全学共通授業科目

物理学実験
平成23年度前期
測定値の扱い方と誤差論
《講義》

神戸大学大学院理学研究科物理学専攻　原俊雄

測定値を他人に提示するとき

- なぜ、誤差を考えなければならないのか？
- なぜ、誤差を測定値に付けなければならないのか？

そもそも、誤差とは何か？

人間は、測定により真の値を知ることができるか？

- 人間は、真の値を知ることはできない。

↓

- 人間は、工夫することによって、限りなく真の値に近づくことができる。

工夫：良い測定器具を開発する。　（技術的手法）

工夫：何回も測定して、平均をとる。（統計的手法）

↓

- それならば、どこまで真の値に近づいたかを、明示する必要がある。

↓

- 誤差の明示の必要性

有効数字　：　近似計算

- 一般に最小目盛りの１目の1/10まで目分量で読む（判定する）。
- 1mm目盛りの物差しで縦と横を測り、その面積を求めたい。
- 縦a=23.6mm、　　　横b=18.7mmと読んだとき

23.55＜a＜23.65　　　18.65＜b＜18.75

面積は　439.2075＜　a×b　＜443.4375

441.32

どこまで信頼できるか？

差：－2.1125　　差：+2.1175

面積の計算値には、±2程度の（最大）誤差がある？

故に　441.32の　１位の桁が少し怪しい。（誤差が出始めた）

0.1位以下の桁は信頼できない。

- このとき、面積は 441mm^2（有効数字は3桁）と表現する。（誤差が出始めた桁は有効としましょう！）

有効数字　：　近似計算

- 第一則　：　計算結果の有効数字の桁数は、計算材料たる測定値の桁数（の少ない方）と等しくとる。

  $2.34 \times 56.78 = 132.8652 \rightarrow 133$ または 1.33×10^2

  ただし、かけ算、割り算の場合

- 第二則　：　計算に使用する定数（例えば、π、g等）は、他の材料数たる測定値の桁数より一桁程度多く取る。

  $2.3 \times 45.6 \times \pi$　　$\pi \rightarrow 3.142$

- 第三則　：　中間計算の結果の桁数は、材料数たる測定値の桁数より一桁程度多く取る。
- ただし、同一測定を数回繰り返して行う場合は、最小二乗法で誤差を求めるが、そのときは、上の3則で、それぞれもう一桁程度多く取らねばならない。

誤差の分布と平均二乗誤差

誤差の定義

$$\varepsilon_i = x_i - X \qquad (i=1,2,3,\cdots n)$$

（i番目の誤差）＝（i番目の測定値）－（真の値）

誤差εの確率密度関数

εとε＋dεの間に誤差がある確率が

f(ε)dε　で表されるとき

f(ε)　を　確率密度関数　と呼ぶ

（ 誤差εが出る確率が f(ε) ）

確率密度関数f(ε)　が、どのような性質を持つかを考えよう

（すなわち、誤差の性質を考えよう）

確率密度関数$f_{(\varepsilon)}$ の性質（要請）

- ① $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ のとき $f_{(\varepsilon_1)} > f_{(\varepsilon_2)}$

  小さい誤差の方が起こりやすい

- ② $|\varepsilon| \to \infty$ のとき $f_{(\varepsilon)} \to 0$

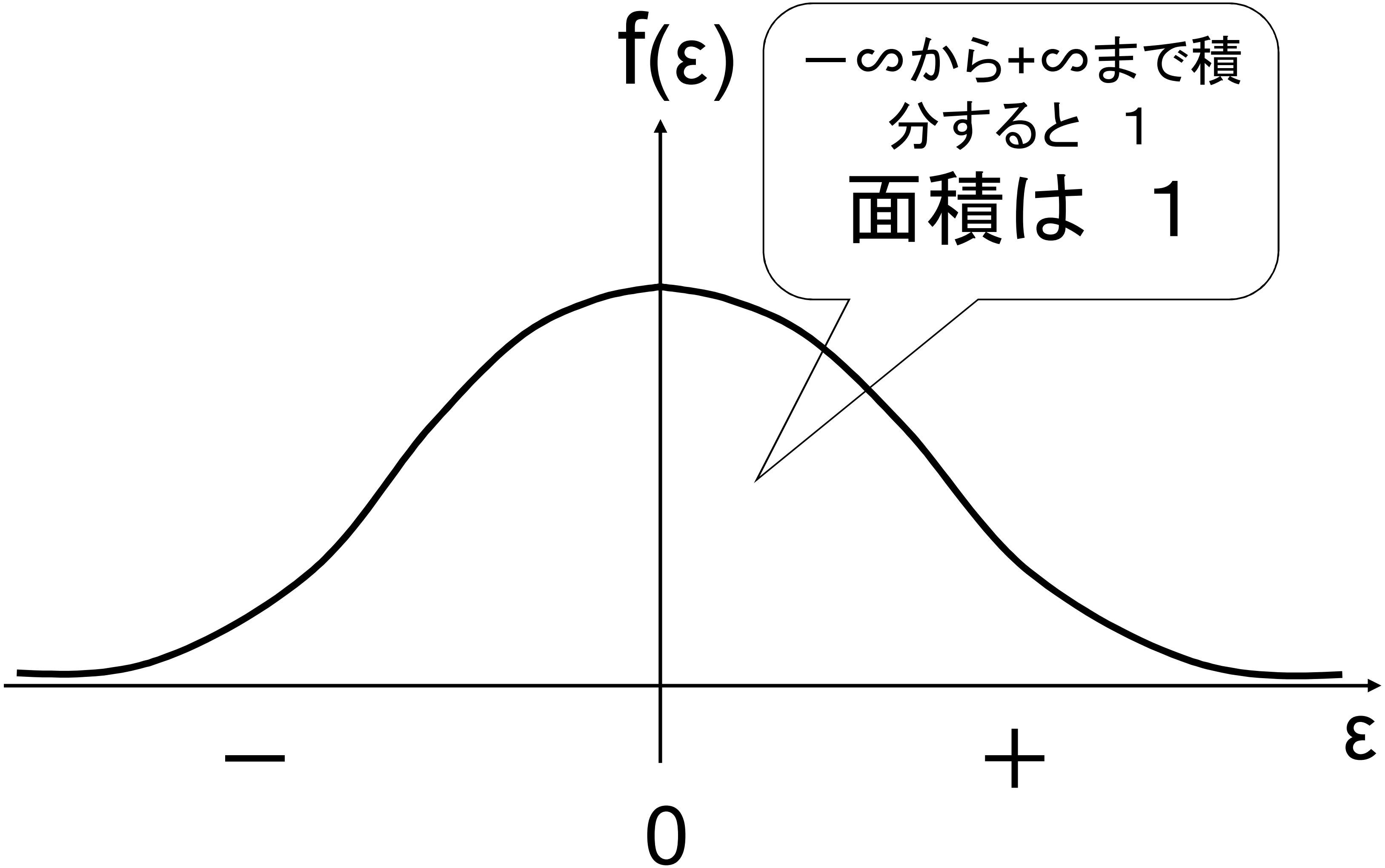
  誤差が無限大にはならない

- ③ $f_{(\varepsilon)} = f_{(-\varepsilon)}$

  プラスの誤差とマイナスの誤差は同じ確率で起こる

$f_{(\varepsilon)}$は‘なめらか’な関数→微分可能な関数

確率密度関数f(ε)　の形（直観）



確率密度関数f(ε) の 数式化

求め方は、実験書を参照！

$$f_{(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(- \frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2} \right)$$

ε:誤差

$$f_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(- \frac{(x - X)^2}{2\sigma^2} \right)$$

x:測定値　　X:真の値

正規分布またはガウス分布

σは何か？

exp　表示とは

- $\exp(-\varepsilon^2) = e^{-\varepsilon^2}$
- $\exp(x) = e^x$
- e ＝2.71828・・・・・（自然対数の底）

平均二乗誤差　と　標準偏差

ε^2 の平均値$\langle \varepsilon^2 \rangle$を求める

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 f(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

ε^2 の平均は、ε^2 にεの出現する確率$f(\varepsilon)$をかけて、それをεについて$-\infty$から$+\infty$まで積分したもの（足したもの）である。

サイコロを振り、出る目の数の平均値を求める

- サイコロの出た目の分布
- 目　1　2　3　4　5　6
- 回数　6　4　5　7　3　5 (合計30回)
- 出る目の平均値

$=(1\times6+2\times4+3\times5+4\times7+5\times3+6\times5)\div30$

$=1\times(6/30)+2\times(4/30)+3\times(5/30)+4\times(7/30)+5\times(3/30)+6\times(5/30)$

=(目の値) ×(その目が出る確率)を足し合わせる

（積分する）

平均二乗誤差　と　標準偏差

ε^2 の平均値$\langle\varepsilon^2\rangle$を求める

$$\langle\varepsilon^2\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon^2 f(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

ε^2 の平均は、ε^2 にεの出現する確率$f(\varepsilon)$をかけて、それをεについて$-\infty$から$+\infty$まで積分したものである。

平均二乗誤差　と　標準偏差

ε^2 の平均値$\langle\varepsilon^2\rangle$を求める

$$\langle\varepsilon^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 f_{(\varepsilon)}\, d\varepsilon$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right) d\varepsilon = \sigma^2$$

故に

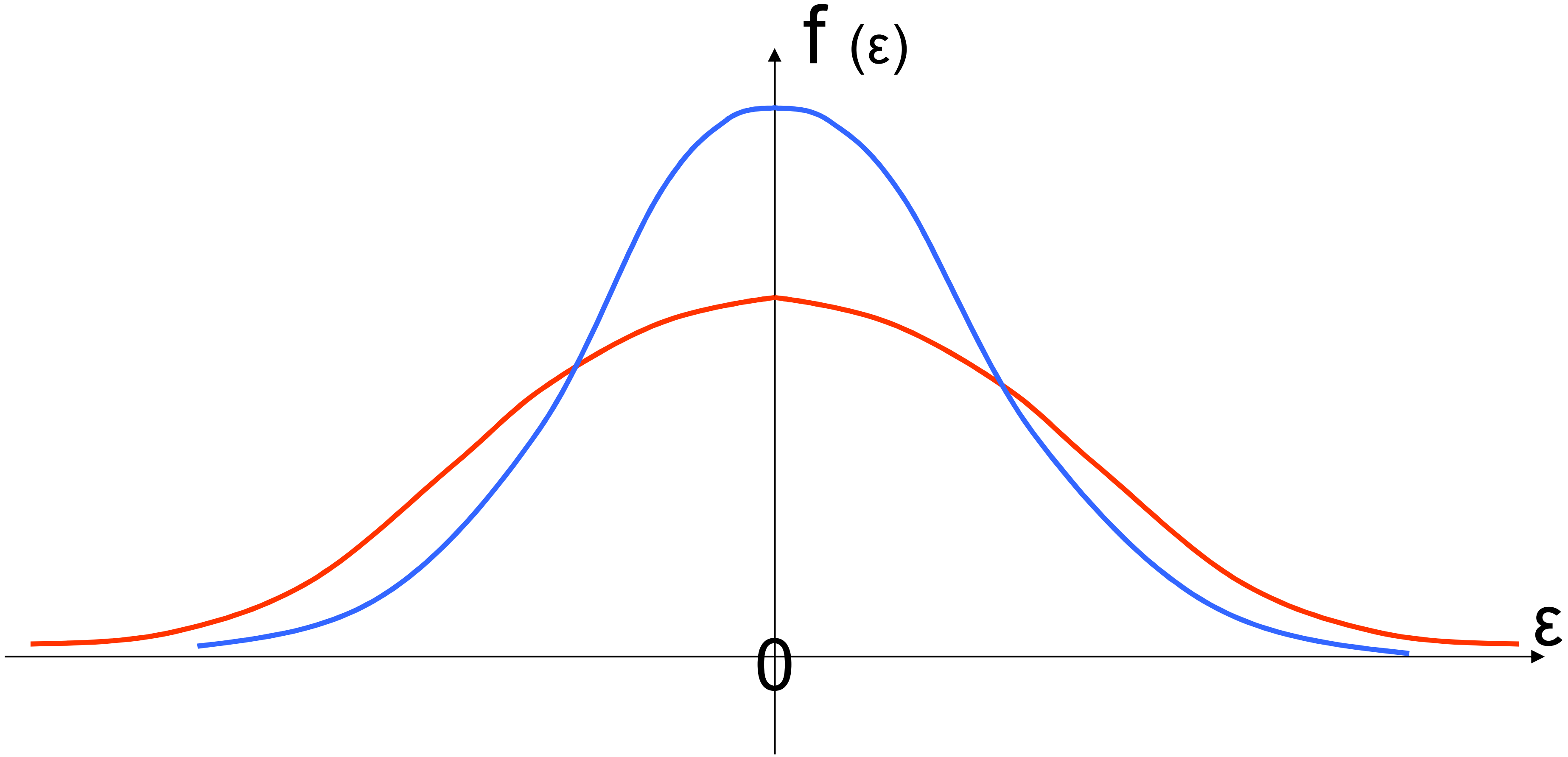
$$\langle\varepsilon^2\rangle = \sigma^2$$

これを**誤差**としようか？

$$\sigma = \sqrt{\langle\varepsilon^2\rangle}$$

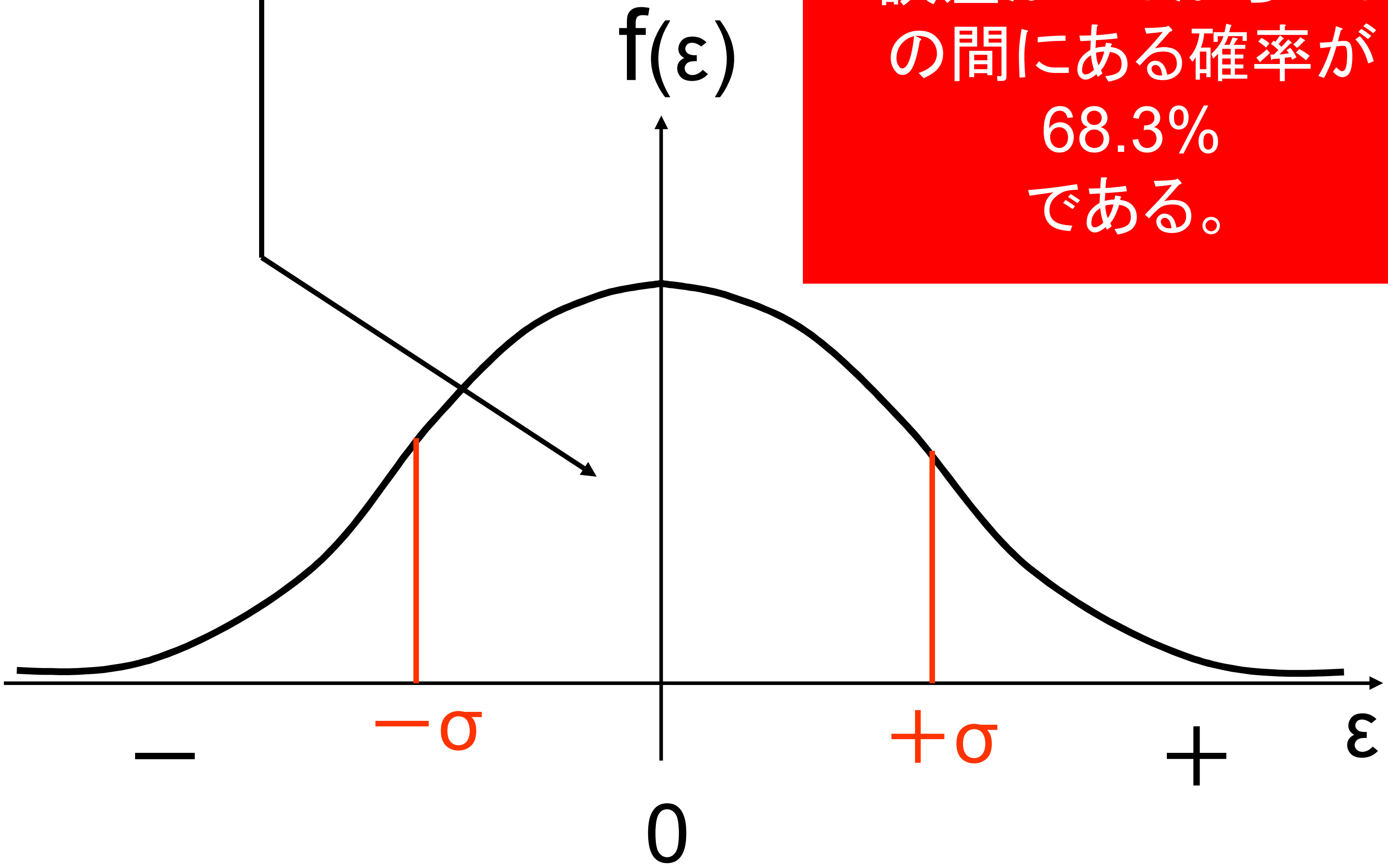
$$f_{(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2} \right)$$ の性質

- 面積＝1 （全確率＝1）
- σが大→大きい誤差が多くなる
- σが小→大きい誤差が少なくなる

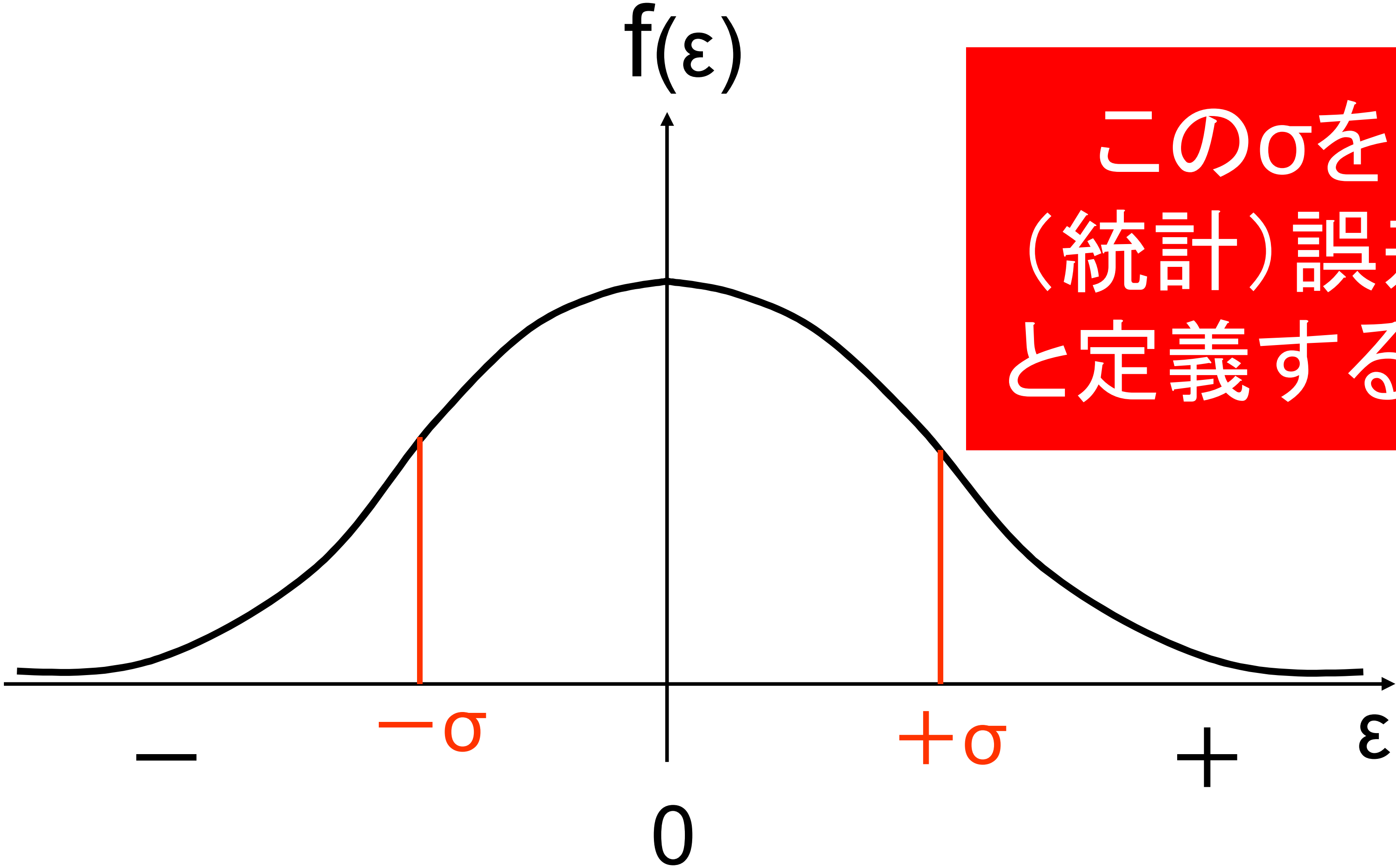


$$(\text{面積}) = \int_{-\sigma}^{+\sigma} f(\varepsilon)\, d\varepsilon \fallingdotseq 0.683$$

誤差が－σから＋σ
の間にある確率が
68.3%
である。



x±σ（xは測定値）と書いたとき
x－ σ＜真の値＜x＋σ　の確率が68.3%である。



このσを
（統計）誤差
と定義する。

（統計）誤差：平均二乗誤差(標準偏差)

$$\sigma = \sqrt{\langle \varepsilon^2 \rangle}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - X)^2}{n}}$$

誤差の
2乗の平均の
ルート
（平方根）

x_i ： i 番目の測定値

X ： 真の値

真の値が
分かれば
誤差を
計算できる

最確値（一番もっともらしい値）を求めるには？

- 測定値 x_i (i=1,2,3,・・・,n) ；互いに独立
- 真の値 X
- x_i の測定値を得る確率は　$f_{(x_i)}$

$$f_{(x_i)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x_i - X)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$(x_1, x_2, \cdots, X_n)$の一組の測定値を得る確率は

- $P = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot f(x_3) \cdots\cdots f(x_n)$

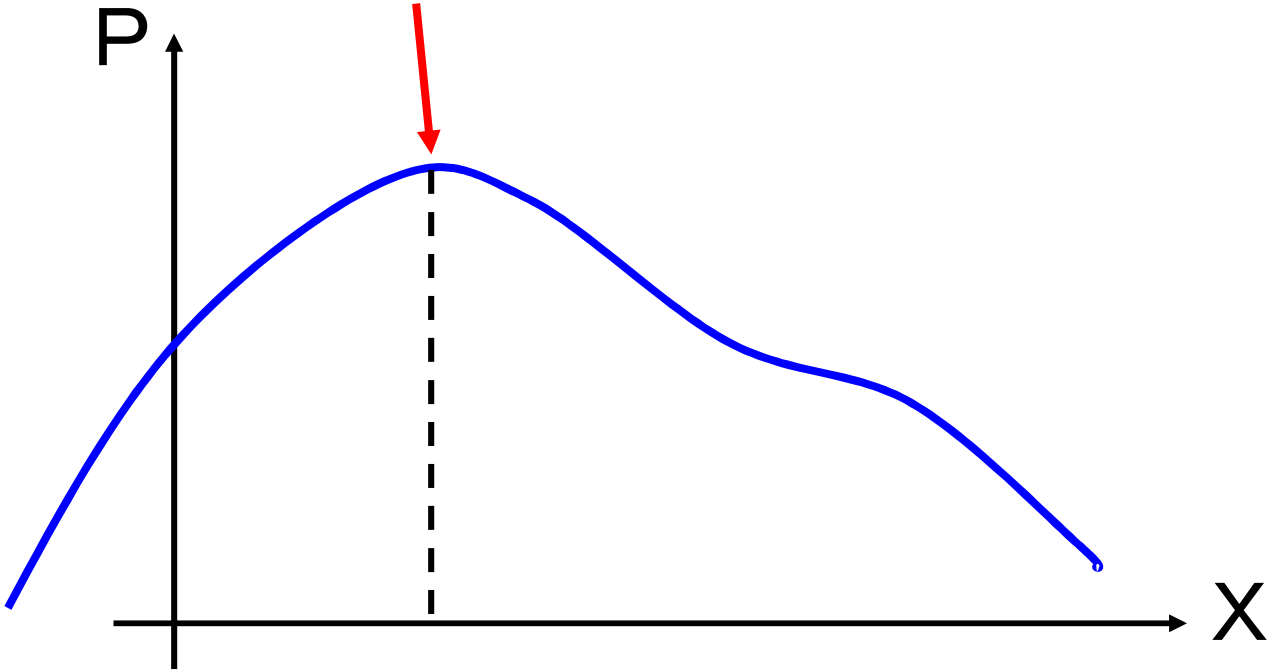
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(x_1 - X)^2 + (x_2 - X)^2 + \cdots + (x_n - X)^2\right\}\right]$$

この確率Pを最大にするXの値が、もっともらしい値（最確値）と考える。

→Maximum Likelihood Method

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - X)^2$$ を最小にするXがもっともらしい

Pを最大にするXの値を求めるには？



- 極大値を求めるには　　接線の傾きがゼロ
- $dP/dX = 0$

最確値を求める

- $$\frac{dP}{dX}=0 \quad \text{または} \quad \frac{d\sum_{i=1}^{n}(x_i - X)^2}{dX}=0$$

これを計算すると

$$X_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

（算術）平均値

平均値の誤差の求め方

- $X_m = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{1}{n}x_1 + \dfrac{1}{n}x_2 + \cdots + \dfrac{1}{n}x_n$
- 誤差伝播の法則(後で詳しく説明する)より

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{n^2}\sigma_1^2 + \frac{1}{n^2}\sigma_2^2 + \cdots + \frac{1}{n^2}\sigma_n^2$$

ここで$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n = \sigma$とすると

$\sigma_m = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ：測定回数を増やせば、

算術平均値X_m の誤差は

$1/\sqrt{n}$ に比例して小さくなる。

（統計）誤差：平均二乗誤差(標準偏差)

$$\sigma = \sqrt{\langle \varepsilon^2 \rangle}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - X)^2}{n}}$$

誤差の
2乗の平均の
ルート
（平方根）

x_i ： i 番目の測定値
X ： 真の値

真の値は分からないのでこの誤差は計算できない

（以前に講義した）平均2乗誤差（標準偏差）は、
真の値が分からなければ計算できない。

- 真の値Xの代わりに、平均値X_mを使う

$$\varepsilon_i = x_i - X = (x_i - X_m) + (X_m - X)$$

両辺を2乗する

$$\varepsilon_i^2 = (x_i - X_m)^2 + (X_m - X)^2 + 2(x_i - X_m)(X_m - X)$$

n回の測定値を足し合わせて平均をとる

$$\boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - X_m)^2}{n} + \frac{\boxed{(X_m - X)^2}\sum_{i=1}^{n}}{n} + \frac{2(X_m - X)\boxed{\sum_{i=1}^{n}(x_i - X_m)}}{n}$$

理想的には
Zero

σの2乗

σ_mの2乗

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - X_m)^2}{n} + \sigma_m^2$$

連立させて解く

個々の測定値の誤差

電卓に有り

σ_nとσ_{n-1}

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - X_m)^2}{n-1}}$$

平均値の誤差

電卓に無し

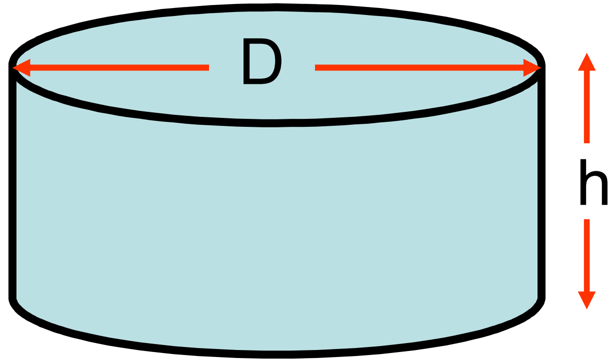
$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - X_m)^2}{n(n-1)}}$$

これなら計算できる

（問題1）
針金の直径を測定して以下の結果を得た。
針金の直径の平均値とその誤差を求めよ。
（平均）±（平均値の持つ誤差）の形式で答えよ。
針金の直径の平均値の有効桁数は何桁か。
測定値（単位mm）

1.21	1.18	1.21	1.19	1.22
1.17	1.19	1.20	1.22	1.20

例題：直径D=18.65±0.13mm,
高さ h=24.36±0.25mm
の円筒の体積を求めよ



- $V=\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 h=(\pi/4)(18.65)^2(24.36)=6654.6\cdots$

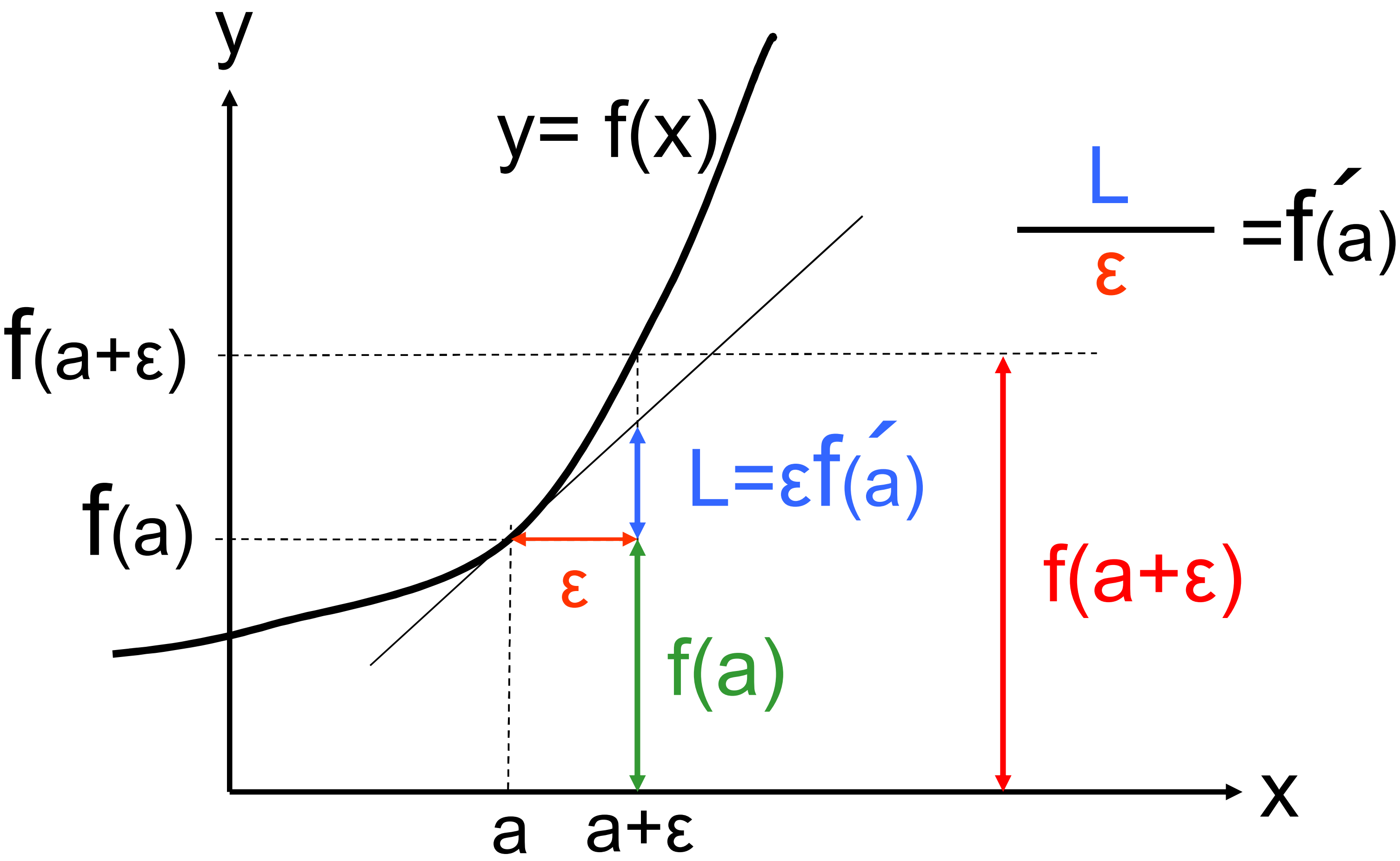
- このとき、体積Vの誤差はどうなるのか？

↓

- 直径Dと高さhの誤差が、体積Vにどのように伝播するのか？

誤差の伝播則

- Taylor展開を考える　　　関数は $y = f(x)$
- $f(a+\varepsilon) \fallingdotseq f(a) + \varepsilon f'(a) + \cdots$



一回の測定値$X\pm\varepsilon_x, Y\pm\varepsilon_y,$・・・より計算して $W=F(X\pm\varepsilon_x, Y\pm\varepsilon_y,\cdots)$を得るとき、その誤差$\sigma_w$

- Talor展開（1変数から多変数の場合を推測）
- $W=F(X\pm\varepsilon_x, Y\pm\varepsilon_y,\cdots)$

$$= F(X,Y,\cdots)+(\pm\varepsilon_x)\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)+(\pm\varepsilon_y)\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)+\cdots$$

Wの（一回測定の）誤差ε_w は

$$\varepsilon_w = W - F(X,Y,\cdots)$$

$$=(\pm\varepsilon_x)\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)+(\pm\varepsilon_y)\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)+\cdots$$

両辺を2乗する

$$\varepsilon_w^2 = \varepsilon_x^2\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)^2 + \varepsilon_y^2\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2 + \cdots$$

$$+(\pm 2\varepsilon_x\varepsilon_y)\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)+\cdots$$

N回の測定をして、それらを加えて平均する

$$\frac{\sum \varepsilon_w^2}{N} = \frac{\sum \varepsilon_x^2}{N}\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)^2 + \frac{\sum \varepsilon_y^2}{N}\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2 + \cdots$$

$$\cdots + (\pm 2)\boxed{\frac{\sum \varepsilon_x \varepsilon_y}{N}}\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right) + \cdots$$

理想的にはゼロ

まとめると

$$\sigma_w^2 = \sigma_x^2\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)^2 + \sigma_y^2\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2 + \cdots$$

誤差の伝播の法則

平均値とその誤差($X_m \pm \sigma_{mx}, Y_m \pm \sigma_{my}$,･･･)が求まったとき

- 求めるべきW_mの最確値(平均値)は

  $W_m=F(X_m, Y_m,$･･･$)$ の関係式で計算する

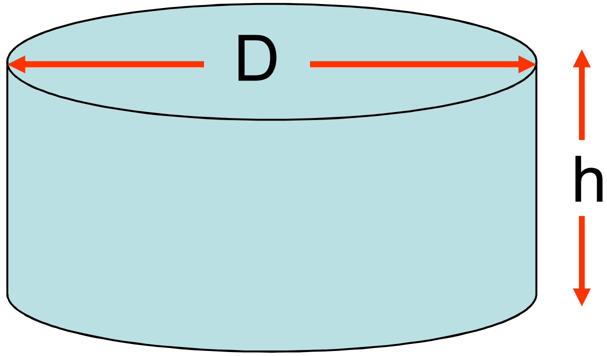
  平均値W_mの持つ誤差σ_{mw}は

$$\sigma_{mw}^2 = \sigma_{mx}^2\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)^2 + \sigma_{my}^2\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2 + \cdots$$

  の偏微分をして、その結果に

  $X=X_m$, $Y=Y_m$, ･･･を代入して計算する。

例題：直径D=18.65±0.13mm,
高さh=24.36±0.25mm
の円筒の体積を求めよ



- $V = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 h = (\pi/4)(18.65)^2(24.36) = 6654.6\cdots$
- $\sigma_{mv}^2 = \sigma_{mD}^2\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 + \sigma_{mh}^2\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2$

$$= \sigma_{mD}^2(\pi/2 \times Dh)^2 + \sigma_{mh}^2(\pi/4 \times D^2)^2$$

$$=(0.13)^2(\pi/2 \times 18.65 \times 24.36)^2$$

$$+(0.25)^2(\pi/4 \times 18.65^2)^2$$

$$=13270.\cdots \rightarrow \sigma_{mv} = 115.\cdots$$

（平均値）±（平均値の誤差）の表現はどうする

(平均値)±(平均値の誤差)の表現はどうする

- 平均値　　　　　$V=6654.6\cdots$
- 平均値の誤差　$\sigma_{mv}=115.\cdots$
- 一般に、誤差の桁数は2桁とする。

$$\sigma_{mv}=115.\cdots \rightarrow 120 \rightarrow 1.2\times 10^{2}$$

四捨五入

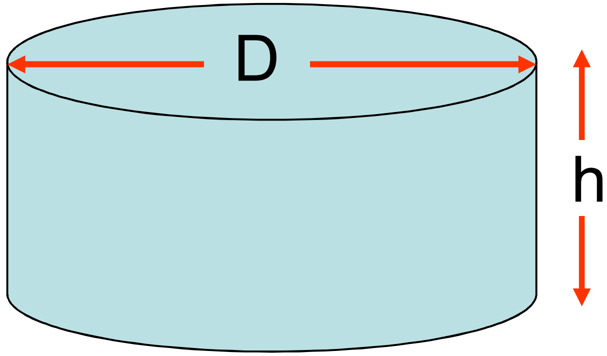
- 平均値は、誤差の最下位桁までを書く。

$$\begin{array}{rll} & 66.5\boxed{4}6\cdots & \times 10^{2} \\ \pm) & 1.\boxed{2} & \times 10^{2} \\ \hline \end{array}$$

四捨五入

故に $V = (6.65\pm0.12)\times 10^{3}\ \mathrm{mm}^{3}$

例題：直径D=18.65±0.13mm,
高さh=24.36±0.25mm
の円筒の体積を求めよ



- $V = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 h = (\pi/4)(18.65)^2(24.36) = 6654.6\cdots$
- $\sigma_{mv}^2 = \sigma_{mD}^2\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 + \sigma_{mh}^2\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2$

$$= \sigma_{mD}^2(\pi/2 \times Dh)^2 + \sigma_{mh}^2(\pi/4 \times D^2)^2$$

$$= (0.13)^2(\pi/2 \times 18.65 \times 24.36)^2$$

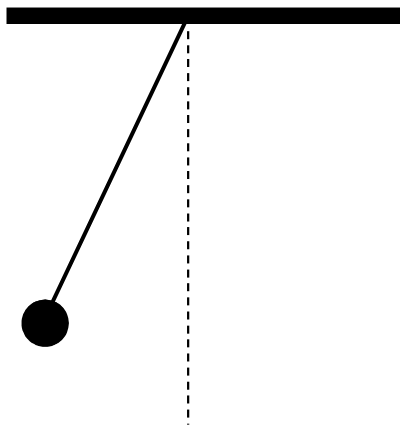
$$+ (0.25)^2(\pi/4 \times 18.65^2)^2$$

$$= 13270.\cdots \rightarrow \sigma_{mv} = 115.\cdots$$

故に $V = (6.65 \pm 0.12) \times 10^3\ \mathrm{mm}^3$

（問題3）

質量の無視できる糸の先に小さい物体がついている振り子（単振り子）がある。この振り子を測定したところ、



長さは25.75±0.25 cm

物体の質量は1.025±0.036 kg

周期は1.019±0.023 秒

であった。

この結果より、重力の加速度を求めよ。

加重(異重)平均

- 方法が異なったり、実験グループが異なったりして、多数の結果$g_1 \pm \sigma_1$, $g_2 \pm \sigma_2$, ・・・があるとき（一つにまとめた）最終的な$g_0 \pm \sigma_0$をどのようにして求めるか？

(Ⅰ)単純に加えて単純平均をとる

$$g_0=(g_1+g_2+\cdots+g_n)/n$$

(Ⅱ)誤差の小さい実験値ほど重要視して、
誤差の大きい実験値ほど軽視して
（重みをつけて）平均をとる

加重(異重)平均

加重(異重)平均

- 加重(異重)平均値

$$g_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sigma_i^2} g_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}$$

こうなる理由は？

σ_i の2乗の逆数で重みを付けて平均

- 加重(異重)平均値の誤差

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}$$

誤差伝播の法則を応用して求める

確率密度関数f(ε)　の　数式化

求め方は、実験書を参照！

$$f_{(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2} \right)$$

ε:誤差

$$f_{(g)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(g-G)^2}{2\sigma^2} \right)$$

g:測定値　　G:真の値

正規分布または**ガウス分布**

$(g_1 \pm \sigma_1, g_2 \pm \sigma_2, \cdots, g_n \pm \sigma_n)$の一組の測定値を得る確率は

- $P = f_{(g_1)} \cdot f_{(g_2)} \cdot f_{(g_3)} \cdots\cdots f_{(g_n)}$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i}\right) \exp\left[-\left\{ \frac{(g_1 - G)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(g_2 - G)^2}{2\sigma_2^2} + \cdots + \frac{(g_n - G)^2}{2\sigma_n^2} \right\}\right]$$

この確率Pを最大にするGの値が、もっともらしい値（最確値）と考える。

→Maximum Likelihood Method

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(g_i - G)^2}{2\sigma_i^2}$$ を最小にするGがもっともらしい

最確値を求める

- $$\frac{dP}{dG}=0 \quad \text{または} \quad \frac{d\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{(g_i-G)^2}{2\sigma_i^2}\right\}}{dG}=0$$

$\downarrow$

これを
計算すると

加重(異重)平均

- 加重(異重)平均値

$$g_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sigma_i^2} g_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}$$

これが求まる

σ_i の2乗の逆数で重みを付けて平均

- 加重(異重)平均値の誤差

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}$$

誤差伝播の法則を応用して求める

加重（異重）平均

- 加重（異重）平均値

$$g_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sigma_i^2} g_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}$$

σ_i の2乗の逆数で重みを付けて平均

- 加重（異重）平均値の誤差

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}$$

こうなる理由は？

誤差伝播の法則を応用して求める

加重(異重)平均

- 加重(異重)平均値

$$g_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sigma_i^2} g_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}$$

これに誤差伝播の法則を適用

$$\sigma_0^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g_0}{\partial g_i}\right)^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}\right)^2 \sigma_i^2$$

これを計算すると

加重(異重)平均

- 加重(異重)平均値

$$g_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sigma_i^2} g_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}$$

σ_i の2乗の逆数で重みを付けて平均

- 加重(異重)平均値の誤差

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}$$

これが求まる

誤差伝播の法則を応用して求める

（問題2）

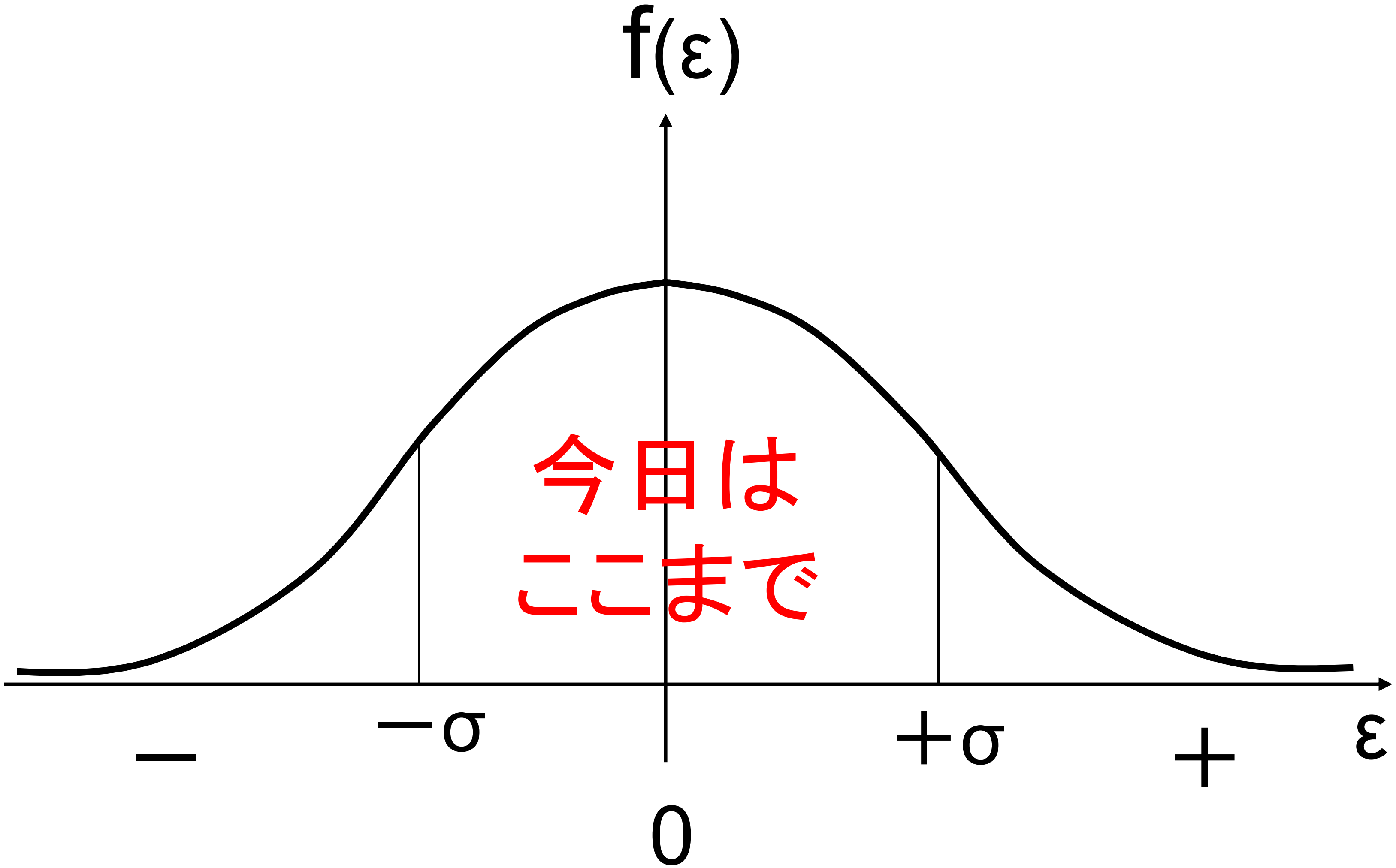
重力の加速度の測定を4回行って、次の結果を得た。

$$g_1 = 980.23 \pm 0.84$$
$$g_2 = 979.18 \pm 0.55$$
$$g_3 = 978.56 \pm 0.24$$
$$g_4 = 980.16 \pm 0.50$$

（単位はcm／sec^2 ）

これらの結果を平均して最終結果を求めよ。

問題の解答をA4のレポート用紙にまとめて、
４月２８日（木）午後１時～１時２０分に提出せよ。



二項分布

- n個の独立な試行を行ったとき，k回成功する確率p

$$B_{n,p}(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$$

- 平均値： $X = np$
- 標準偏差： $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

1回あたりの成功確率がpであり，その試行回数がnならば，平均的にnp回の成功が生じる

二項分布のガウス近似

- nを増やした場合，二項分布は平均X=np，標準偏差$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$の正規分布に近づく．

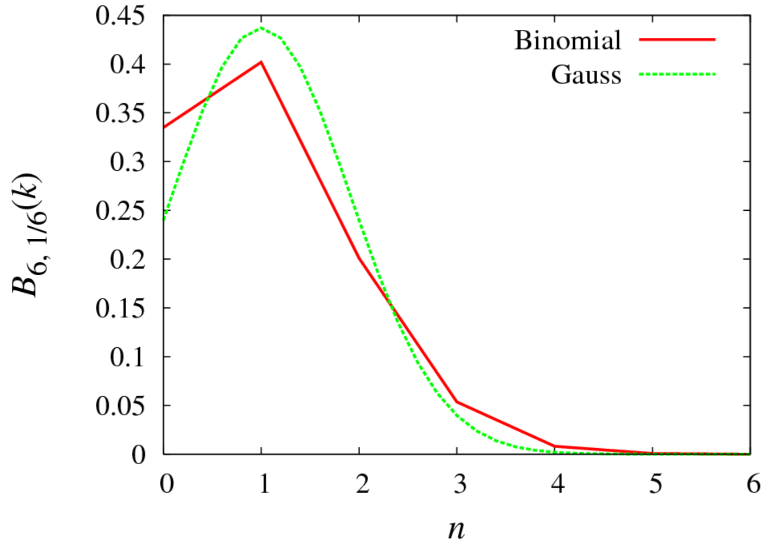
$$B_{n,p}(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(k-X)^2}{2\sigma^2}\right)$$

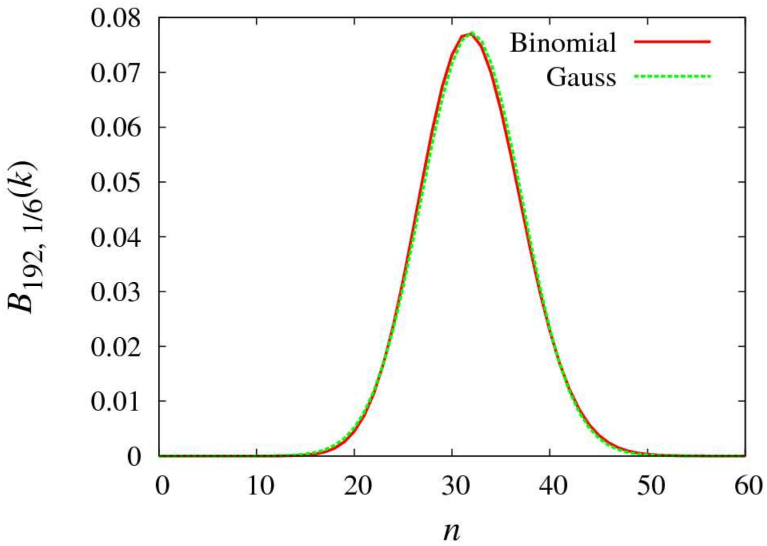
中心極限定理

二項分布

- $p = \dfrac{1}{6}$
  - $n = 6\ (k = 0, 1, \cdots, 6)$

$$B_{6,\frac{1}{6}}(k) = \frac{6!}{k!(6-k)!}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{6-k}$$





  - $n = 192\ (k = 0, 1, \cdots, 192)$

$$B_{192,\frac{1}{6}}(k) = \frac{192!}{k!(192-k)!}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{192-k}$$

nを増やすと正規分布に近づく

中心極限定理