1 アルキメデスからニュートンへ』，シュプリンガー・フェアラーク東京.)
林知宏 (2003).『ライプニッツ―普遍数学の夢』佐々木力編，コレクション数学史 2，東京大学出版会.
Hofmann, J. E. (1974). *Leibniz in Paris (1672-1676)*, Cambridge U.P.
石黒ひで (2003).「ライプニッツの無限小概念」,『ライプニッツの哲学―論理と言語を中心に』，増補改訂版，岩波書店.
Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics : An Introduction*, 2nd Ed., Pearson Education, Inc. (2005, 中根美知代ほか翻訳,『数学の歴史』，共立出版.)
Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford U.P.
Lavine, S. (1994). *Understanding the Infinite*, Harvard U.P.
Mycielski, J. (1981). 'Analysis without actual infinity,' *Journal of Symbolic Logic, 46*: 625-633.
Parmentier, M. (2001). 'Démonstration et infiniment petits dans la *Quadratura arithmetica* de Leibniz,' *Revue d'histoire des sciences, 54-3*, 275-289.
Robinson, A. (1965). 'The Metaphysics of the Calculus,' Keisler, Körner, Luxemburg, & Young (Eds.), *Selected Papers of Abraham Robinson*, Vol.2 Nonstandard Mathematics and his Philosophy, , pp. 62-87, Yale U.P.
――― (1996). *Non-Standard Analysis*, Rev. Ed., (1st ed., Amsterdam: 1966), Prinston U.P.
Ross, G. M. (1990). 'Are there real infinitesimals in Leibniz's metaphysics?' in Lamarra (Ed.), *L'infinito in Leibniz: Problemi e terminologia*, Edizioni dell'Ateneo.
佐々木力 (2005).『数学史入門―微分積分学の成立』，筑摩書房.
Sinaceur, H. (1999). *Corps et Modèles*, 2e édition corrigée, J.Vrin.
高橋秀裕 (2005).「無限小の概念史―不可分者から無限小へ」,『数理科学』，2005 年 11 月号，*509*, 11-16.
田中一之 (2002).『数の体系と超準モデル』，裳華房.