武蔵高等学校中学校紀要4：125-145（2020）

2018 年度中 3 幾何 授業実践報告

友利　将吾
（数学科）
tomori.shogo@musashi.ed.jp

要　旨

この報告書は 2018 年度の中 3 幾何の授業において，特に立体幾何に関する授業の実践報告である。故・秋山武太郎氏の著書『わかる立体幾何学』を基に，通常の教科書では天下り的に紹介される立体幾何の内容に，なるべく証明をつけて説明した。また，立体の体積を求めるにあたり，カヴァリエリの原理を認め，それに基づいて多面体，曲面体など，様々な立体の体積を求めた。

Keywords: 立体幾何，数学 A，平面の決定条件，三垂線の定理，多面体，
オイラーの多面体定理，カヴァリエリの原理，体積，曲面体，球

はじめに

本校では中学の各学年で週 2 時間ずつ幾何の授業が行われている。それは一般的な中学の教科書にあるような表面的な内容ではなく，ユークリッドの『原論』をベースとした独自の教科書を用い，中学生には難解とも思える内容を含むものである。その教科書では平面幾何を扱うが，その内容は中 3 の 1 学期で終了する。その後は教科書で扱わなかった平面幾何の内容に関する授業を行い，2 学期中ごろから立体幾何に関する授業が行われる。

この報告書は，筆者が 2018 年度に行った立体幾何の授業に関するものである。本校の教員でもあった故・秋山武太郎氏の著書『わかる立体幾何学』（2012 年，以下「秋山」とする）を基にして，本校の平面幾何の教科書と同じくらいの厳密性を維持して授業を行った。授業の進め方は，途中までは東京書籍 数学 A Advanced (数 A317)の内容に沿って進めたが，授業の都合上，順序を入れ替えたところが多々ある。また，途中からは正多面体以外の立体（角柱，角錐，回転体等）を定義し，カヴァリエリの原理に基づいてその体積を求めた。

この報告書を書こうと思った動機は主に以下に挙げる 2 点である。一つには，本校教員

は学校（学園）から毎年必要な教員に対して研究費が支給されており，教材研究に対する報告を行うことは研究費を受けたものとして数年に 1 回程度はするべきであると考えたことと，もう一つには自分自身の備忘録のためである。

なお，この内容の一部には第 101 回全国算数・数学教育研究（沖縄）大会において発表したものも含まれる。

１． 授業内容

1-1. 授業時間

2 学期の途中，10 月の初めから，3 学期の中頃，1 月下旬頃までの 23 時間を立体幾何の授業に充てた。蛇足だが，9 月は作図を行い，3 学期の途中からは三角比（鋭角）の授業を行った。

1-2. 扱った内容（授業案）

ア　平面の定義(1 時間目/23 時間のうち)
イ　平面と直線の位置関係(1/23)
ウ　平面の 2 つの側（2 点と平面の位置関係）(1/23)
エ　平面の決定条件(2/23)
オ　2 平面の位置関係(3/23)
カ　2 直線の位置関係(3/23)
キ　2 直線のなす角(4/23)
ク　2 平面のなす角(5/23)
ケ　直線と平面が垂直であることの定義(5/23)
コ　三垂線の定理(6/23)
（2 学期中間試験）
サ　正多面体の定義(7/23)
シ　正多面体が 5 種類しかないことの証明 I (7/23)
ス　オイラーの多面体定理(8/23)
セ　正多面体が 5 種類しかないことの証明 II（オイラーの多面体定理を用いる）(8/23)
ソ　正多面体を実際に作る(9/23)
タ　双対な正多面体の定義(10/23)
チ　角柱と平行六面体の定義(10/23)
ツ　平行六面体の辺と対角線の関係(11/23)
テ　角錐の定義(12/23)
ト　カヴァリエリの原理について(12/23)
ナ　角錐の体積をカヴァリエリの原理を用いて求める(13/23)
ニ　正多面体の体積，表面積を求める(14/23)
ヌ　正多面体を切ってできた立体の体積，表面積を求める(15, 16/23)
ネ　立体の合同，相似，相似比について(17/23)
（2 学期期末試験）
ノ　曲面体，回転体，直円柱，直円錐の定義(18/23)
ハ　直円柱の体積と表面積の復習(18/23)
ヒ　扇形の定義とその面積を求める(18/23)

フ　直円錐の体積と表面積を求める(19/23)
へ　正円錐台の定義とその体積，表面積を求める(20/23)
ホ　一般の円柱，円錐の定義(21/23)　　　　　マ　well-defined の説明(21/23)
ミ　球の定義とその体積を求める(22/23)　　　ム　球の表面積を求める(23/23)

なお，2 学期中間試験後の 1 時間を試験返却と解説の時間に充て，2 学期期末試験後の特別授業期間中の 1 時間を試験返却と解説の時間に充てた。また，学校行事等で授業時間にずれが生じたときは，授業時間の多いクラスで問題演習をすることで授業時間を調節した。

1-3. 中学，高校の検定教科書との比較

前節アからムのうち，高校の検定教科書（数 A317）に記載があるのはイ，エ，オ，カ，キ，ク，ケ，コ，サ，シ，スであり，そのうち証明があるのはコ　三垂線の定理のみで，しかも，その証明も厳密には証明していない事実を用いている。それ以外の項目は事実として提示しているだけで，本来証明が必要な箇所に証明がない。また，中学の検定教科書，例えば東京書籍新編新しい数学 1，3（東書 数学 728，928）に記載があるのはニ，ヌ，ネ，ハ，ヒ，フ，ミ，ムであるが，そこにある説明は直観的，視覚的な説明であり，一部に事実を基にした証明があるだけである。

1-4. 証明を示したり，詳しく説明したりして工夫した点

平面の定義を行った（前々節ア）ことで，平面と直線の位置関係が 3 種類しかないことの証明を示した（イ)。

平面の決定条件も，「1 つの直線と，その上にない点を含む平面は必ず存在する」ということを公理とし，これと「同一直線上にない 3 点を含む平面は存在する」という命題が同値であることの証明を示した（エ)。ただし，時間の関係で残りの 2 つの証明は問とした。

異なる 2 平面が交わるなら，その共有点の集合は直線になることの証明を示した。

ある直線に平行な異なる 2 直線も互いに平行であることの証明を示した。

交わる 2 直線の交点においてそれぞれの直線に垂直な直線は，その 2 直線を含む平面に垂直であることを示し，その系として，平面上の任意の直線は，この平面の垂線に垂直であること，交わる 2 直線それぞれに垂直な任意の直線は，この 2 直線の決定する平面に垂直であることを紹介した。これらを用いることで三垂線の定理が厳密に証明できた（コ)。

オイラーの多面体定理が成り立つ説明をした（ス)。

正多面体が 5 種類しかないことを，正多面体の定義を用いる方法，オイラーの多面体定理を用いる方法の 2 通りで証明できることを示した（シ，セ)。

正多面体以外に，角柱，角錐，円柱，円錐，球を定義し，カヴァリエリの原理に基づいて

その体積，表面積を求めた（チ，テ，ト，ナ，ニ，ノ，ハ，フ，ヘ，ホ，ミ，ム）。

直円柱，直円錐の定義を用いて well-defined の意味を説明した（ノ，ホ，マ）。

２．各時間における授業内容

1 時間目

平面の定義

秋山によると，面または表面とは「位置と広さとがあって厚さのないもの」である。また，平面とは「その面中のどこの 2 カ所に 2 点をとっても，この 2 点を通る直線が全くこの面に密着するもの」である。この平面の定義は少しわかりにくいので，平面を定義している文献を探したところ，広辞苑に適切な表現があった。

平面とは「一つの面上の任意の二点を通過する直線が，常に全くその面に含まれるとき，その面のことをいう。」（広辞苑第七版）

授業では「面」を秋山の定義で定義し，「平面」は広辞苑の定義に従った。

また，平面でないものを「曲面」と定義した。

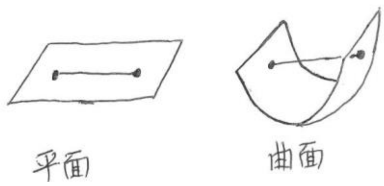

図 1 平面と曲面の図

平面の定義から，直線が平面と 2 点を共有すれば，すべての点を共有するので，平面と直線の位置関係は 3 通りしかないことがすぐに言える。

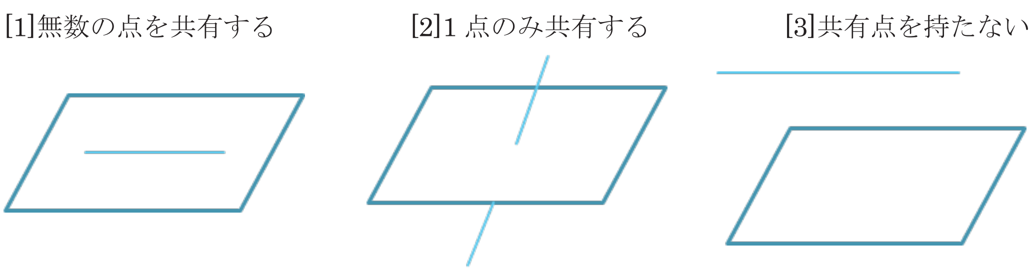

図 2 平面と直線の位置関係

[1]のとき「平面は直線を含む（直線は平面上にある）」といい，[2]のとき「直線と平面は交わる」といい，[3]のとき「直線と平面は平行である」という。これにより，平面と直線の位置関係が 3 種類しかないことが証明された。また，直線が平面とある 1 点で接するということはないものとする。

2 時間目

平面の決定条件

公理として「1 つの直線とその直線上にない 1 点を含む平面は必ず存在する」を採用する。すると,「定理」として次が導ける。

定理 1　次の各平面は必ず存在し，ただ 1 つしかない。

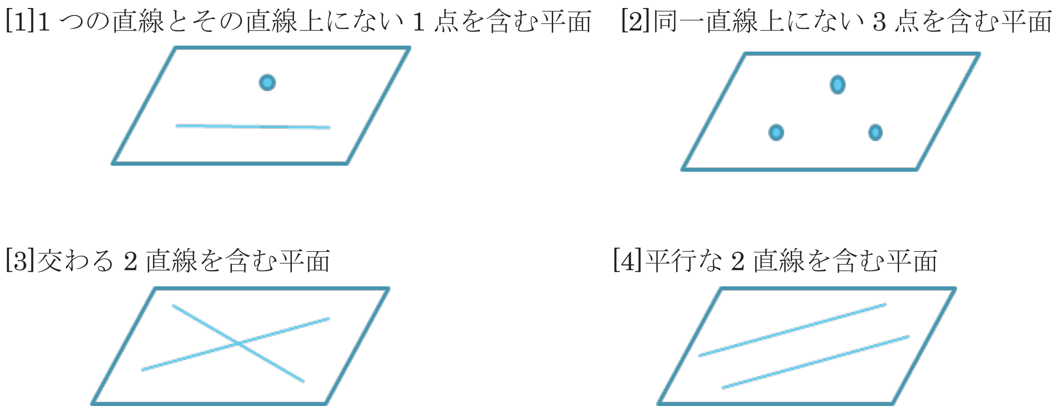

図 3 平面の決定条件

[1]⇒[2]の証明（一意性は証明したものとする）

3 点を A, B, C とし，2 点 B, C を通る直線を ℓ とする。すると公理より，直線 ℓ とその上にない点 A を含む平面は存在するので，3 点 A, B, C を含む平面は存在する。

[2]⇒[1]の証明

1 点を A，直線を ℓ，ℓ 上の任意の異なる 2 点を B, C とすると，3 点 A, B, C は同一直線上にないので，3 点 A, B, C を含む平面は存在する。平面の定義より，2 点 B, C を通る直線 ℓ はこの平面上にある。よって 1 点 A と直線 ℓ を含む平面は存在する。

[1]⇔[3]，[1]⇔[4]の証明は生徒に任せた。

　これにより，1 つを公理とすることで残り 3 つの同値性を証明し，平面を決定する条件が 4 種類あることが証明できた。ただし，一意性の証明は非常に煩わしいので省略した。公理に一意性を含めてもよかったかもしれない。

3 時間目

2 平面の位置関係

定理 2　異なる 2 平面が共有点をもつならば，その共有点の集合は直線になる。

[証明の概略]　2 平面をα，βとする。共有点が 1 点だとすると，その共有点を通るα上の直

線がβに接することになり不適である。共有点が 2 点だとすると，平面の定義により，その 2 点を通る直線はα上にもβ上にもあるから，α，βはこの直線を共有する。また，この直線外の 1 点を共有するとすると，α，βは 1 直線とその上にない 1 点を共有することになり，定理 1（平面の決定条件）より一致する。よって共有点の集合は直線となる。

定理 2 により 2 平面の位置関係は次の 2 種類であることがわかる。

[1]共有点をもつ　　　　　　　　[2]共有点を持たない

図 4　2 平面の位置関係

[1]のとき，2 平面は「交わる」といい，共有する直線を「交線」という。[2]のとき 2 平面は「平行である」という。これにより，2 平面の位置関係が 2 種類しかなく，交わるときの共有点の集合が直線であることが証明された。

2 直線の位置関係

空間内の 2 直線は大別すると同一平面内にあるかないかで分けられ，同一平面内にある場合は更に交わるか交わらないかでわけることができる。

[1]同一平面内にない　　[2]同一平面内で交わる　　[3]同一平面内で交わらない

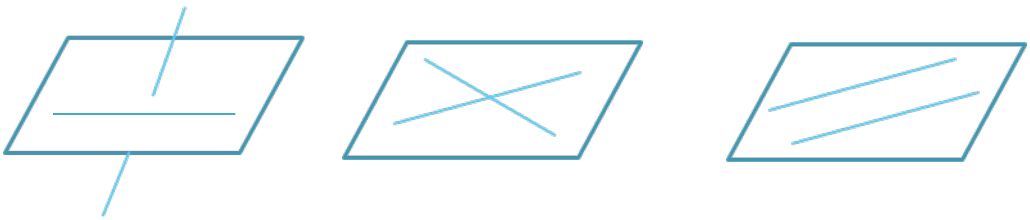

図 5 2 直線の位置関係

[1]のとき，2 直線は「ねじれの位置にある」といい，[3]のとき 2 直線は「平行である」という。これにより，空間内の 2 直線の位置関係が 3 種類しかないことが確認できた。また，空間内の 2 直線が平行であることを示すためには，

[1]交わらない　　[2]同一平面内にある

という 2 条件が必要十分条件であることがわかる。

4 時間目

$\ell /\!/ m,\ \ell /\!/ n \Rightarrow m /\!/ n$　の証明

［証明の概略］

命題 1　平行 2 直線の一方を含んで他方を含まない平面は，含まない方の直線に平行である。

命題 2　平面に平行な直線は，これを含んでこの平面に交わる任意の平面の交線と平行である。

命題 1, 2 の系　平行 2 直線のそれぞれ 1 つを含む平面が交わるときは，その交線はもとの直線に平行である。

定理 3　3 直線 $\ell,\ m,\ n$ があって，$\ell /\!/ m,\ \ell /\!/ n$ ならば，$m /\!/ n$

　検定教科書では結論のみしか書かれていないが，2 つの命題から導かれている。

　$\ell /\!/ m,\ \ell /\!/ n \Rightarrow m /\!/ n$ という命題は，次の 2 直線のなす角を定義する際に重要である。

2 直線のなす角

　2 直線がねじれの位置にある場合，空間内の 1 点 O を通り $\ell,\ m$ に平行な直線 $\ell',\ m'$ を引くと，$\ell',\ m'$ のなす角は点 O の取り方に関係なく一定である。この角を 2 直線 $\ell,\ m$ のなす角という。

　この定義において，「点 O の取り方に関係なく一定」ということを保証しているのが

$$\ell /\!/ m,\ \ell /\!/ n \Rightarrow m /\!/ n$$

という事実である。

5 時間目

　2 平面のなす角を定義するにあたり，まず半平面を定義した。

半平面

　無限平面が，その上にある無限直線によって 2 つに分けられるとき，それぞれの部分を半平面という。

2 平面のなす角

　2 つの平面 α，β の交線 ℓ 上の 1 点 O を通り，α，β 上に，それぞれ ℓ と垂直な半直線 m, n を引くと，m, n のなす角は点 O の取り方に関係なく一定である。この角を 2 平面 α，β のなす角という。2 平面のなす角は，半直線 m, n を含む半平面のなす角ととらえることができる。

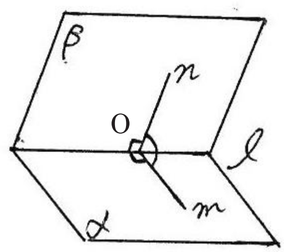

図 6 2 平面のなす角

2 平面のなす角は 2 つ考えられるが，2 つが一致しないとき，大きい方の角を優二面角，小さいほうの角を劣二面角という。単に 2 平面のなす角といえば, 通常は劣二面角を指す。

直線と平面の垂直

直線 ℓ が平面 α 上のすべての直線と垂直であるとき，ℓ は α に垂直である, または ℓ は α と直交するといい, $\ell\perp\alpha$ とかく。垂直でないとき，ℓ は α に対して斜めであるという。

直線が平面に対して斜めであるときの角度も定義できるが，今回の授業では行わなかった。

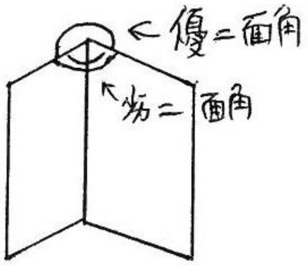

図 7 優二面角と劣二面角

6 時間目

三垂線の定理を証明するにあたり，いくつかの定理の証明を示した。

定理 4　交わる 2 直線の交点においてそれぞれの直線に垂直な直線は，その 2 直線を含む平面に垂直である。

系 1　平面上の任意の直線は，この平面の垂線に垂直である。

系 2　交わる 2 直線それぞれに垂直な任意の直線は，この 2 直線の決定する平面に垂直である。

三垂線の定理

α を平面とし，P を平面 α 上にない点とする。また，ℓ を平面 α 上の直線とし，A を直線 ℓ 上の点，O を平面 α 上にあり直線 ℓ 上にない点とするとき，次の定理が成り立つ。

[1] $\mathrm{PO}\perp\alpha$，$\mathrm{OA}\perp\ell \Rightarrow \mathrm{PA}\perp\ell$

[2] $\mathrm{PO}\perp\alpha$，$\mathrm{PA}\perp\ell \Rightarrow \mathrm{OA}\perp\ell$

[3] $\mathrm{PA}\perp\alpha$，$\mathrm{OA}\perp\ell$ ，$\mathrm{PO}\perp\mathrm{AO} \Rightarrow \mathrm{PO}\perp\alpha$

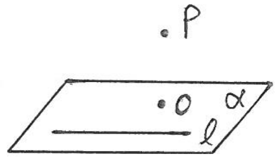

図 8 三垂線の定理

[1]の証明

$\mathrm{PO}\perp\alpha$ より，系 1 から $\mathrm{PO}\perp\ell$

ゆえに，ℓ は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PO，PA に垂直であるから系 2 より

$\ell\perp$ 平面 AOP

PA は平面 α 上にあるから系 1 より $\mathrm{PA}\perp\ell$

[2]，[3]の証明は生徒に任せた。

これにより，三垂線の定理を厳密に証明することができた。また，授業では三垂線の定理を用いる問題を 2 題扱った。

7 時間目

正多面体を定義するにあたり，必要な用語を定義した。

凸多面体，凹多面体

どんな平面で切っても，切り口が凸多角形であるとき，すなわち，切り口にできる平面図形のどの角も 2 直角（2∠R）より小さく，自己交差を持たないとき，その多面体を凸多面体という。

逆に，ある平面での切り口が凹多角形であるとき，すなわち，切り口にできる平面図形の角の少なくとも 1 つが 2 直角より大きいとき，その多面体を凹多面体という。

今後，特にことわりがなければ，単に多面体といった場合には凸多面体を指す。

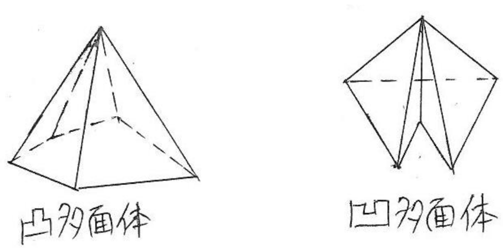

図 9 凸多面体と凹多面体

正多面体

各面が合同な正多角形で，1 つの頂点に集まる面の数がみな等しい凸多面体を正多面体という。

「各面が合同な正多角形」だけでは，以下の図 9 のようなものも正多面体に含まれてしまう。

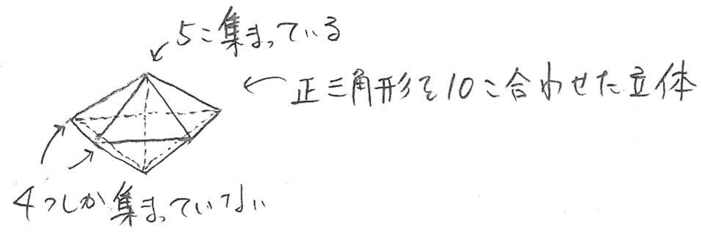

図 10 正多面体ではない例

正多面体が 5 種類しかないことの証明Ⅰ

正多面体の各面を正m角形，1 つの頂点に集まる面の数をn個とする。正m角形の 1 つの

内角の大きさは$\frac{180(m-2)^{\circ}}{m}$であり，それが$n$個集まっても 360°を超えなければ立体を作れるので，

$$\frac{180(m-2)^{\circ}}{m} \times n < 360^{\circ}$$

これより，$mn - 2m - 2n < 0$

$\therefore (m-2)(n-2) < 4$

これを満たす正整数は$(m, n) = (3,3)$, $(3,4), (3,5), (4,3), (5,3)$の 5 種類しかない。ゆえに正多面体は 5 種類しか存在しない。

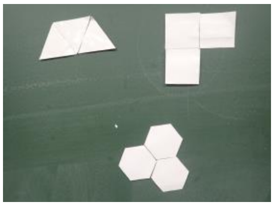
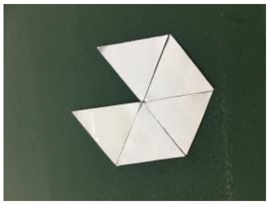

図 11-1, 2 合同な正多角形を合わせていって具体的にどのような場合に立体を作れるか見た

8 時間目

オイラーの多面体定理

凸多面体の頂点の数をv，辺の数を e，面の数をfとすると，$v - e + f = 2$ が成り立つ。以下, オイラーの多面体定理が成り立つ説明を『わかる立体幾何学』(秋山) から引用する。

[説明]多面体を構成するとき，1 つの面に面を次々とつぎ足して，最後に 1 つの面をはめることで多面体を完成させることができるとする（これは公理的に認めることとする)。

最初にただ 1 つの面があるとき, 面の数は 1 つで, 辺の数と頂点の数とは同じであるから,

$v - e + f = 1$

が成り立つ。次にこれに第 2 の面をつぎ足せば，第 2 の面では最初の面と共通の辺を辺の中に数えず，頂点の方は，この辺の両端の 2 頂点が最初の面の頂点と共通で，これを頂点の数に数えないから，この第 2 の面を加えた結果は，新たに増加する辺の数が，新たに増加する頂点の数よりも 1 つ多い。しかし, 面の数が 1 つ増えるから，上の等式$v - e + f = 1$は変わらない。

このように面をつぎ足す場合，つぎ足す面の 2 辺が前の辺と共通であっても，あるいは 3 辺が前の辺と共通であっても，やはり新たに増える辺の数が新たに増える頂点の数よりも 1 つだけ多くなるから，等式$v - e + f = 1$は変わらない。

こうして，ただ 1 つの面を残すまでつぎ足していっても，やはり等式$v - e + f = 1$は変わらない。

最後に，残るただ 1 つの面をはめ込んで多面体を完成させるときには，面の数は 1 つ増えるが，辺の数も頂点の数も変わらないから，

$v - e + f = 2$

という等式が成立する。（引用終わり）

オイラーの多面体定理は凸多面体に限らず，凹多面体についても成立する。しかし，穴のあいた多面体では成立しない。

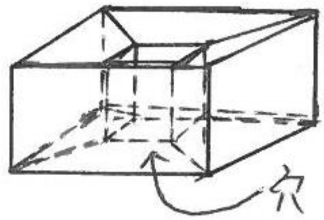

図 12 穴の開いた多面体

正多面体が 5 種類しかないことの証明 II

正多面体の頂点の数をv，辺の数を e，面の数をf，各面を正m角形，1 つの頂点に集まる面の数をn個とする。

オイラーの多面体定理より，

$$v - e + f = 2$$

隣り合う面は 1 つの辺を共有するから$mf = 2e$，1 つの頂点に集まる辺の数より$nv = 2e$

これらより，$\frac{2e}{n} - e + \frac{2e}{m} = 2$

$$2m - mn + 2n = \frac{2mn}{e} > 0$$

$$mn - 2m - 2n < 0$$

$\therefore (m-2)(n-2) < 4$ これを満たす正整数は$(m,n) = (3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3)$の 5 種類しかない。ゆえに正多面体は 5 種類しか存在しない。

9 時間目

正多面体を実際に作る

1 時間使って正多面体を実際に作った。正二十面体と穴あき切頂二十面体はどちらか好きな方を選ばせた。

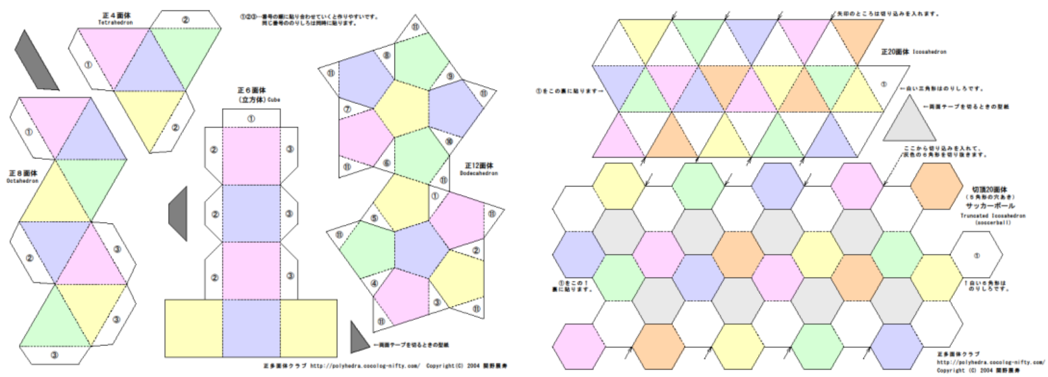

図 13-1,2 正多面体，穴あき切頂二十面体の展開図　©正多面体クラブ

ここまでが数 A の教科書に書いてある内容に肉付けしたものである。

10 時間目

双対な正多面体

例えば，立方体の各面の中心を頂点にもつ立体は正八面体であり，逆に正八面体の各面の中心を頂点にもつ立体は立方体である。このような関係にある正多面体を互いに双対という。正十二面体と正二十面体も互いに双対である。また，正四面体と双対な正多面体は正四面体自身である。

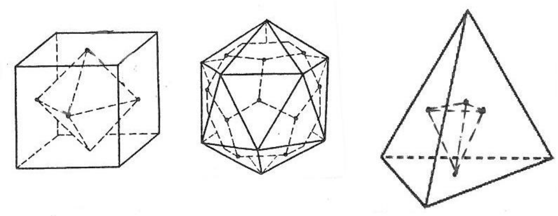

図 14 双対な正多面体
（左から 2 つは秋山 p. 150 による）

ここからは主に立体の体積，表面積を求めるための準備をした。まず，小学校の教科書を見てみると「表面積」という言葉がないので，表面積から定義した。

次に様々な立体を定義した。10 時間目は角柱（直角柱，斜角柱）と平行六面体，直方体を定義した。また，縦，横，高さがそれぞれa，b，c である直方体の対角線の長さが$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$であることを確認した。

11 時間目

平行六面体の 12 の辺の 2 乗の和が 4 つの対角線の 2 乗の和に等しいことを示した。この証明は単調であるが記述が多く，この時間はこの証明だけで終わってしまった。

12 時間目

角錐（直角錐と斜角錐）を定義した。

カヴァリエリの原理

同一平面上におかれた 2 つの立体を，この平面に平行などんな平面で切っても，2 つの切り口の面積が常に等しいときは，この 2 つの立体の体積は等しい。

また，同一平面上におかれた 2 つの立体を，この平面に平行などんな平面で切っても，2 つの切り口の面積比が常に一定（例えば$S_1\colon S_2$）のときは，この 2 つの立体の体積比も常に一定で$S_1\colon S_2$となる。

（前半は『わかる立体幾何学』（秋山）p.165 から引用した。）

カヴァリエリの原理は公理的に認めた。

13 時間目

カヴァリエリの原理を用いることで，底面積がS，高さがhの角錐の体積が$\frac{1}{3}Sh$であることが示せる。まず，高さの等しい 2 つの角錐を同一平面上におき，この平面に平行な任意の平面で切ってできた 2 つの切り口の図形の面積比は，角錐の底面の面積比と等しくなる。よってカヴァリエリの原理よりこの 2 つの角錐の体積比は底面の面積比と等しい。したがって，ある角錐 A（底面積がS_{A}，高さがh）の体積が$\frac{1}{3}S_{\mathrm{A}}h$であることを示せれば，底面積が$S$，高さが$h$の角錐の体積$V$は

$$V=\frac{1}{3}S_{\mathrm{A}}h\times\frac{S}{S_{\mathrm{A}}}=\frac{1}{3}Sh$$

となる。角錐 A として底面の 1 辺の長さが$2h$，高さがhの正四角錐を持ってくると，この体積は 1 辺の長さが$2h$の立方体の体積（$8h^3$）の$\frac{1}{6}$であり，底面積$S_{\mathrm{A}}=4h^2$であるから，角錐 A の体積V_{A}は,

$$V_{\mathrm{A}}=\frac{1}{6}\cdot 8h^3=\frac{1}{3}\cdot 4h^2\cdot h=\frac{1}{3}S_{\mathrm{A}}h$$

と表せる。これで底面積がS，高さがhの角錐の体積が$\frac{1}{3}Sh$であることが示された。

14，15，16 時間目

この 3 時間は正多面体や正多面体の一部を切断した図形の体積や表面積を求めた。

17 時間目

立体の合同，相似，相似比について

2 つの立体 P，Q がある。P を平行移動，回転移動，対称移動して Q と一致した場合，あるいは P と Q が互いに鏡映の関係にある場合，P と Q は互いに合同であるという。

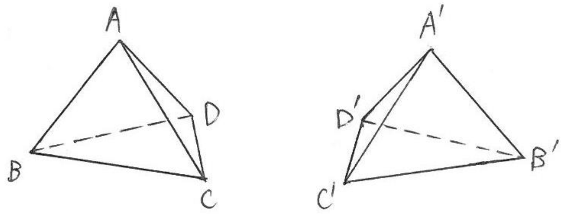

図 15 鏡映の関係

2 つの立体 P，Q がある。P を一定の割合で拡大，または縮小し，平行移動，回転移動，

対称移動して Q と一致した場合，あるいは，P を一定の割合で拡大または縮小したものが Q と互いに鏡映の関係にあるとき，P と Q は互いに相似であるという。

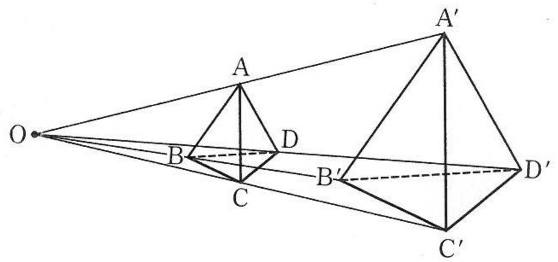

図 16 相似な図形
（東京書籍 新編新しい数学 3 p. 152 より抜粋）

立体の合同・相似を扱うにあたって，苦慮した点がいくつかある。まず，合同においては「鏡映」なのか「鏡像」なのか用語の選定に迷った。結果として授業では「鏡映」を用いることにした。また，立体図形の合同条件，相似条件というものはあまり知られていない。色々な本やウェブサイトを調べてもなかなかそのようなものは見つけられなかったので，授業では立体の合同や相似に関しては直観に頼ってもよいものとした。しかしこれによって期末テストの採点で苦心する羽目になった。

また，相似比が$m:n$の相似な図形の面積比，体積比がそれぞれ$m^2:n^2$，$m^3:n^3$となることは 1，2 個の具体例を挙げ，事実として提示することにとどめ，証明はしなかった。

18 時間目

3 学期はまず曲面体から定義した。

曲面体

曲面のみ，あるいは，曲面と平面から構成される立体を曲面体という。

回転体

平面図形を，ある直線を回転軸として 1 回転してできる立体を回転体という。

直円柱

長方形を，その 1 辺を軸として回転してできる回転体を直円柱という。

直円錐

直角三角形を，斜辺でない 1 辺を軸として回転してできる回転体を直円錐という。

母線

一般に，直線が運動して何か表面を生じさせるとき，その運動する直線をこの表面の母

線という。

直円柱の体積を求めるにあたって，円を正n角形において$n \to \infty$とした極限とみなした。これにより直円柱においても角柱の体積の公式(底面積)×(高さ)を用いることができる。また，直円柱の表面積は，展開図をかいて側面積と底面積をそれぞれ求めた。

次に扇形の面積を求めた。小学校の教科書を見ると，扇形の面積は小学校では求めないようなので，円周角を用いるものと弧の長さを用いるもの 2 つを示した。

19 時間目

直円錐の体積，表面積を求めた。残りの時間は問題演習の時間に充てた。

20 時間目

正円錐台

直円錐を底面に平行な任意の平面で 2 つの部分に分けると，頂点を有する部分と底面を有する部分に分けることができる。このうち, 底面を有する部分のことを正円錐台という。

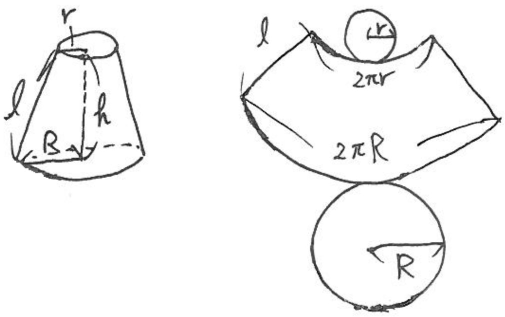

図 17 正円錐台とその展開図

正円錐台の体積と表面積

正円錐台の上底の半径をr, 下底の半径をR $(r < R)$, 高さをh, 母線の長さを ℓとすると，体積は$\frac{1}{3}\pi(r^2 + rR + R^2)h$，表面積は$\pi r^2 + \pi R^2 + \pi(r + R)\ell$となる。

[証明]体積に関して

大きな直円錐から小さな直円錐を引いたと考える。小さな直円錐の高さをxとすると，体積は$\frac{1}{3}\pi R^2(x + h) - \frac{1}{3}\pi r^2 x \cdots$①

また，相似比より$x{:}r = (x + h){:}R$なので，$x = \frac{r}{R-r}h$となる。これを①に代入して

$$\frac{1}{3}\pi R^2\left(\frac{r}{R-r}h + h\right) - \frac{1}{3}\pi r^2\frac{r}{R-r}h = \frac{1}{3}\pi\frac{R^3 - r^3}{R-r}h = \frac{1}{3}\pi(r^2 + rR + R^2)$$

表面積に関して

上底と下底の面積の和は$\pi r^2 + \pi R^2$であるから，あとは側面積がわかればよい。

側面積に関して体積の場合と同様に大きい扇形から小さい扇形を引いたと考える。小さい扇形の母線の長さをyとすると，側面積は$\frac{1}{2}\cdot 2\pi R(y+\ell)-\frac{1}{2}\cdot 2\pi r y$

$= \pi(Ry + R\ell - ry) \cdots$②

相似比より，$y:(y+\ell) = 2\pi r : 2\pi R = r:R$なので$y = \frac{r}{R-r}\ell$。これを②に代入して，

$$\pi\left(\frac{rR}{R-r}\ell + R\ell - \frac{r^2}{R-r}\ell\right) = \pi\frac{R^2-r^2}{R-r}\ell = \pi(R+r)\ell$$

よって成り立つ。

すべての円は相似であるから，2 つの扇形が相似であるとは，中心角が等しいことである。扇形の弧の長さは半径と中心角のみに依存するから，相似な 2 つの扇形の弧の長さの比は半径の比と等しくなる。

21 時間目

一般の円柱の定義

一定方向にのびる直線が定円に沿って移動するときにできる曲面を円柱面という。円柱面ともとの定円に平行な 2 平面が囲み取る立体を円柱という。

一般の円錐の定義

定点を通る直線が定円に沿って移動するときにできる曲面を円錐面という。円錐面ともとの定円に平行な平面が囲み取る立体を円錐という。

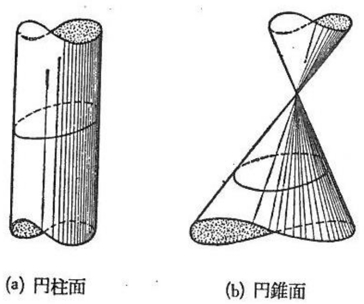

図 18 円柱面と円錐面
（秋山 p. 217 より抜粋）

円柱，円錐の軸

円柱において，2 つの底面の中心を結ぶ線分を円柱の軸という。また，円錐においては，頂点と底面の中心を結ぶ線分を円錐の軸という。

直円柱と直円錐，斜円柱と斜円錐

軸が底面と垂直のとき，それぞれ直円柱，直円錐といい，そうでないとき，それぞれ斜円柱，斜円錐という。

ここで，18 時間目にも直円柱と直円錐を定義したことを思い出すと，定義が 2 つあっていいのかという疑問がわく。この疑問を解消するためには，18 時間目の直円柱，直円錐の定義と今回の直円柱，直円錐の定義が同値であることを見ればよい。わかりやすくするため，今回定義された直円柱，直円錐をそれぞれ「新円柱」「新円錐」とすると，直円柱⇔新円柱，直円錐⇔新円錐を示せばよい。

直円柱⇒新円柱，直円錐⇒新円錐

軸が底面と垂直であることを言えばよいが，回転軸がそれぞれ長方形の 1 辺と直角三角形の斜辺でない辺なので，それは明らかである。

直円柱⇐新円柱，直円錐⇐新円錐

軸を含む断面を軸でさらに半分にしたとき，その図形がそれぞれ長方形，直角三角形であることを見ればよい。しかしこれは新円柱，新円錐の定義より明らかである。

以上により直円柱⇔新円柱，直円錐⇔新円錐が示され，どちらの定義を採用しても問題ないことがわかる。

Well-defined

18 時間目の定義では直円柱，直円錐だけが定義されたが，21 時間目の定義では斜円柱，斜円錐を含む形で定義された。このように，一度定義されたものがより広い意味で定義されるとき，前の定義と矛盾なく定義できている場合，well-defined であるという。直訳すると「よく定義されている」という意味だが，数学では訳さずそのまま使う。

Well-defined という言葉をここで定義したことで，三角比で鋭角だけを扱う場合から鈍角も含む場合に拡張したときにスムーズに導入することができたように思う。また，例えば指数定理を拡張するときにも，ちゃんと well-defined であるかどうか調べさせることもできるので，このタイミングで教えておいたことは有用であったと考える。

22 時間目

球

空間内の 1 定点から等距離にある点の集合を球（きゅう）という。

円においては，円と円の内部全体を合わせたものを円板(disk)と呼び，円板において，円板とその外部との境界を円周といった。つまり，円と円周は同じものを指していた。同様に，球においても，球と球の内部全体を合わせたものを球体(ball)と呼び，球体において，球体とその外部との境界を球面(sphere)と呼ぶ。つまり，球と球面は同じものを指す。

数学では「円」と言えば「円周」を指し，「球」と言えば「球面」を指すが，日常的には円板のことを「円」と呼び，球体のことを「球」と呼ぶこともよくあるので，どちらを指しているのか注意した方が良い。

球の体積（厳密には「球体の体積」だが，慣例的にこう呼ぶ）

図のような，半径rの半球を A，半径rの円が底面で高さrの直円柱から直円錐をくりぬいた立体を B とする。底面からの高さcにおける，A，B の切り口の面積を考える。

Aの切り口の円の半径は三平方の定理より$\sqrt{r^2-c^2}$ なので，面積は$\pi(r^2-c^2)$，Bの切り口の面積は$\pi r^2-\pi c^2$。したがって，任意の高さcにおける面積が一致するので，カヴァリエリの原理より，A，Bの体積は一致する。Bの体積は$\pi r^3-\frac{1}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi r^3$であるから，半球Aの体積も$\frac{2}{3}\pi r^3$である。ゆえに，半径$r$の球の体積は$\frac{4}{3}\pi r^3$となる。

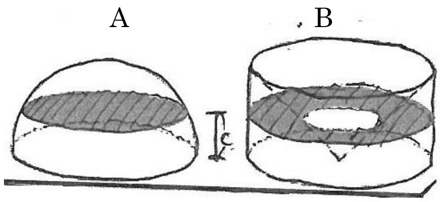

図 19 球の体積の求め方

23 時間目

球の表面積

図のように，線分 AB を直径とした半円に長方形 ABCD が外接している。この図形を線分 AB を軸として回転させると，球に外接する直円柱が描かれる。このとき，この球の表面積とこの直円柱の側面積が等しいことが知られている。

検定教科書には，ひもを巻きつけてひもの長さと幅で視覚的に説明しているものもあるが，ここでは証明は省略した。

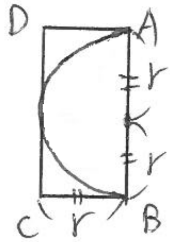

図 20

球の表面積 1

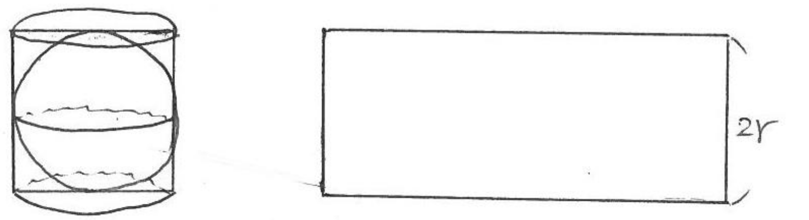

図 21 球の表面積 2

この直円錐の側面積の面積は$2r\times 2\pi r=4\pi r^2$より，半径rの球の表面積も$4\pi r^2$となる。残りの時間は球に関する問題を解く時間とした。

３．テストに関して

テストに関して特記すべきことをここに挙げる。

中間試験大問 5 (3)

AC=BC，AD=BD である四面体 ABCD において，AB と CD は垂直か。「垂直である」

か「垂直でない」のいずれか適当であると思うものを○で囲み，そのことを証明せよ。

私の想定としては，6時間目定理4系2「交わる2直線それぞれに垂直な任意の直線は，この2直線の決定する平面に垂直である。」を用いる解答であった。

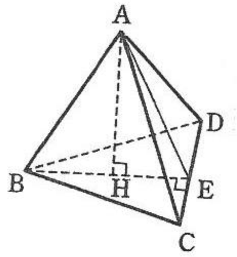

図22 中間試験の図

[解答1]

垂直である

AB の中点を M とする。$\triangle$CAB は二等辺三角形なので $CM \perp AB$

$\triangle$DAB についても同様に $DM \perp AB$

よって，AB は平面 MCD 内の交わる2直線 CM，DM と垂直なので，$AB \perp$ 平面 MCD

CD は平面 MCD 上にあるので，$AB \perp CD$

□

しかしこの方法で解いた生徒は2人のみで，大半の生徒は三垂線の定理を用いて解いていた。こちらの方が(2)の結果も使い，より自然である。ちなみに(2)では $AH \perp$ 平面 BCD の証明を行った。また，下の証明における点 E は点 B から CD への垂線の足である。

[解答2]

垂直である

CD と平行で点 B を通る直線を ℓ とする。$BE \perp CD$ より，$\ell \perp BE$。特に $\ell \perp BH$……①

また，(2)より $AH \perp$ 平面 BCD……②

①，②より，三垂線の定理から $AB \perp \ell$。$\ell /\!/ CD$ より，$AB \perp CD$

□

期末試験大問3(2)

次の各立体について，頂点の数，辺の数，面の数，表面積，および体積をそれぞれ求めよ。ただし，頂点の数，辺の数，面の数においては，求め方を問わない（つまり，計算で求めても良いし，数えても良い)。また，これら3つの値に関しては，答えのみ採点する。

(2) 図のような，直三角錐 P－HQR と，1辺の長さが6の立方体 ABCD－EFGH で重なっている部分が表す立体。ただし，DP，EQ，GR の長さは3とする。

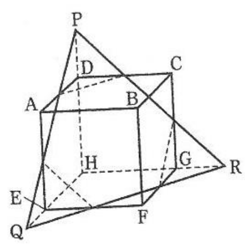

図23 期末試験の図

頂点の数，辺の数，面の数，表面積に関しては概ね想定通りの解答であったが，体積に関してこちらが想定していない解答があった。最初に想定した解答を挙げる。

[解答 1]

三角錐 P－HQR の体積を V とすると，$V=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 9\times 9\right)\times 9=\frac{243}{2}$

立方体と重なっていない三角錐と三角錐 P－HQR は相似であり，その相似比は 1 : 3 であるから，その体積は$\frac{1}{27}V$

よって求める体積は$V-\frac{1}{27}V\times 3=\frac{8}{9}V=\frac{8}{9}\times\frac{243}{2}=108$ (答)108

しかし，2 人の生徒が以下のような解答を書いた。

[解答 2]

三角錐 P－HQR の各辺は，立方体の各辺の中点を通る（それは例えば PD : PH＝1 : 3 であることからわかる)。よって求める立体と立方体から求める立体を除いた立体は合同であることがわかるから，$216\div 2=108$ (答)108

17 時間目で「立体の合同については直観に頼ってもよい」としたことから，この解答も正解にせざるを得なかった。実際に合同であるのは間違いないが，やはり証明なしに合同だとするのは心理的に抵抗がある。今後立体について扱うときは，せめて辺の長さがすべて等しいなど，根拠を挙げさせることが必要かと思った。しかし，辺の長さがすべて同じでも凸多面体と凹多面体のように必ずしも合同になるとは限らないので，説明が難しいところである。

おわりに

元々は数学 A の検定教科書が事実の羅列になっているので授業では証明を含めながら論理的に説明していこうと思って授業を組み立てたが，思った以上に大変な作業であった。特に 2018 年度は中 3 だけでなく高 3 の授業も担当していたので，中 3 の幾何だけに集中するわけにもいかなかった。結果として自分の時間を相当に消費し，日によっては夜の 1 時, 2 時まで時間がかかることもあった。しかしその分自分自身にとって良い勉強になったと感じる。

生徒にとっては非常に難解で理解しがたい部分も多様にあったと思う。中学で学ぶ幾何は全体的に難解なので学ぶ方もついていくのに大変だったと思うが，それでも音を上げずに頑張ってついてきた 96 期の生徒たちに感謝申し上げる。

教科書があるわけではなく，一から授業を構築していくことは大変ではあったが，これに甘んずることなくブラッシュアップしていきたいと思う。

参考文献

書籍

秋山武太郎，わかる立体幾何学，日新出版，2012（第 6 版）

俣野博ほか，数学 A Advanced（検定教科書 数 A317），東京書籍，2018

中学の幾何，武蔵中学校で使われている検定外教科書，2005

藤井斉亮，俣野博ほか，新編新しい数学 3（検定教科書 数学 928），東京書籍，2018

藤井斉亮，俣野博ほか，新編新しい数学 1（検定教科書 数学 828），東京書籍，2018

岡部恒治ほか，改訂版中学校数学 1（検定教科書 数学 734），2015

藤井斉亮，飯高茂ほか，新しい算数 6 上（検定教科書 算数 601），東京書籍，2010

秋山武太郎，わかる幾何学，日新出版，1996（第 14 版）

新村出編，広辞苑（第七版），岩波書店，2018

青本和彦ほか，数学入門辞典，岩波書店，2005

中村幸四郎ほか，ユークリッド原論，共立出版，1973 年

ウェブサイト

Wikipedia 正多面体 https://ja.wikipedia.org/wiki/正多面体

Wikipedia カヴァリエリの原理 https://ja.wikipedia.org/wiki/カヴァリエリの原理

Wikipedia 図形の合同 https://ja.wikipedia.org/wiki/図形の合同

Wikipedia 鏡像 https://ja.wikipedia.org/wiki/鏡像

Wikipedia 鏡映 https://ja.wikipedia.org/wiki/鏡映

高校数学の美しい物語～定期試験から数学オリンピックまで 800 記事～

正多面体が 5 種類しかないことの 2 通りの証明

http://polyhedra.cocolog-nifty.com/blog/2017/11/post-dcc9.html

正多面体クラブ，正多面体ペーパークラフト

http://polyhedra.cocolog-nifty.com/blog/2017/11/post-dcc9.html

なお，ウェブサイトについては 2018 年 9 月から 2019 年 1 月にかけて該当のサイトを参照した。