4.2 行列式 (の定義)2 | 第 4 章 行列式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L24(2023-07-07 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2023-07-07 Fri 12:33 JST hig"

今日の目標

- 行列式の列多重線形性, 交代性, 図形的意味を説明できる
- 転置の行列式, 行列式の積公式を利用できる
- 行列式を, 定義と性質を使って計算できる

L23-Q1

Quiz 解答: 行列式の行多重線形性

$\boldsymbol{a}_2 = 3\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ より，

$$\det\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 11\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 7\end{bmatrix} = 3\det\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 7\end{bmatrix} + 11\det\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 7\end{bmatrix}.$$

第 1 項は対角行列の行列式．第 2 項は $a_{\sigma^{-1}(2)2} = 0$ より zero で，値は $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 7 + 11 \cdot 0$.

L23-Q2

Quiz 解答: 行列式の行交代性

$$\det A = \mathrm{sgn}(\tau) \times \det\begin{bmatrix}9 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ただし，$\tau = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{smallmatrix}\right)$ は互換で $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$ より，$\det A = -1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 1$.

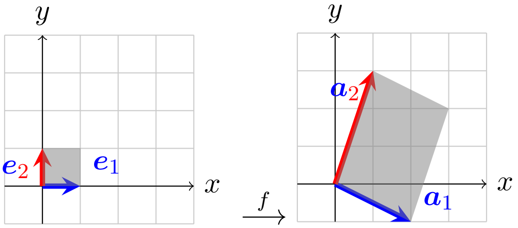
別解 $\det A = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{4\sigma(4)}$ と書いたとき，$a_{i\sigma(i)}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ がすべて zero でないのは，$\sigma = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{smallmatrix}\right)$ のみ.

2 次の行列式と面積・拡大率

加藤 線形代数 なし　2 次正方行列 A, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ は, $\boldsymbol{x}$ を $A\boldsymbol{x}$ に写す.
例 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.
ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は, ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に写る.
$\mathbb{R}^2$ の図の正方形は, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形に写る.



$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は?

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|\sin\theta &= \sqrt{|\boldsymbol{a}_1|^2|\boldsymbol{a}_2|^2(1-\cos^2\theta)} \\
&= \sqrt{(a_{11}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{22}^2) - (a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})^2} \\
&= |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| = |\det A| = 7.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{絶対値 } |\det A| = |\det[\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\,]| \text{ は, } \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \text{ を 2 辺とする平行四辺形の面積}}$

辺に順序をつけたとき，符号付き面積を考えることもある．
1 から 2 に反時計まわりのほうが近い (劣角) なら面積は正．時計まわりが近ければ負．

ここまで来たよ

◆多重線線形性と交代性 (前回の復習)

加藤 線形代数 定理 2-1(p.110)

定理 (行多重線形性)

A: n 次正方行列, $\boldsymbol{a}_i$ 行ベクトル, ある行 i に対して, $\boldsymbol{a}_i = k\boldsymbol{b} + \ell\boldsymbol{c}$.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ k\boldsymbol{b}+\ell\boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} + \ell \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

加藤 線形代数 定理 2-3(p.112)

定理 (行列式の行の置換のもとでの変換)

$\tau : \{1, \ldots, n\}$ の置換.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{\tau(1)} \\ \boldsymbol{a}_{\tau(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{\tau(n)} \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}(\tau) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

行列式がゼロになる場合

系 (加藤 線形代数 定理 2-1,2,3(pp.110-112) の系)

A: n 次の正方行列
$\boldsymbol{a}_i$: i 行目の行ベクトル

- $(\exists i$ s.t.$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}) \Rightarrow \det A = 0.$
- $(\exists i, j(i \neq j), c \in \mathbb{R}$ s.t.$\boldsymbol{a}_i = c\boldsymbol{a}_j) \Rightarrow \det A = 0.$

mobius K4.2.90
s.t.=such that
$\exists x$s.t.条件：条件を満たすような x が存在する.

- 置換に関する和で書いた定義から
- $c = 0, 1$ はやさしい．多重線形性で $c = 1$ に帰着.

行列式のいろいろな性質

行列式は，正方行列に実数を対応させる写像
正方行列にはいろいろな変換や演算があった．それらのもとで，行列式はどう振る舞うのか，を問うのは自然

- kA
- $A+B$
- $\vdots$

◆転置行列の行列式

定理 (転置行列の行列式 加藤 線形代数 定理 2-4(p.113))

$\det({}^{t}A) = \det(A).$

行列の転置の行列式は，元の行列の行列式証明

$$
\begin{aligned}
\det({}^{t}A) &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&\overset{\text{積の並び替え}}{=} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&\overset{\tau=\sigma^{-1}\text{と定義}}{=} \sum_{\tau} \operatorname{sgn}(\tau^{-1}) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} \\
&\overset{\text{逆置換の符号}}{=} \sum_{\tau} \operatorname{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} = \det(A).
\end{aligned}
$$

列多重線形性と列交代性

定理 (加藤 線形代数 定理 2-5, 2-6(p.115))

「列についても行と同様に多重線形性, 交代性 加藤 線形代数 定理 2-1,2,3 がなりたつ」

定理 (加藤 線形代数 練習 5(p.116))

列についても，行と同様な $\det A = 0$ の十分条件 加藤 線形代数 系 2-1(p.112)

行列式にとって, 行と列は同じ性質を持つ

mobius K4.2.70, K4.2.80

◆行列式の積公式

定理 (行列式の積公式 加藤 線形代数 定理 2-7(p.116))

$\det(AB) = \det(A)\det(B).$

積の行列式は，行列式の積 mobius K4.2.90

証明ブロック分けでの積 加藤 線形代数 p.27

$$\det(AB) \overset{\text{ブロック分け}}{=} \det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{ブロックの計算}}{=} \det\begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{1n}\boldsymbol{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{1 行目の行多重線形性}}{=} \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} \\ a_{21}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{2n}\boldsymbol{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{2 行目の行多重線形性}}{=} \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} a_{1i_1}a_{2i_2} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} \\ \boldsymbol{b}_{i_2} \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{b}_1+\cdots a_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{3,\cdots,n \text{ 行目の行多重線形性}}{=\cdots=} \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} \\ \boldsymbol{b}_{i_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{i_n} \end{bmatrix}$$

(*) n^n 個の和のうち, 行が重複して行列式が 0 にならない条件から, 置換 $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{smallmatrix}\right)$ に対応する $n!$ 個だけ残る.

$$\overset{(*)}{=} \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{\sigma(1)} \\ \boldsymbol{b}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{\sigma(n)} \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{行交代性}}{=} \left(\sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \operatorname{sgn}(\sigma)\right) \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{定義}}{=} \det A \det B.$$

補題 (単位行列の行列式 加藤 線形代数 例 4(p.109))

$\det(E) = 1.$

命題 (スカラー倍の行列式)

$k \in \mathbb{R}$, n 次正方行列 A に対して，

$$\det(kA) = \det(kEA) = \det(kE)\det A = k^n \det A$$

加藤 線形代数 定理 2-7(p.116) の系

系 (逆行列の行列式 加藤 線形代数 系 2-2(p.118))

A が正則行列ならば
$\det(A) \neq 0.$
$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

(正則なら) 逆行列の行列式は，行列式の逆数
「$\det$ は, n 次の正則行列全体から, 乗法群 $\mathbb{R}_{\neq 0}$ への群準同型写像である」

ここまで来たよ

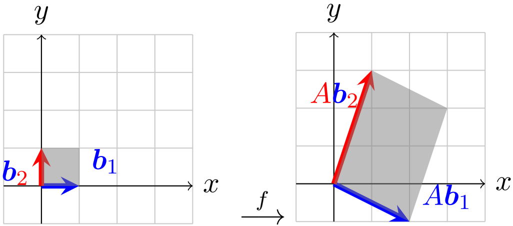
23 4.2 行列式 (の定義) | 第 4 章 行列式

24 4.2 行列式 (の定義)2 | 第 4 章 行列式

- ◆多重線線形性と交代性|2. 行列式
- 行列式の性質の図形的説明
- 3 次の行列式と体積, 体積拡大率

面積拡大率

$\boldsymbol{b}_1 = \left[\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{b}_2 = \left[\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right]$,. 正方形の面積は $\det\left[\,\boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_2\,\right] = 4$.
$A\boldsymbol{b}1, A\boldsymbol{b}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は
$\det\left[\,A\boldsymbol{b}_1 A\boldsymbol{b}_2\,\right] = \det(AB) = \det A \det B$.
正方形と比べて $\det A$ 倍.

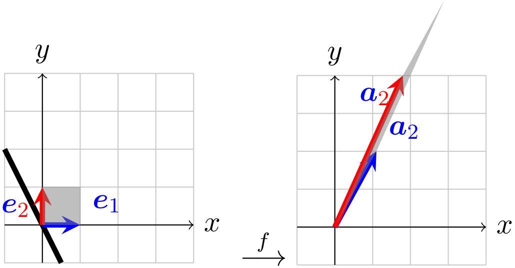


$\boxed{\det A \text{ は，平行四辺形が写されたときの面積拡大率}}$

$\det(A_1)\det(A_2)$：まず A_2, 次に A_1 で写したときの, 累積した拡大率
$\det(A_1A_2)$：を A_1A_2 でいちどに写したときの拡大率
もちろん等しい.
逆写像 f^{-1} を表す A^{-1} の拡大率 (縮小率?) $(\det A)^{-1}$
mobius　K4.2.30

写すと平行四辺形がつぶれるとき

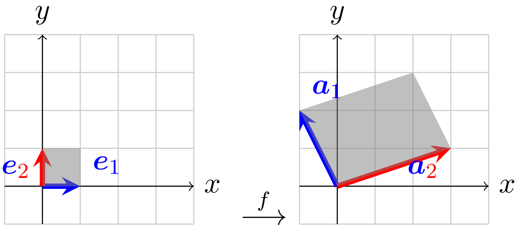
$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が定数倍の関係にあるとき.
$\det\left[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\right] = \det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix} = 0.$



拡大率=0.

平行四辺形が裏返しになるとき

行入れ替え $\leftrightarrow$ x', y' 軸入れ替え.
例: $A = [\, \boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \,] = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.



f の拡大率は $\det A = -7$.
平行四辺形が裏返しに写っているとき ($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の時計回りの順番が逆になっているとき), 拡大率 $\det A < 0$.
符号付き面積が -7 ということもある.

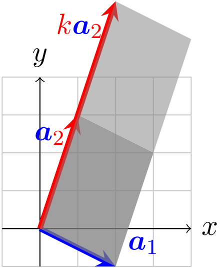
行列式の性質の図形的説明 加藤 線形代数 なし

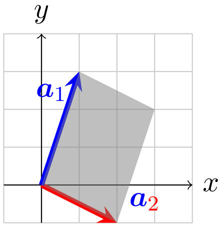
列多重線形性 $k\boldsymbol{a}_2$,
$k=2$

列交代性 $\boldsymbol{a}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{a}_2$

$$\begin{aligned}&\det\begin{bmatrix} 2 & k\cdot 1 \\ -1 & k\cdot 3\end{bmatrix}\\ =&k\times\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3\end{bmatrix}\\ =&k\times 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1\end{bmatrix}\\ =&(-1)\times\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3\end{bmatrix}\\ =&-7\end{aligned}$$





ここまで来たよ

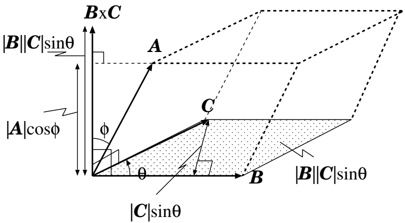
復習

外積 線形代数☆演習 I(2023)L02　加藤 線形代数 p.265-266

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{array}{ccc}\boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1\\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2\\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3\\ & a_1 & b_1\\ & a_2 & b_2\end{array}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}$$

スカラー 3 重積 線形代数☆演習 I(2022)L03

外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ はベクトル.
ということは, 内積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ はスカラー (1 個の実数) になる.
図形的に考えると, 絶対値 $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ は, $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする $\boxed{\text{平行六面体の体積}}$.
右の図は $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}$ を描いている.



平行六面体の体積とスカラー 3 重積と行列式の図形的意味

加藤 線形代数 なし

3 次の行列式は, スカラー 3 重積, すなわち, 平行六面体の符号付き体積に等しい

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \det[\boldsymbol{abc}]$$

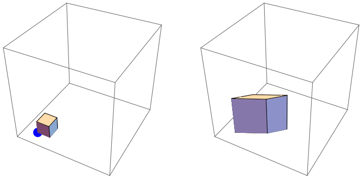
実は, n 次正方行列の行列式 $\det[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ は $\mathbb{R}^n$ で $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を辺とする n 次元の '平行 $2n$ 面体' の符号付き体積.

行列式は行列の「度量の」大きさのようなもの

3 次の行列式は体積拡大率と思える

$A = [\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}]$ の表す 1 次変換で,
$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{a}$ に, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{b}$ に, $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{c}$ に写る.
$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ を 3 辺とする立方体は, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体,
またはそれをつぶした平面, 直線, 点に写る.
行列式 $\det A$ は 1 次変換の拡大率 (裏返しなら負).

$A = \begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$
$\det A = 9$



$A = \begin{bmatrix}2&1&3\\1&3&2\\0&0&0\end{bmatrix}$
$\det A = 0$ (平面につぶれる場合)