第 1 章

座標とベクトル

1.1　座標系

1.1.1　数直線（原点と単位点）

直線 ℓ 上の点 P の位置を表すためにはどうすればいいだろうか．

図 1.1　直線 ℓ 上の点 P

そのために，まず ℓ 上に異なる 2 点 O, E を定める．そして，線分 OE の長さを単位 1 とし，点 P に対し，次のようにして実数 x を対応させる；

(a) 点 P が点 O に関して，E と同じ側にあるとき，$x = |OP|$,
(b) 点 P が点 O に関して，E と反対側にあるとき，$x = -|OP|$.

ただし，$|OP|$ は線分 OP の長さを表す．

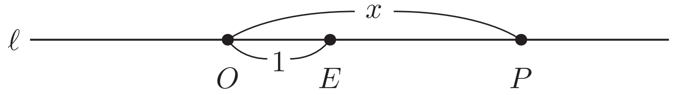

図 1.2　直線 ℓ 上の基準点 O, E

このようにして定まる数 x を点 P の座標といい，$P(x)$ と表す．特に，$O(0)$ とし，$E(1)$ である．

座標とは，点に対し実数を対応させること[*1]である．この「対応」は点 O と点 E の選び方によって決まる．上記のようにして点 O, E から定まるこの「対応」を原点 $\boldsymbol{O}$ と単

[*1] より厳密にいうと，座標系とは点に対して数を対応させる写像である．

位点 $\boldsymbol{E}$ から定まる ℓ の座標系といい，$\{O; E\}$ と表す[*2]．座標系をひとつ定めた直線を数直線という．数直線を表すとき，原点 O は明示するが，単位点は省略されることが多い．その場合は，単位点がある側の線分の端点を矢印で表すことにする．

図 1.3　数直線 ℓ

1.1.2　座標平面

次に，平面上の点 P の位置を表すための方法を考える．まず，適当に点 O をとり，その点を原点とする 2 つの数直線 ℓ_1, ℓ_2 を定める（それぞれ単位点を E_1, E_2 とする．図 1.4 左を参照）．

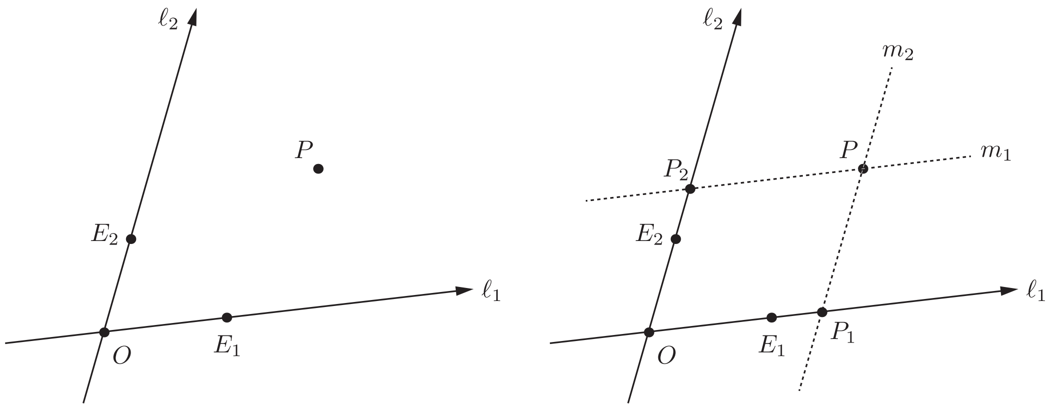

図 1.4　平面上の 2 つの座標軸（左）と座標の定め方（右）

このとき，点 P を通り ℓ_1, ℓ_2 に平行な直線を m_1, m_2 とし，ℓ_1 と m_2 との交点を P_1，ℓ_2 と m_1 との交点を P_2 とする（図 1.4 右を参照）．点 P_1, P_2 は数直線 ℓ_1, ℓ_2 上の点だから，それぞれ座標が定まる．$P_1(x_1), P_2(x_2)$ のとき，(x_1, x_2) を平面上の点 P の座標といい，$\boldsymbol{P(x_1, x_2)}$ と表す．特に，$O(0,0), E_1(1,0), E_2(0,1)$ である．

点 P に対して数の組 (x_1, x_2) を与えるこの「対応」は点 O と 2 つの数直線，つまり単位点 E_1, E_2 の選び方によって決まる．上記のようにして点 O, E_1, E_2 から定まるこの「対応」を原点 $\boldsymbol{O}$ と単位点 $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}$ から定まる平面の座標系といい，$\{O; E_1, E_2\}$ と表す．座標系をひとつ定めた平面を座標平面という．また，座標系を定める 2 つの数直線を座標軸という．特に，ℓ_1 を $\boldsymbol{x}$ 軸または第 **1** 軸，ℓ_2 を $\boldsymbol{y}$ 軸または第 **2** 軸とよび，$P(x_1, x_2)$ の x_1 を点 P の $\boldsymbol{x}$ 座標または第 **1** 座標，x_2 を点 P の $\boldsymbol{y}$ 座標または第 **2** 座標とよぶ．

[*2] 座標系がひとつ定まると点に対して数が対応するが，逆に数に対して点も唯一つ定まる．

2 つの座標軸が直交し，$|OE_1| = |OE_2|$ のとき*3，$\{O; E_1, E_2\}$ を直交座標系（またはデカルト座標系*4）という．直交座標系において，点の座標は各座標軸へ下ろした垂線の足の座標の組である．直交座標系をひとつ定めた平面を座標平面またはデカルト平面という．

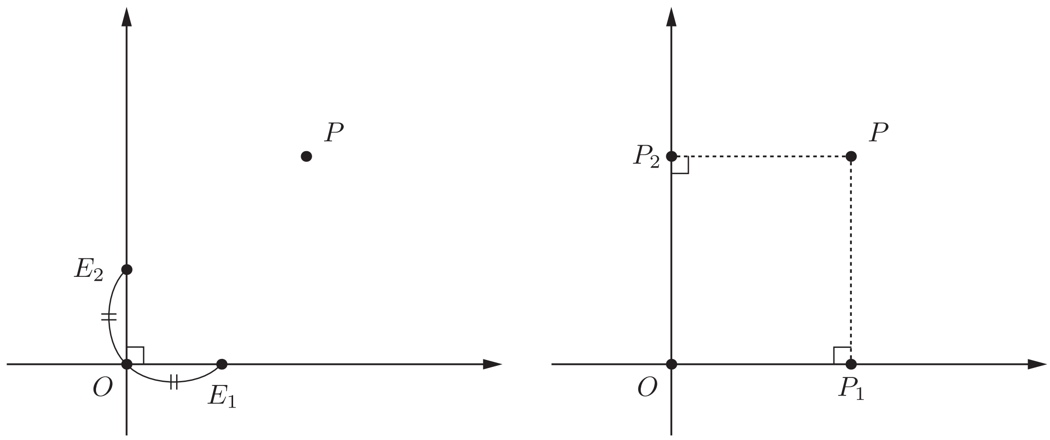

図 1.5　平面上の直交座標系（左）と座標の定め方（右）

1.1.3　座標空間

空間の直交座標系も平面の場合と同様の定義することができる．原点 O とその点で直交する 3 つの数直線（座標軸）ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 を定める（図 1.6 左を参照．それぞれの単位点 E_1, E_2, E_3 は，$|OE_1| = |OE_2| = |OE_3|$ を満たす）．空間上の点 P に対して，OP を対角線とし，各座標軸の一部を辺として持つ直方体を考える．各座標軸上にあり，その直方体の頂点となる点をそれぞれ P_1, P_2, P_3 とする．この点の座標が $P_1(x_1), P_2(x_2), P_3(x_3)$ のとき，(x_1, x_2, x_3) を点 P の座標といい，$\boldsymbol{P(x_1, x_2, x_3)}$ と書く．

上記のように，点 P に対して数の組 (x_1, x_2, x_3) を与える対応を原点 $\boldsymbol{O}$ と単位点 $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}, \boldsymbol{E_3}$ から定まる空間の直交座標系といい，$\{O; E_1, E_2, E_3\}$ と表す．座標系をひとつ定めた空間を座標空間という．3 つ目の座標軸 ℓ_3 を $\boldsymbol{z}$ 軸または第 **3** 軸，$P(x_1, x_2, x_3)$ の x_3 を点 P の $\boldsymbol{z}$ 座標または第 **3** 座標とよぶ（ℓ_1, ℓ_2 および x_1, x_2 のよび方は平面の場合と同様である）．

空間の点 $(x_1, x_2, 0)$ は平面の点 (x_1, x_2) に自然に対応する．z 座標が 0 である空間の点の全体を $\boldsymbol{xy}$**-平面**とよぶ．同様に x 座標が 0 である空間の点の全体を $\boldsymbol{yz}$**-平面**，y 座標が 0 である空間の点の全体を $\boldsymbol{zx}$**-平面**とよぶ．

---

*3 単に座標系を定めるためならば，2 つの座標軸は直交する必要がなく，各座標軸における単位長さが異なっていてもよい．このような一般的な座標系を斜行座標系という．

*4 これはフランスの哲学者，数学者のルネ・デカルトから採っている．彼は平面上の座標の概念を発見し，1637 年に発表された著書「方法序説」の中で言及している（これとは独立にフェルマーも空間の座標の概念を発見したと言われている）．直交座標系は英語で Cartesian coordinate system というが，これはデカルトが自身の名前をラテン語で Cartesius と名乗っていたことによる．

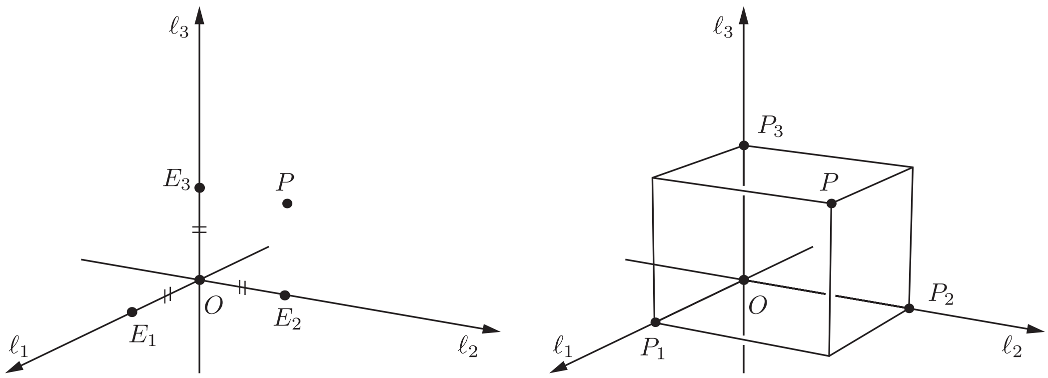

図 1.6　空間上の直交座標系（左）と座標の定め方（右）

1.2　ベクトル

1.2.1　有向線分と幾何ベクトル

有向線分

線分に「向き」を与えたものを有向線分という．「向き」とは始点と終点の情報のことである．点 A が始点で B が終点の有向線分を $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ と表す．有向線分を図示するときは，図 1.7 のように終点を矢印で表すことにする．

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BA}$ は線分としては同じだが，有向線分としては異なる．このとき，$\overrightarrow{BA}$ は $\overrightarrow{AB}$ と逆の向きを持つという．

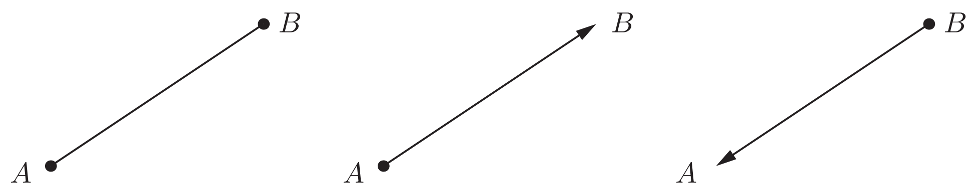

図 1.7　線分と有向線分．その逆向きの有向線分

幾何ベクトル

有向線分の始点の位置を無視し，「向き」と「大きさ（線分としての長さ）」だけから決まる量を幾何ベクトルという．有向線分 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{A'B'}$ が同じ幾何ベクトルを与えるとは，始点が重なるように一方を平行移動したとき，終点が重なるときをいう．これは，四角形 $ABB'A'$ が平行四辺形となることと同等である．単にベクトルという場合は幾何ベクトルのことをいうものとする．

始点と終点の情報を明記しないでベクトルを表すときはアルファベットの小文字を使っ

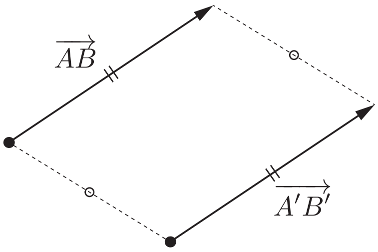

図 1.8　幾何ベクトルとして等しい有向線分

て $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$ などと表す．$\vec{a}$ と逆の向きを持つベクトルを $-\vec{a}$ と表す．

定義 1.1. 始点と終点が同じ点のベクトルを零ベクトルといい，$\vec{\mathbf{0}}$ と表す．ベクトル $\vec{a}$ の線分としての長さをベクトルのノルムといい，$\|\vec{\boldsymbol{a}}\|$ と表す．例えば，$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ のとき，$\|\vec{a}\| = |AB|$ である．

ベクトル $\vec{a}$ が平面上の有向線分として表されるとき，$\vec{a}$ を平面ベクトルとよぶ．同様に，空間上の有向線分として表されるとき，$\vec{a}$ を空間ベクトルとよぶ．

1.2.2　ベクトルの線形演算

ベクトルの和

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し，その和 $\vec{a}+\vec{b}$ を以下のようにして定義する；$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}$ のように $\vec{a}$ の終点と $\vec{b}$ の視点が重なるように平行移動し，$\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ と定める（図 1.9 左）．これは $\vec{a}, \vec{b}$ を 2 辺とし，始点を共有する平行四辺形の対角線のひとつに図 1.9 右のような向きを定めたベクトルに他ならない．この定義から，ベクトルの和が可換，つまり $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ が成り立つことがわかる．また，任意のベクトル $\vec{a}$ に対し，$\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$，$\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$ であることも明らかだろう．

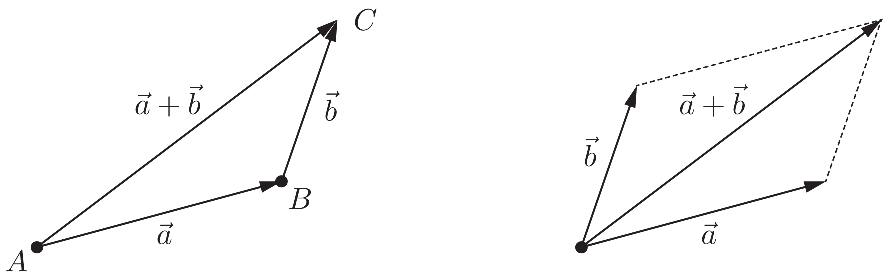

図 1.9　ベクトルの和

ベクトルのスカラー倍

ベクトル $\vec{a}$ と実数 t に対し，そのスカラー倍 $t\vec{a}$ を

(a) $t > 0$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きで，ノルムが $t\|\vec{a}\|$ のベクトル，
(b) $t = 0$ のとき，$\vec{0}$，
(c) $t < 0$ のとき，$\vec{a}$ と逆の向きで，ノルムが $(-t) \times \|\vec{a}\|$ のベクトル

と定める．

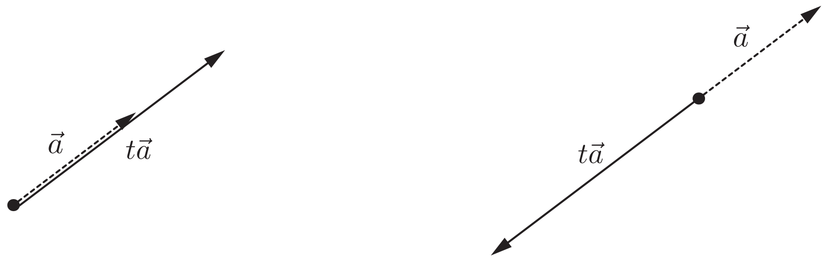

図 1.10　ベクトルのスカラー倍．$t > 0$ の場合（左）と $t < 0$ の場合（右）

この定義から，$-\vec{a} = (-1)\vec{a}$ であることがわかる．

定義 1.2. 零ベクトルでないベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し，$\vec{a} = k\vec{b}$ となる実数 k が存在するとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行であるという．

ベクトルの和とスカラー倍の性質

ベクトルの和とスカラー倍は以下の性質を満たす．

ベクトルの線形演算の性質

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と実数 s, t に対し，以下の等式が成り立つ．

(a)	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	（和の交換法則）
(b)	$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$	（和の結合法則）
(c)	$s(t\vec{a}) = (st)\vec{a}$	（スカラー倍の結合法則）
(d)	$(s + t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a}$	（分配法則）
(e)	$t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$	（分配法則）

(a) は和の定義で述べた．(b) は $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \vec{c} = \overrightarrow{CD}$ と有向線分で表すことにより，$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AD}$ となることがわかる．

(c) と (d) はスカラー倍によってベクトルの向きとノルムがどのように変化するかに着目すればよい（詳細は省略する）．

(e) を $t > 0$ の場合について説明する．ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し，$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}$ となるように点 A, B, C を定め，図 1.11 左のように，$\triangle ABC$ との相似比が $1 : t$ となる $\triangle AB'C'$ を考える．このとき，ベクトルの和の定義から $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ である．また，ベクトルのスカラー倍の定義と $\triangle ABC : \triangle AB'C' = 1 : t$ であることから，

$t\vec{a}=\overrightarrow{AB'}, t\vec{b}=\overrightarrow{B'C'}, t(\vec{a}+\vec{b})=\overrightarrow{AC'}$ である．一方，$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{BC'}=t\vec{a}+t\vec{b}$ である．したがって，$t(\vec{a}+\vec{b})=t\vec{a}+t\vec{b}$ が成り立つ．

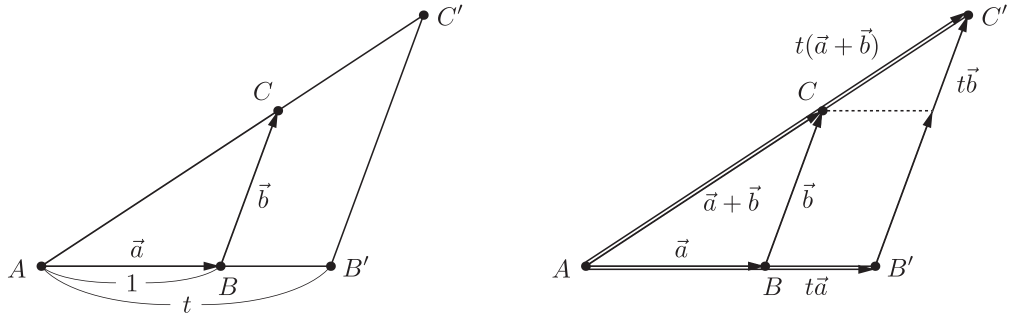

図 1.11　線形演算の分配法則

1.2.3　位置ベクトルとベクトルの成分表示

位置ベクトル

ここでは簡単のため，平面ベクトルを考える．平面に直交座標系 $\{O;E_1,E_2\}$ がひとつ定まっているとする．このとき，平面上の点 P に対して，原点を始点とするベクトル $\overrightarrow{OP}$ が自然に対応する．このベクトル $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$ を点 P の位置ベクトルという．逆に，ベクトル $\vec{q}$ に対して $\vec{q}$ を位置ベクトルする点 Q が定まる．これは始点が原点 O となるように $\vec{q}$ を平行移動したときの終点である．この対応により，平面上の点と平面ベクトルは 1 対 1 に対応する[*5]．

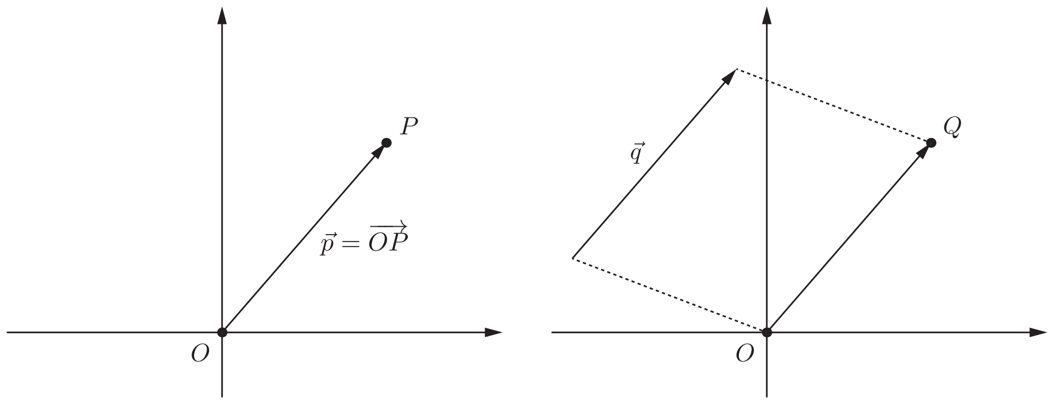

図 1.12　平面上の点の位置ベクトル（点とベクトルの対応）

空間上の点の位置ベクトルもまったく同様に定義される．

[*5] 点と位置ベクトルとの対応は，座標系（厳密には点 O）を一つ固定すると定まることに注意せよ．

ベクトルの成分表示

任意の平面ベクトル $\vec{p}$ に対して，このベクトルを位置ベクトルする点 P が定まる．このとき，P の座標 (x_1, x_2) をベクトル $\vec{p}$ の成分といい，$\vec{p} = (x_1, x_2)$ と表す（これをベクトルの成分表示[*6]という）．

平面に直交座標系 $\{O; E_1, E_2\}$ を 1 つ定めると，2 つのベクトル $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$，$\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ が自然に定まる（単位点の位置ベクトル）．これを座標系の基本ベクトルとよぶ．点 $P(x_1, x_2)$ を各座標軸に下ろした垂線の足をそれぞれ P_1, P_2 とすると，ベクトルの和の定義より，$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$ である．一方，スカラー倍の定義より，$\overrightarrow{OP_1} = x_1\overrightarrow{OE_1}$，$\overrightarrow{OP_2} = x_2\overrightarrow{OE_2}$ である．つまり，ベクトルの成分表示 $\vec{p} = (x_1, x_2)$ は基本ベクトルを用いて

$$\vec{p} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

と書き表せることを意味する．

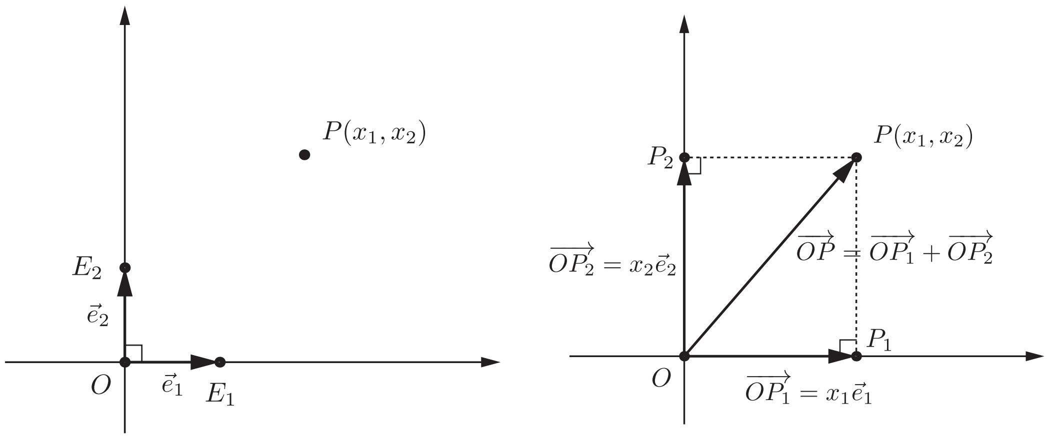

図 1.13　ベクトルの分解

ベクトルの線形演算は成分を用いて以下のように計算することができる．

ベクトルの成分表示と線形演算（平面の場合）

平面ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ と実数 t について，

(a)　$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

(b)　$t\vec{a} = (ta_1, ta_2)$

この性質の証明には，「ベクトルの成分表示 $\vec{p} = (x_1, x_2)$ は，基本ベクトルを使って $\vec{p} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ と書ける」という事実と，線形演算の性質（p.10）を用いる．例えば，

[*6] 点の座標が座標系の定め方依存するのと同様，ベクトルの成分表示も座標系に依存する．

(a) は

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}=&(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2)+(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2)\\=&(a_1\vec{e}_1+b_1\vec{e}_1)+(a_2\vec{e}_2+b_2\vec{e}_2)\\=&(a_1+b_1)\vec{e}_1+(a_2+b_2)\vec{e}_2.\end{aligned}$$

よって，$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$ となる．(b) も同様に示せる（詳細は省略する）．

空間ベクトルの成分表示も同様に考えられる．空間の直交座標系は原点 O と 3 つの単位点 E_1,E_2,E_3 によって定まるので，基本ベクトルは 3 つのベクトルの組 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ である．点 $P(x_1,x_2,x_3)$ の位置ベクトルは $\vec{p}=(x_1,x_2,x_3)$ と成分表示されるが，これは基本ベクトルを用いて $\vec{p}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$ と表されることを意味する．線形演算も次のように計算できる．

ベクトルの成分表示と線形演算（空間の場合）

空間ベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ と実数 t について，

(a)　$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$

(b)　$t\vec{a}=(ta_1,ta_2,ta_3)$

1.2.4　内積とノルム

定義と性質

定義 1.3. 零ベクトルでないベクトル $\vec{a},\vec{b}$ に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ と始点が同一点となるように平行移動する．このとき，$\theta=\angle AOB$ をベクトル $\vec{a},\vec{b}$ のなす角とよぶ（図 1.14 左を参照）．ただし，$0\leq\theta\leq\pi$ とする．

定義 1.4. ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ に対し，実数 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ を

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta \tag{1.1}$$

と定義する（ただし，θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角）．この $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積とよぶ．

内積は次のように幾何的に解釈できる．ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ となるように点 O,A,B を定める．さらに，B から線分 OA に下ろした垂線の足を H とするとき，内積 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ は線分 OA と OH の長さの積である（図 1.14 右を参照）．

内積の定義より，ベクトル $\vec{a}$ のノルムは $\|\vec{a}\|=\sqrt{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle}$ と表すことができる．

ベクトルの内積とノルムは以下の性質を満たす；

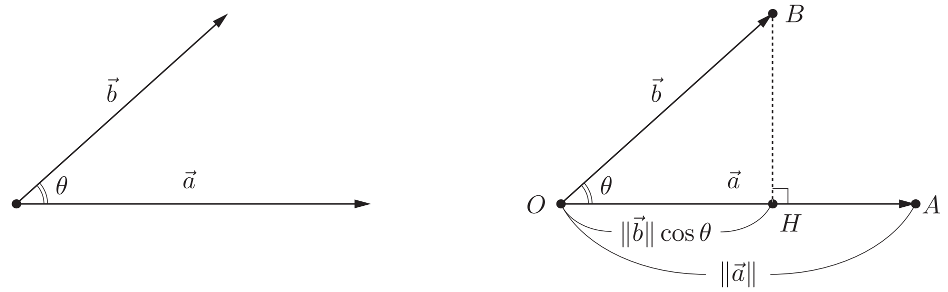

図 1.14　ベクトルのなす角と内積

ノルム $\|\cdot\|$ の性質

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ と実数 t について，以下が成り立つ．

(n-1) $\|t\vec{a}\| = |t|\,\|\vec{a}\|$.
(n-2) 任意の $\vec{a}$ に対して $\|\vec{a}\| \geq 0$ である．$\|\vec{a}\| = 0$ となるのは $\vec{a} = \vec{0}$ のときに限る．
(n-3) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$（これを三角不等式という）．

(n-1) と (n-2) はノルムの定義（p.9）から明らかだろう．(n-3) は「三角形の任意の 2 辺の長さの和は，残りの 1 辺の長さより大きい」ことを意味し，三角不等式と呼ばれている[*7]．図から直観的には理解できるが，これを厳密に示そうとすると，以下の内積の性質を用いなければならない．

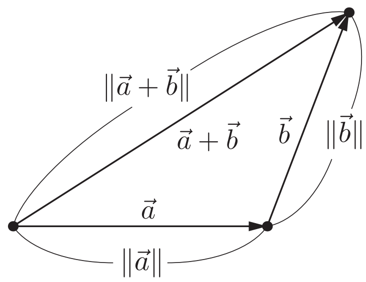

図 1.15　三角不等式

内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の性質

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と実数 t について，以下が成り立つ．

(ip-1) $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \langle\vec{b}, \vec{a}\rangle$．（対称性）
(ip-2) $\langle\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\rangle = \langle\vec{a}, \vec{b}\rangle + \langle\vec{a}, \vec{c}\rangle$．（和に関する線形性）
(ip-3) $\langle\vec{a}, t\vec{b}\rangle = \langle t\vec{a}, \vec{b}\rangle = t\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$．（スカラー倍に関する線形性）
(ip-4) $|\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle| \leq \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$.

[*7] 等号が成り立つのは 3 辺が平行になるとき（つまり，三角形が線分につぶれるとき）である．

(ip-1) は内積の定義式 (1.1) から明らかである．(ip-3) もノルムの性質 (n-1) から，(ip-4) は $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ であることから明らかである．

図 1.16 左の場合について，(ip-2) を証明しよう．$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ と

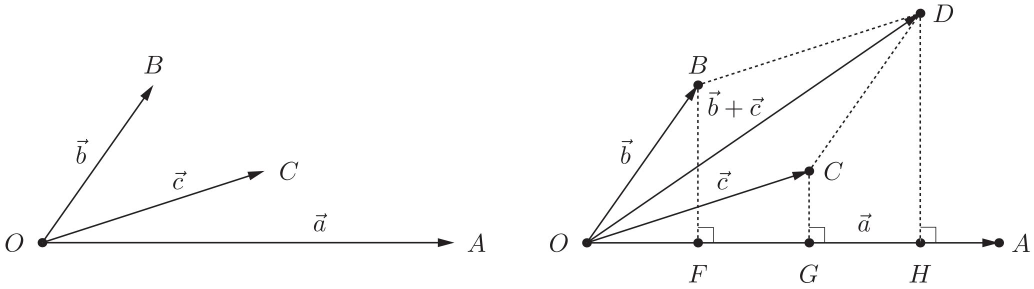

図 1.16　内積の和に関する線形性の証明

し，$\vec{b}+\vec{c} = \overrightarrow{OD}$ とする．また，点 B, C, D から線分 OA に下ろした垂線の足をそれぞれ F, G, H とする（図 1.16 右）．このとき，内積の幾何的解釈（p.13）により，$\langle \vec{a}, \vec{b}+\vec{c}\rangle = |OA|\,|OH|$ である．同様に $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = |OA|\,|OF|$，$\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle = |OA|\,|OG|$．また，$\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ より $|OF| = |GH|$ が成り立ち，4 点 O, F, G, H が一直線上にあるので，$|OG| + |GH| = |OH|$ である．以上のことから，

$$\begin{aligned}
\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + \langle \vec{a}, \vec{c}\rangle =& |OA|\,|OF| + |OA|\,|OG| \\
=& |OA|\,(|OF| + |OG|) \\
=& |OA|\,(|GH| + |OG|) \\
=& |OA|\,|OH| = \langle \vec{a}, \vec{b}+\vec{c}\rangle
\end{aligned}$$

となる．

三角不等式の証明

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対し，$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2$ を計算する．内積の線形性 (ip-2) と内積の評価式 (ip-4) より，

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 =& \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}\rangle \\
=& \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + \langle \vec{b}, \vec{a}\rangle + \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle \\
=& \|\vec{a}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + \|\vec{b}\|^2 \\
\leq& \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 = (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2.
\end{aligned}$$

$\|\vec{a}+\vec{b}\| \geq 0$ より，$\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ を得る．

内積の成分表示

平面ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ の内積 $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle$ が，成分を用いてどのように表わされるか調べる．ベクトルの成分表示の定義から，$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$ と書ける．ここで，$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ はその定義より，それぞれノルムが 1 でなす角は $\frac{\pi}{2}$ であるから，

$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ となる．ここで，δ_{ij} はクロネッカーの $\boldsymbol{\delta}$ とよばれ，

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義される記号である．このとき，内積の線形性 (ip-2)(ip-3) より，

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =& \langle a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \rangle \\ =& \langle a_1\vec{e}_1, b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \rangle + \langle a_2\vec{e}_2, b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \rangle \\ =& \langle a_1\vec{e}_1, b_1\vec{e}_1 \rangle + \langle a_1\vec{e}_1, b_2\vec{e}_2 \rangle + \langle a_2\vec{e}_2, b_1\vec{e}_1 \rangle + \langle a_2\vec{e}_2, b_2\vec{e}_2 \rangle \\ =& a_1b_1\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + a_1b_2\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle + a_2b_1\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle + a_2b_2\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle \\ =& a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

を得る．

内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の成分表示

(1) 平面ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ に対し，

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2.$$

(2) 空間ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し，

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

三角形の面積と内積

零ベクトルでないベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対し，$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とする．このとき，$\triangle OAB$ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2} \tag{1.2}$$

に等しいことを示そう．

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\triangle OAB$ の面積は $\frac{1}{2}|OA|\,|OB|\sin\theta$ と書ける．$0 \leq \theta \leq \pi$ より，$\sin\theta \geq 0$ であるから，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|OA|\,|OB|\sin\theta =& \frac{1}{2}\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ =& \frac{1}{2}\sqrt{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2\cos^2\theta} \\ =& \frac{1}{2}\sqrt{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - \left(\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta\right)^2} \\ =& \frac{1}{2}\sqrt{\|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2} \end{aligned}$$

となることがわかる．

1.2.5　空間ベクトルの外積

定義と性質

内積は 2 つのベクトルに対して実数を対応させる演算だったが，本小節で扱う外積は 2 つの空間ベクトルに対して空間ベクトルを対応させる演算である．

定義 1.5. 直交座標系を定めた空間のベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対し，

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} =& (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ =& \left(\det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix},\ \det\begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix},\ \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\right)\end{aligned} \tag{1.3}$$

を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積とよぶ．

座標空間の基本ベクトル $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ を形式的にスカラーとみなすと，$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の外積は

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

と表すこともできる．この形式的な表記は次の外積の性質を理解するのに有用である．

空間ベクトルの外積の性質

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と実数 t について，以下が成り立つ．

(ep-1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$．（交代性）
(ep-2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$．（和に関する線形性）
(ep-3) $(t\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b}) = t(\vec{a} \times \vec{b})$．（スカラー倍に関する線形性）
(ep-4) $\langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = 0$.

上記の性質はベクトルを成分表示して右辺と左辺を計算し，両者が等しくなることを示せばよい．しかし，外積の形式的表記 (1.4) を用いると行列式の性質から直ちに示すことができる．(ep-1) は「任意の 2 つの行，または列を入れ替えると行列式の値は (-1) 倍される」ことに，(ep-2) (ep-3) は行列式の行または列に関する線形性による．(ep-4) については，$\langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle$ を計算してみると

$$\begin{aligned}\langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle =& a_1 \det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} + a_2 \det\begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix} + a_3 \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ =& \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり，「ある 2 つの行，または列が同じであれば，その行列の行列式は 0 である」ことから，0 となることがわかる．一般に $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$，$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ に

対し，

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

が成り立つ．これを空間ベクトルの **3 重積**という．行列式の性質から，3 重積が次の等式を満たすことが直ちにわかる;

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \times \vec{a} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle. \tag{1.6}$$

外積のノルムと向き

外積の性質 (ep-4) は「外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交するベクトルである」ことを意味する．したがって，ノルムと向きがわかれば，外積の完全な特徴付けが得られる．

外積のノルムについては次の事実が成り立つ．

定理 1.6. 空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の外積のノルム $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積に等しい．

Proof. $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を 2 辺とする三角形の面積の 2 倍だから (1.2) より，$\sqrt{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}$ に等しい．この式にベクトルの成分を代入して計算したものと，外積の定義 (1.3) からノルムを計算した式とが等しいことを示せばよい (計算は省略する)． □

外積の向きを議論する前に，「(順番付き) 3 つの空間ベクトルの向き」という概念を定義する．まず，空間の直交座標系を与える 3 つの基本ベクトル $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ をこの順番で「右手系」となるように定める．これは右手の親指，人差し指，中指をそれぞれが互いに直交するようにまっすぐ伸ばしたとき，$\vec{e}_1$ を親指，$\vec{e}_2$ を人差し指，$\vec{e}_3$ を中指の向きとなるようにすることである．このような座標系において，3 つのベクトル $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ が右手系で

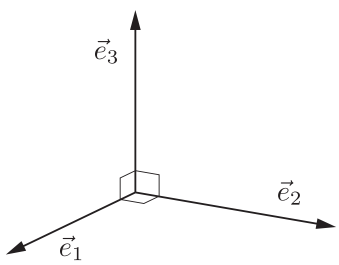

図 1.17　「右手系」の基本ベクトル

あるとは，3 重積 $\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$ が正であることと定義する．

零ベクトルでない 2 つの空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ の 3 重積は

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}) \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 \geq 0$$

であるから，$\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$ ならば，$\{\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\}$ は右手系の向きを持つ．これは，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ に向かって回転したとき*8，右ねじの進む方向が $\vec{a}\times\vec{b}$ であることを意味する．

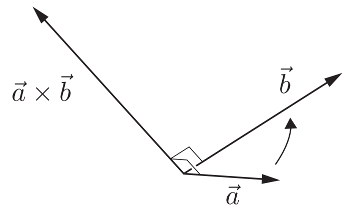

図 1.18　外積の向き

1.3　基底と座標系

基底とは

定義 1.7. ベクトル $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r$ に対し，それらをスカラー倍した和のベクトル

$$k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+\ldots+k_r\vec{v}_r$$

を $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r$ の線形結合という．

ベクトルの成分表示 $\vec{p}=(x_1,x_2,x_3)$ とは，直交座標系の基本ベクトル $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ を用いて，$\vec{p}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$ と表せることと同値であった．つまり，ベクトルの成分とは「基本ベクトルの線形結合で表したときの係数」のことである．これは「任意のベクトルは，基本ベクトルの線形結合として表すことができる」ことを意味する．

定義 1.8. 任意の平面ベクトルが，$\vec{v}_1,\vec{v}_2$ の線形結合で表せるとき，$\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ を平面の基底という*9．特に $\langle\vec{v}_i,\vec{v}_j\rangle=\delta_{ij}$ を満たす基底を正規直交基底という．

定義 1.9. 任意の空間ベクトルが，$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ の線形結合で表せるとき，$\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ を空間の基底という．特に $\langle\vec{v}_i,\vec{v}_j\rangle=\delta_{ij}$ を満たす基底を正規直交基底という．

基本ベクトルは座標系から自然に定まる正規直交基底である．

---

*8 $\vec{a}$ から $\vec{b}$ への回転角が π より小さくなるように回転する．

*9 基底を厳密に定義するには，線形独立という概念が必要である．ベクトルの組 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r$ が線形独立とは，

$$k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+\ldots+k_r\vec{v}_r=\vec{0}$$

を満たすスカラーが $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ のみのときをいう．線形独立でないベクトルの組を線形従属であるという．$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r$ が線形従属ならば，この中の少なくとも 1 つのベクトルは他のベクトルの線形結合で表すことができる．
平面（または空間）の基底とは，線形独立かつ任意の平面（空間）ベクトルを線形結合によって表すことのできるベクトルの組 $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_r\}$ のことである．実際には，2 つの（3 つの）線形独立なベクトルは平面（空間）の基底となることがわかる．

基底の性質

基底とはどのようなベクトルの組として特徴付けることができるだろうか．たとえば，与えられたベクトルの組が基底をなすか否かを判定する手段はあるだろうか？これについては次の定理が成り立つ．

定理 1.10. ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$，$\vec{b} = (b_1, b_2)$ が平面の基底であるための必要十分条件は

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

定理 1.11. ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$，$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ が空間の基底であるための必要十分条件は

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

ここでは，空間の場合（定理 1.11）について説明する．$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ が空間の基底とは，「どんなベクトル $\vec{p}$ も $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の線形結合として表すことができる」こと，すなわち「任意の $\vec{p}$ に対し，$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ を満たす実数 x, y, z が存在する」ことだった．これは，任意の (p_1, p_2, p_3) に対し，連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = p_3 \end{cases} \tag{1.7}$$

が解をもつことを意味する．ここで，

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

とおくと[*10]，連立方程式 (1.7) は $M\vec{x} = \vec{p}$ と書ける．定理の条件 $\det(M) \neq 0$ は，「M が正則行列[*11]である」ことと同値であるから，次の命題を示せばよいことがわかる．

命題 1.12. 任意の $\vec{p}$ に対し，連立 1 次方程式 $M\vec{x} = \vec{p}$ が解をもつための必要十分条件は，M が正則行列であることである．

Proof. M が正則行列ならば，$M\vec{x} = \vec{p}$ の両辺に左から M^{-1} を乗ずることにより，解は $\vec{x} = M^{-1}\vec{p}$ となる．

しかし，M が正則行列でないならば $\mathrm{rank}(M) < 3$ であるが，$\vec{p}$ によっては $\mathrm{rank}(M) < \mathrm{rank}(M\ \vec{p})$ となることがある[*12]．したがって，この場合は $M\vec{x} = \vec{p}$ は解を持たない．□

[*10] 以後，ベクトルを成分表示するとき，成分を縦に並べて表記することもあることに注意せよ．

[*11] M が正則行列とは，逆行列 M^{-1} が存在することである．3 次正方行列 M が正則であること，$\det(M) \neq 0$，$\mathrm{rank}(M) = 3$ は互いに同値な条件である．

[*12] 連立 1 次方程式 $M\vec{x} = \vec{p}$ の解が存在するための条件は，係数行列 M と拡大係数行列 $(M\ \vec{p})$ の階数が等しくなること $\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(M\ \vec{p})$ である．

例 **1.13.** 平面ベクトル $\vec{a}=(1,2)$, $\vec{b}=(-2,1)$ について次の問に答えなさい．

(1) $\{\vec{a},\ \vec{b}\}$ が平面の基底であることを示しなさい．

(2) $\vec{p}=(1,3)$ を $\vec{a},\ \vec{b}$ の線形結合で表しなさい．

解． (1) $\det\left(\vec{a}\ \vec{b}\right)=\det\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=1-(-4)=5\neq 0$．したがって，$\{\vec{a},\ \vec{b}\}$ は平面の基底である．

(2) 求めるものは $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$ を満たす数 x,y である．これは

$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\quad\text{つまり，連立 1 次方程式}\quad\begin{cases}x-2y=1\\2x+y=3\end{cases}$$

を解くことに他ならない．逆行列を用いてこれを解くと，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$$

となる．したがって，$\underline{\vec{p}=\frac{7}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}}$ となることがわかる．

正規直交基底と直交座標系

（直交）座標系とは，原点 O と単位点 E_i [*13]（平面の場合は 2 つ，空間の場合は 3 つ）によって定まり，単位点の位置ベクトルとして基本ベクトル $\vec{e}_i$ が定まる．空間の場合は，任意のベクトル $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$ に対し，$\vec{p}=p_1\vec{e}_1+p_2\vec{e}_2+p_3\vec{e}_3$ となること，さらに $\langle\vec{e}_i,\vec{e}_j\rangle=\delta_{ij}$ を満たすことから，$\{\vec{e}_i\}$ は正規直交基底である．

逆に，正規直交基底 $\{\vec{v}_i\}$ と点 O' が与えられれば，同様の（逆の）手順で直交座標系が定まる．つまり，どんな点 Q に対しも，$\vec{q}=\overrightarrow{O'Q}$ は $\vec{v}_i$ の線形結合 $\vec{q}=q_1\vec{v}_1+q_2\vec{v}_2+\cdots$ で表せるので，その係数 $q_1,q_2,\ldots$ を Q の座標と定義すればよい．

以後（特に，第 4 章の「座標変換」）では，「（直交）座標系とは 1 点と（正規直交）基底から定まるもの」と考える．

[*13] 単位点が決まれば，原点と単位点を通る数直線（座標軸）が決まる．