

ハイポイドギヤの三次線接触かみ合いと歯当たり

桐 昭弘, 寺上 直人, 伊藤 紀男

Hypoid Gear Line Contact Meshing using Third-Order Surface and Tooth Contact Pattern

Akihiro KIRI, Naoto TERAGAMI, Norio ITO

Hypoid gears are the most general form of gearing, and their theoretical solution have been long in coming. Many guesses or theorems about the gearing have been proposed, but some of them correct and many of them wrong. The tooth surfaces are parts of general curved surface and they must have principal directions and principal curvatures on every contact point. But there have been no discussion on such fundamental elements of the surface and they are still based on a contact analysis of second-order tooth surface. In this report, the tooth surfaces of a hypoid pinion and gear meshing with each other in line contact are expressed by third-order surface, and the requirements for those two surfaces to be in line contact are discussed, and the relationships between the third-order surface coefficient and the contact pattern of the surface are investigated theoretically to analyze the tooth bearing pattern.

Key Words : Hypoid Gear, Theoretical Study, Tooth Bearing, Third-Order Line Contact, Curvature Derivative, Torsion Derivative

1. 緒 論

ハイポイドギヤは最も一般的な食違い軸歯車である。歯すじ方向が運動学的な瞬間軸方向に一致する場合は、いわゆるスキューギヤであり、二軸の共通垂線上にピッチ点がある場合が、ねじ歯車である。また、二軸が交差する場合は、まがりばかさ歯車に相当し、二軸が平行な場合が、はずば歯車として考察される。このようにハイポイドギヤに関する歯形論は、あらゆる歯車に共通なものとして成り立つのである。また、歯車の歯当りは、歯車の生産現場においては、歯車の性能を総合的に評価する上において不可欠なものとなっている。歯当たりの形状をいかに優れたものにするかが、歯車性能の良否を決定づけることになる。特に、まがりばかさ歯車やハイポイドギヤのように、複雑な歯形曲面を持つ歯車では、その歯車装置が正常に機能しているかどうかの判断は、歯当たりの状態によって決まる。もし、歯当たりの状態が満足できない場合には、歯切りの段取りを修整して、目標とする歯当たりが得られるまで試行錯誤が繰り返される。このように歯当たりに関する技術は、歯車の中で

も重要な技術の一つとなっている。

一方、最近の測定技術の進歩とその自動化によって、三次元座標測定機などを利用したハイポイドギヤ歯面形状測定が盛んに行われるようになってきた⁽¹⁾。これは歯切り盤上のカッターの運動によって得られる幾何学的歯面を基準歯面として、実際に歯切りされる歯面との間でその誤差を測定しようとするものである。すなわち、これまでのマスターギヤに相当するものを基準歯面に置き換えたということになる。しかし、実際の歯車歯面の誤差を正確に測定したとしても、それをいかに歯切り盤の段取り変化量に対応させるかは、かみ合い歯面の精度や歯切り機構の厳密な解析がなされなくては、これまでと同様に試行錯誤に頼らざるを得ないことになる⁽²⁾。

そこで、本報告では、これまで本研究室が取り組んできたハイポイドギヤの歯形論において、歯面をより高次の曲面によって表示し、それら歯面間の厳密なかみ合い解析を行うことによって、従来の方法より精度の高い線接触かみ合い条件とそれによって得られる歯当たりとの関係について明らかにする。

2. ギヤノイズと歯当たり

一般に、歯車装置で問題となるギヤノイズの要因には、歯車精度に起因する回転むらと歯車対のかみ合い振動に基づくものがある。歯車精度の中でも歯形の精度は特に大きな要因の一つとなっている。歯形の精度は加工機械の精度によって定まることになる。例えば、単独歯車の歯形精度の限界を1ミクロン以内にするには、研磨歯形においても困難であり、2ミクロン以内が限界と考えられる。したがって、歯車対としての相対誤差は4ミクロンとなる。自動車用トランスミッションの歯形の精度は2/10,000インチ、すなわち約5ミクロン以内とされている。ところが、前述の歯当たりの周縁のクリアランスは、実測によると2/10,000インチであり、さらに歯当たりの濃淡を読み取れば、2ミクロンの相対誤差まで読み取ることができる。このように歯当たりによる測定は、一見前時代的な測定法のように考えられるが、実際には精密なインポリュート歯形試験機よりもはるかに高精度な試験方法といえる。このように歯当たりの濃淡を識別しながら、歯車のかみ合い精度を論ずる方式が、歯当たりの“見立て”と言われるもので、これらは現場の熟練技術者によってなされている。こうしてギヤノイズの発生は、歯当たりの形とその当たりの濃淡の度合いによって決まることになる。

3. 線接触かみ合い

自動車用ハイポイドギヤは、そのほとんどが米国のグリーンソン社の歯切り盤によって生産されている⁽³⁾。ところが、“グリーンソン歯形は点接触かみ合いであるから良くない。”とか、“勾配歯であるから良くない。”などと言われることがある。しかし、このような考え方は誤りであり、グリーンソン方式によっても等速点接触かみ合いが実現できれば、ギヤノイズは生じないのである。このことは、現在のグリーンソン方式に限らず、他のハイポイドギヤ歯切り法においても、等速点接触かみ合いが全く保証されていないのである。その結果として、グリーンソン社では、多くの経験によって築き上げられた歴史的な“Tooth Bearing Development”なるものが生まれたといえる。ここではまず、等速点接触かみ合いと歯当たりについて述べる。

図1は、ハイポイドギヤのギヤとピニオン(ピニオンは歯面のみが示してある。)の瞬間的な接触状態を示したものである。かみ合い運動の基本は線接触かみ合いであるから、二つの歯面の接触は線接触となっている。図1で破線で示された瞬間的な接触線が歯車の回転とともに、ギヤ歯面上を小さな矢印の方向に移動する。一对の歯のかみ合いが終了すると、その接触線は歯面全面を移動し、結果と

して全面歯当たり(ベタ当たり)となる。図1に斜線で示された部分が、ピニオン歯面との間で瞬間的に生じるギヤ歯面上の歯当たりである。

図2は、点接触かみ合いによって生じる歯当たりを示したものである。図1のギヤの歯面に相当する曲面は X_{2a} で表され、その内側にクラウニングされた歯面と考えられる曲面 X_2 が示されている。曲面 X_{2a} は一本の曲線 yy に沿って曲面 X_2 に固着されているものとする。曲面 X_{2a} とピニオン歯面とは線接触のかみ合いをなし、そのときの瞬間接触線 aa は曲面 X_{2a} の全面を覆うことになる。一方、各瞬間における接触線は、曲面 X_2 と曲線 yy で交わり、曲面 X_2 とピニオン歯面はその交点で点接触のかみ合いをなすことになる。その接触点の軌跡が曲線 yy であり、点Pにおける瞬間的な当たりが楕円状に示したものととなる。以上の結果として曲面 X_2 上には、 yy を中心線とする斜線で示したような歯当たりを生じ、歯当たりの強さが曲線 yy に沿って一様であれば、理論的に等速点接触かみ合いをなすことになる。このときの歯当たりの周縁部の隙間が5ミクロンということである。

しかし、これまでの歯当たりの濃淡による検査法は、歯当たりを定量的に表したものとはいえない。そこで、歯当たりを二つの歯面の間で等しい隙間をもつ点を一本の線で結んだ等隙間線で表し、より定量的に歯当たりを示すことを考える。そのためには、従来の二次の微分幾何学では解析が不可能なため、歯面を三次曲面として表示する方法について考察しなければならない。

4. 三次曲面による歯面表示法

歯車歯面を三次曲面として表示するために必要な座標系と記号について説明する。

図3に示すように、歯面を表す曲面上のほぼ中央の点Pで、曲面に接する平面を描く。点Pを原点とし、その接平面上に互いに直交する y 、 z 軸を、それらに垂直に x 軸を右手系の座標系として定める。 x 軸は曲面の法線方向に一致する。曲面上の各点には互いに直交する主方向が存在する。原点Pでそ

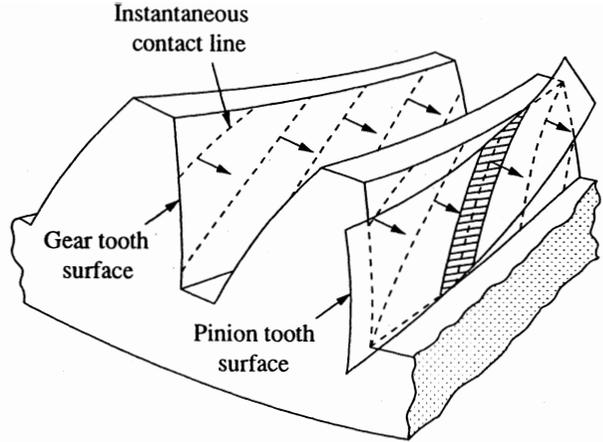


図1 歯面の接触

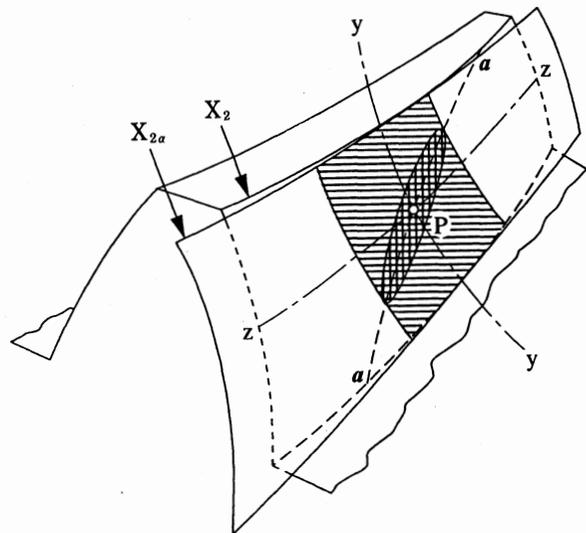


図2 点接触かみ合いと歯当たり

れら主方向にそって s' , s'' 軸を定めると、 s' , s'' 軸は接平面上にあって、 x 軸と直交することになる。これより、曲面上には P - xyz 座標系と P - $x's's''$ 座標系が定められたことになる。

次に、曲面上に考察点を原点 P とし、原点 P の近傍の点 Q から、接平面上に垂線を下ろし、その足を Q' とする。 QQ' は s' , s'' の関数であるから、 $QQ' = f(s', s'')$ と表す。 $f(s', s'')$ は s' , s'' の無限級数に展開することができる。歯車歯面を三次曲面で表示するためには、この $f(s', s'')$ の展開式の三次の項の係数まで明確にしなければならない。そこで曲面上の任意の点を、原点 P からの位置ベクトル $X(s', s'')$ で表すと、曲面は s' , s'' の三次式を成分にもつ列ベクトルで表示することができる⁽⁴⁾。

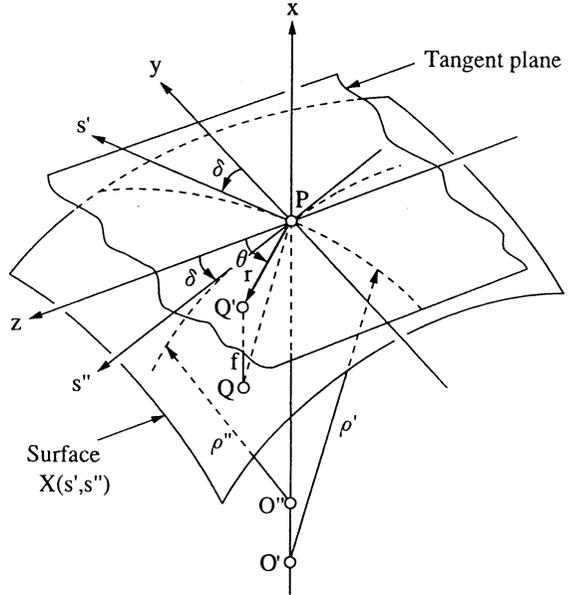


図3 三次曲面の表示法

$$X(s', s'') = \begin{bmatrix} -f(s', s'') \\ s' \\ s'' \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

$$f(s', s'') = \frac{1}{2} \left(\frac{s'^2}{\rho'} + \frac{s''^2}{\rho''} \right) + \frac{1}{6} (Gs'^3 + 3Hs'^2s'' + 3Ls's''^2 + Ms''^3) \dots\dots\dots (2)$$

式(2)の ρ' , ρ'' は、原点 P における曲面 $X(s', s'')$ の s' , s'' 方向の主曲率半径で、その曲率の中心は x 軸上の点 O' , O'' である。 G, H, L, M は s' , s'' の三次の項の係数で、具体的には考察点 P における主曲率の $1/\rho'$, $1/\rho''$ の s' , s'' 方向の変化率である。これら G, H, L, M は三次曲面の特徴を表すものであるから、三次の歯面係数と呼ぶことにする。

以上によって、任意の歯面は考察点の近傍で三次曲面として表示することができる。

5. ハイポイドギヤ歯面の表示

図3の原点 P をハイポイドギヤのピッチ点とする。点 P けるかみ合い歯面間の相対速度を w とすると、 w は歯面の法線 (x 軸) と直交し、接平面 (yz 平面) 上のベクトルとなる。いま、 $-w$ の向きを z 軸、 z 軸と s'' 軸とのなす角を δ とする。 δ はギヤのデデンダム角を歯面上で測定した角度に相当する。点 Q' を接平面上の極座標で表すために、 $PQ' = r$, PQ' が z 軸となす角を θ とすると、式(1), (2) は次のように書き換えられる。

$$X(r, \theta) = \begin{bmatrix} -f(r, \theta) \\ -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$$f(r, \theta) = \frac{r^2}{2}V(\theta) + \frac{r^3}{6}X_s(\theta) \dots\dots\dots (4)$$

$$V(\theta) = \frac{\sin^2(\theta-\delta)}{\rho'} + \frac{\cos^2(\theta-\delta)}{\rho''} \dots\dots\dots (5)$$

$$X_s(\theta) = -G \sin^3(\theta-\delta) + 3H \sin^2(\theta-\delta)\cos(\theta-\delta) - 3L \sin(\theta-\delta)\cos^2(\theta-\delta) + M \cos^3(\theta-\delta) \dots\dots\dots (6)$$

これらの式によって、歯面は考察点の近傍で、円筒座標系で表されたことになる。

次に、かみ合い運動により歯面が回転する場合について考える。点Pにおける歯面の単位法線ベクトル \mathbf{n} は、式(3)より、次のように求められる。

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+f_r^2 + \left(\frac{f_\theta}{r}\right)^2}} \begin{bmatrix} -1 \\ f_r \sin \theta + \frac{f_\theta}{r} \cos \theta \\ -f_r \cos \theta + \frac{f_\theta}{r} \sin \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $f_r = \partial f / \partial r$ 、 $f_\theta = \partial f / \partial \theta$ である。歯面の接触条件は

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

であり、歯面 $X(r, \theta)$ が歯車軸を表す単位ベクトル \mathbf{a} のまわりに ϕ だけ回転したときの歯面を $X'(r, \theta)$ とすると、

$$X'(r, \theta) = l + \Omega(\mathbf{a}, \phi)(X-l) \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここで

$$\Omega(\mathbf{a}, \phi) = J_1 + J_2 \cos \phi + J_3 \sin \phi$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_1 u_2 & u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & u_3^2 \end{bmatrix}, \quad J_2 = 1 - J_1, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

式(9)の l は歯車軸 \mathbf{a} の位置ベクトルを表し、 u_1, u_2, u_3 はベクトル \mathbf{a} の方向余弦である。これらの関係を用いることによって、歯面が任意の角度 ϕ 回転した後も、歯面を精密に計算することが可能となる。すなわち歯当たりパターンは歯面の中央部だけでなく、内端部や外端部に移動した場合も、歯当たりを計算によって求めることができることになる。

6. 三次曲面の線接触条件

図2で示した X_2 と X_{2a} の曲面のように、二つの三次曲面が剛体的に線接触するために必要な条件について考察し、三次曲面の二次および三次の項の係数間の関係式を導く。

三次曲面で表された曲面上の曲線に関し、原点Pにおける曲線方向の曲面の法曲率 $1/\rho_s$ と測地的振率 $1/\tau_s$ について求めると、次のような関係式が得られる⁽⁵⁾。

$$\frac{1}{\rho_s} = \frac{\sin^2(\alpha - \delta)}{\rho'} + \frac{\cos^2(\alpha - \delta)}{\rho''} \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{1}{\tau_s} = -\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho''}\right)\sin(\alpha - \delta)\cos(\alpha - \delta) \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 α は原点での曲線の接線方向とz軸とのなす角度である。また、曲線のフルネ標構を ξ_1^* , ξ_2^* , ξ_3^* とすると、ブーケの公式によって、曲線は弧長 s の三次式によって、次のように表すことができる⁽⁶⁾。

$$\left. \begin{aligned} \xi_1^* &= s - \frac{s^3}{6\rho_c^2} \\ \xi_2^* &= \frac{s^2}{2\rho_c} + \frac{s^3}{6}L_c \\ \xi_3^* &= \frac{s^3}{6\rho_c\tau_c} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

式中の $1/\rho_c$, $1/\tau_c$, L_c は、それぞれ曲線の原点における曲率、捩率、曲率の微係数 $d(1/\rho_c)/ds$ である。式(12)が式(3)で表された三次曲面に重なり、かつ曲線が二つの曲面 X_i , X_j の共通の接触線となるためには、次の条件式が必要となる。

$$\frac{1}{\rho_s} = \frac{\sin^2(\alpha - \delta_i)}{\rho'_i} + \frac{\cos^2(\alpha - \delta_i)}{\rho''_i} = \frac{\sin^2(\alpha - \delta_j)}{\rho'_j} + \frac{\cos^2(\alpha - \delta_j)}{\rho''_j} \dots\dots\dots (13)$$

ここで、添字 i, j はそれぞれ曲面 X_i, X_j に関する量を表している。

次に、二つの曲面が一つの曲線にそって接触するという事は、その曲線上の任意の点で引いた接線が二つの曲面の接線となり、その曲線に直交する方向に引いた二つの曲面の接線も一致するという事である。このことから、次の条件式が得られる。

$$\frac{1}{\tau_s} = -\left(\frac{1}{\rho'_i} - \frac{1}{\rho''_i}\right)\sin(\alpha - \delta_i)\cos(\alpha - \delta_i) = -\left(\frac{1}{\rho'_j} - \frac{1}{\rho''_j}\right)\sin(\alpha - \delta_j)\cos(\alpha - \delta_j) \dots (14)$$

この式は二曲面の接触線の原点における測地的捩率が⁸、二曲面に関して相等しいことを意味している。さらに、式(13), (14)の結果を用いると、二曲面の線接触に関し、次の条件式が導かれる。

$$\begin{aligned} &-G_i \sin^3(\alpha - \delta_i) + 3H_i \sin^2(\alpha - \delta_i)\cos(\alpha - \delta_i) - 3L_i \sin(\alpha - \delta_i)\cos^2(\alpha - \delta_i) \\ &+ M_i \cos^3(\alpha - \delta_i) = -G_j \sin^3(\alpha - \delta_j) + 3H_j \sin^2(\alpha - \delta_j)\cos(\alpha - \delta_j) \\ &- 3L_j \sin(\alpha - \delta_j)\cos^2(\alpha - \delta_j) + M_j \cos^3(\alpha - \delta_j) \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

これは三次の歯面係数を決定するのに必要な関係式の一つである。三次の歯面係数に関する他の一つの関係式は、二曲面の接触線の原点における測地的曲率半径を ρ_g とすると、二曲面の法曲率に関する一般式を θ で微分することにより、次の式を得る。

$$\rho_g \{ Y_{si}(\alpha) - Y_{sj}(\alpha) \} = \left(\frac{1}{\rho'_i} - \frac{1}{\rho''_i}\right)\cos 2(\alpha - \delta_i) - \left(\frac{1}{\rho'_j} - \frac{1}{\rho''_j}\right)\cos 2(\alpha - \delta_j) \dots\dots\dots (16)$$

ここで、

$$Y_s(\alpha) = G \sin^2(\alpha - \delta) \cos(\alpha - \delta) + H \sin(\alpha - \delta) \{1 - 3 \cos^2(\alpha - \delta)\} \\ + L \cos(\alpha - \delta) \{1 - 3 \sin^2(\alpha - \delta)\} + M \sin(\alpha - \delta) \cos^2(\alpha - \delta) \dots\dots\dots (17)$$

以上、式(13)、(14)、(15)、(16)の4式は、二つの三次曲面が考察点の近傍において、剛体的に線接触するための微分幾何学上の条件である。

7. 三次曲面の線接触かみ合い条件

ここでは、三次曲面で表された一对の歯面が線接触のかみ合い運動をなす場合、それら歯面間に生じる瞬時接触線や歯すじの性質を三次曲面との関係において考察する。なお、6章で得られた結果は、かみ合い運動をなす歯面間の各瞬間における接触線上で同様に成立すべき式である。

ところで、歯面間のかみ合い運動に関する条件は、歯面の接触点であるピッチ点が、ピッチ線にそって移動することであり、また同時に、歯面上で考えるならば、そのピッチ点が歯すじにそって移動することでもある。このことから、かみ合い条件式である歯面の歯すじ方向の法曲率ならびに測地的振率の式を、歯すじに沿って微分し、それらの変化率を求めることができる。こうして、三次曲面の二次および三次の項の係数の間に新たな関係式を求めることができる。

いま、三次曲面で表された歯面 $X(r, \theta)$ 上の考察点 P を通る歯すじ曲線は、歯面上の瞬時接触線と点 P で交わり得る。点 P の近傍で歯すじ方向の歯面の法曲率を $1/\rho$ 、測地的振率を $1/\tau$ とすると、これらは前述した曲面上の任意の曲線にそった方向の法曲率と測地的振率に関する式と同様にして、次のように求められる。

$$\frac{1}{\rho} = f_{rr} + \frac{2}{r'} \left(f_{r\theta} - \frac{1}{r} f_{\theta} \right) \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{f_{r\theta}}{r} + \frac{f_{\theta}}{r^2} + \frac{1}{r'} \left(r f_{rr} - f_r - \frac{f_{\theta\theta}}{r} \right) \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 $r' = dr/d\theta$ である。これらを歯すじの弧長 s で微分し、あらためて二つの歯面について考えるために添字 i を付すと、次のように整理される⁽⁷⁾。

$$\frac{d}{ds_i} \left(\frac{\cos \phi}{\rho_i} \right) = -\frac{2}{\rho_{gi}} \left(\frac{1}{\tau_i} \right) + X_i \dots\dots\dots (20)$$

$$X_i = G_i \sin^3 \delta_i + 3H_i \sin^2 \delta_i \cos \delta_i + 3L_i \sin \delta_i \cos^2 \delta_i + M_i \cos^3 \delta_i \dots\dots\dots (21)$$

$$\frac{d}{ds_i} \left(\frac{1}{\tau_i} \right) = -\frac{1}{\rho_{gi}} \left(\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_i''} \right) \cos 2\delta_i + Y_i \dots\dots\dots (22)$$

$$Y_i = G_i \sin^2 \delta_i \cos \delta_i - H_i \sin \delta_i (1 - 3 \cos^2 \delta_i) + L_i \cos \delta_i (1 - 3 \sin^2 \delta_i) - M_i \cos^2 \delta_i \sin \delta_i \\ \dots\dots\dots (23)$$

なお、 ρ_{gi} は X_i 歯面上の歯すじの原点における測地的曲率半径である。式(20)、(22)の左辺の微係数と右辺の ρ_{gi} が既知であれば、これら X_i 、 Y_i は、式(21)、(23)より三次の歯面係数を含んでいるため、結局、式(20)、(22)は三次の歯面係数を決定するのに必要な式となる。

8. 三次曲面と歯当たり

従来の歯当たり計算法では、歯当たりの輪郭だけが近似的に求められたが、これは回転比が変化するため歯当たりの形そのものが実際のものとは著しく異なるものである。三次曲面を用いた新しいかみ合い条件に基づく計算法では、歯当たりを1ミクロン間隔の等隙間線で表すため、曲線の混み方、曲線の傾き、曲率などによって歯当たりの性質を詳しく知ることができる。例えば、同じハイポイドギヤの歯切りでも、ルート角を変えることによって得られる歯当たりの濃淡を定量的に表すことができ、それ程の熟練度を必要とすることもなく、歯当たりの見立てを可能にすることになる。ここに、本解析法により、歯当りは定性的なものから定量的な測定へと移行するのである。このことは、計算機による歯切りシミュレーションが可能になったということである。したがって、試作歯切りをすることなく、理想的な段取りのもとに歯切りができることになる。しかし、これをさらに実用化するためには、今後、熱処理変化とラップ作業による変化の解析をも計算に組み入れなければならない。

9. 結 論

互いに共役な関係にある歯車歯面を三次曲面によって表示し、それらが線接触かみ合いをなすために必要な関係式を求め、それによって得られる歯当たりとの関係について考察した。その結果、次のような結論を得た。

- (1) 歯面間の接触線の法曲率及び測地的振率は等しい。
- (2) 歯面間の三次の歯面係数の間には一定の関係式が成立する。
- (3) 歯面間の接触線の測地的曲率に関しても一定の関係式が成立する。
- (4) 両歯面の歯すじの法曲率及び測地的振率の間にも一定の関係式が成立する。
- (5) 両歯面の歯すじの測地的曲率及び測地的振率と三次の歯面係数間にも一定の関係式が成立する。

以上の関係に基づいて計算される歯当りは、1ミクロン間隔の等隙間線図で定量的に表すことが可能となる。

文 献

- (1) 加藤, トヨタ技術, 29-3, (1979), 263.
- (2) 加藤・久保, 機論C, 59-563, (1993), 2245.
- (3) 仙波, 歯車(第7巻), 日刊工業新聞社, (昭37), 2602.
- (4) 窪田, 微分幾何学, 岩波書店, (昭32), 44.
- (5) 高橋・伊藤, 機論C, 50-456, (1984), 1439.
- (6) 安達・佐々木, 微分幾何学概説, 培風館, (昭51), 27.
- (7) 高橋・伊藤, 機論C, 50-456, (1984), 1449.