

8. 等速円運動

物体の運動としては、直線運動⁷³のほかに、運動する向きが変化するような曲線運動がある。円周上を物体が移動する「円運動」が曲線運動の典型的な例であり、曲線運動を理解するための基本となる。円運動は、直線運動とは違った運動の性質を持つ。8章では、円周上を一定の速さで動く運動(等速円運動⁷⁴)について、その性質を調べる。等速円運動では、原点(円の中心点)からの距離、速さ、加速度の大きさは時間によらず一定であるが、位置、速度、加速度の向きは、時間とともに変化する。

8-1. 等速円運動の性質

・円の性質

円運動する物体の運動の性質を調べる前に、「円」について、数学的な復習を簡単に行う。半径 r [m]の円の中心点を O とすると、点 O を中心とする1周の角度は 360° である。これを角度の別な単位なのであるラジアン[rad]を用いると、下のような関係式が成立する。

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad (8-1-1)$$

ラジアン単位と度単位は比例するので、一般角としての θ [rad]と θ [°]は、下の関係式で結ばれる。⁷⁵

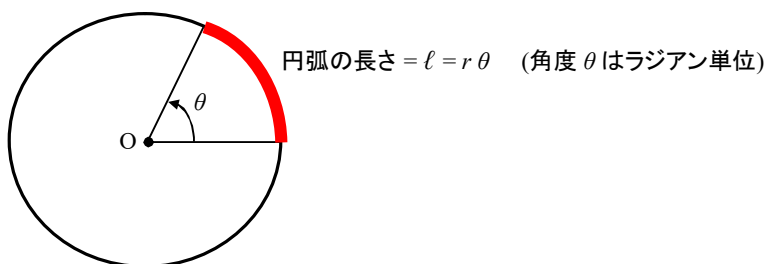
$$\theta = \frac{2\pi}{360} \theta \quad (8-1-2)$$

また、円周の1周の長さ ℓ [m]は

$$\ell = 2\pi r \quad (8-1-3)$$

と表される。一般に、角度 θ [rad]に対応する円弧の長さ ℓ [m]は下の式で表される($\theta = 2\pi$ の時、(8-1-3)式となる)。

$$\ell = r\theta \quad (8-1-4)$$



問 8-1-1. 以下の角度で度単位はラジアン単位へ、ラジアン単位は度単位へ換算せよ。

- 1) 60° 2) 150° 3) 225° 4) $\pi/6$ 5) 1.5π 6) 2.75π

問 8-1-2. 半径 $r = 4.0$ m で内角 θ が以下の角度で表されている円弧の長さ ℓ を求めよ。

- 1) $\pi/4$ 2) $5\pi/6$ 3) 225° 4) 330°

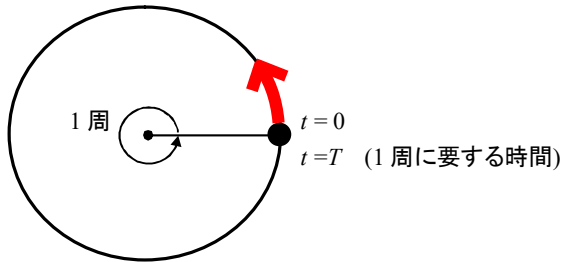
⁷³ 「並進運動」とも呼ぶ。

⁷⁴ 後で述べるが、円周上を進む速さ(= 速度の大きさ)は時間がたっても等しいが、円運動では向きが時間の経過とともに変化するので**円周上の等速運動は「等速度運動ではない。」**

⁷⁵ 2π [rad] : 360 [deg] = θ [rad] : θ [deg] の比例関係より求められる。(角度の単位; 度 = $^\circ$ = deg).

・周期(period) T

円周上を等速円運動する物体が、「1回転して元の位置に達するまでの時間」を**周期 T** と呼ぶ。周期 T の単位は「秒 = s」である。



・回転数 (frequency) f

円周上を動く物体が「1秒間当たり何回転したか」を表す量を**回転数 f** と呼ぶ。回転数 f と周期 T は互いに逆数の関係にあり、回転数の単位は「回/s = 1/s = Hz(ヘルツ)」⁷⁶である。

$$f = \frac{1}{T} \tag{8-1-5}$$

問 8-1-3. 半径 $r = 5.0$ m の円周上を 20 秒間で 50 回転する物体がある(円周率 $\pi = 3.14$ とする)。

- 1) 周期 T を求めよ.
- 2) 回転数 f を求めよ.
- 3) 上の 2 つの問の答えから(8-1-5)式が成立していることを確かめよ.
- 4) 1 周の長さ L を求めよ.
- 5) 10 秒間で回転する角度は何ラジアンか?

・速さ(speed) v

物体の**速さ v** は「1秒間当たりの移動した距離」なので、円運動する物体が t 秒間に円弧の長さ ℓ だけ動いたとすると速さ v は下の式で表される。等速円運動の場合には、1回転に要する時間は周期 T で、物体が動いた距離は1周の長さ = $2\pi r$ となるので下の式が成り立つ。速さの単位は「m/s」である。

$$v = \frac{\text{動いた距離}}{\text{要した時間}} = \frac{\ell}{t} = \frac{\text{1周の長さ}}{\text{1周に要した時間}} = \frac{2\pi r}{T} \tag{8-1-6}$$

・角速度(angular frequency) ω

速さは1秒間当たりの物体の動いた距離であった。これに対し、**角速度 ω** は「1秒間当たりの回転した角度(ラジアン単位)」である。角度 θ だけ回転するのに t 秒間かかる(等速円運動の場合には、1回転 (2π [rad]) に要する時間は周期 T となる)ので、角速度 ω は下の式で表される。

$$\omega = \frac{\text{動いた角度}}{\text{要した時間}} = \frac{\theta}{t} = \frac{\text{1周の角度}}{\text{1周に要した時間}} = \frac{2\pi}{T} \tag{8-1-7}$$

⁷⁶ 単位としての回数(1回, 2回, ...)は省略でき、単位は「なし」とすることができる。角度の単位であるラジアンも単位として省略でき、単位は「なし」とすることができる。したがって、(8-1-4)式の右辺で角度 θ の単位がないので、右辺と左辺の単位は長さの単位となり、単位的にも矛盾がない。また、「1/s」のことを「Hz(ヘルツ)」と呼ぶ。ヘルツ(Hertz)は19世紀後半のドイツの物理学者の名前にちなんだ単位である。

角速度の単位は「rad/s = 1/s」である。また、角速度は速度という語句を含んでいるように向きを持っている。数学や物理学では**反時計回りを「+方向」**の回転とし、**時計回りを「-方向」**の回転と定義される。等速円運動では速さが一定なので、**角速度も一定**となる。また、角速度 ω は(8-1-5)式より回転数 f を用いると下の関係式が成り立つ。

$$\omega = 2\pi f \quad (8-1-8)$$

さらに、速さ v も角速度 ω を使って表すと(8-1-6)式と(8-1-7)式より、下の式が成り立つ。

$$v = r\omega \quad (8-1-9)$$

問 8-1-4. 半径 $r = 5.0$ m の円周上を等速円運動している物体が 2.5 秒間に 60° 回転した。

- 1) 2.5 秒間に動いた距離 l を求めよ。
- 2) この物体の周期 T , 回転数 f , 角速度の大きさ ω , 速さ v を求めよ。
- 3) 半径が 2 倍の 10 m になると動いた距離, 周期, 回転数, 角速度, 速さはそれぞれ何倍になるか。

問 8-1-5. 半径 $r = 20$ cm の円周上を 4 分間で 120 回転する物体がある。この物体の周期 T , 回転数 f , 角速度(大きさ) ω , 速さ v を求めよ。

・8-1 のまとめ(最低限の公式のまとめ)

等速円運動する物体において、回転数 f [1/s = Hz] と周期 T [s] の間に下の関係が成り立つ。

$$f = \frac{1}{T} \quad (8-1-10)$$

t 秒間に角度 θ [rad] だけ回転すると、角速度 ω [rad/s = 1/s] は下の関係式が成り立つ。

$$\omega = \frac{\theta}{t} = 2\pi f \quad (8-1-11)$$

さらに、半径 r [m] の円周上を物体が円運動すると、速さ v [m/s] は下の関係式が成り立つ。

$$v = r\omega \quad (8-1-12)$$

8-2. 位置, 速度, 加速度

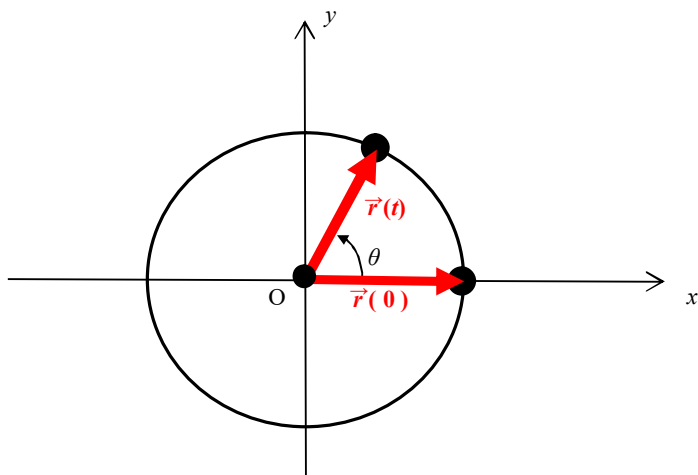
① 位置 \vec{r}

円の中心を原点 O として、半径 r の円周上を等速円運動する物体がある。物体の位置 \vec{r} は時刻 $t = 0$ で物体の位置が座標表示で $\vec{r}(t=0) = \vec{r}(0) = (r, 0)$ にあったとして、 t 秒後の位置 $\vec{r}(t)$ は角度 θ だけ回転しているので下の式で表すことができる⁷⁷。

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (8-2-1)$$

⁷⁷ (1-4-6)式と同様である。(1-4-6)式ではベクトルの大きさを a としたが、ここでは、半径 r とした。

$$|\vec{r}| = r = \text{一定}$$



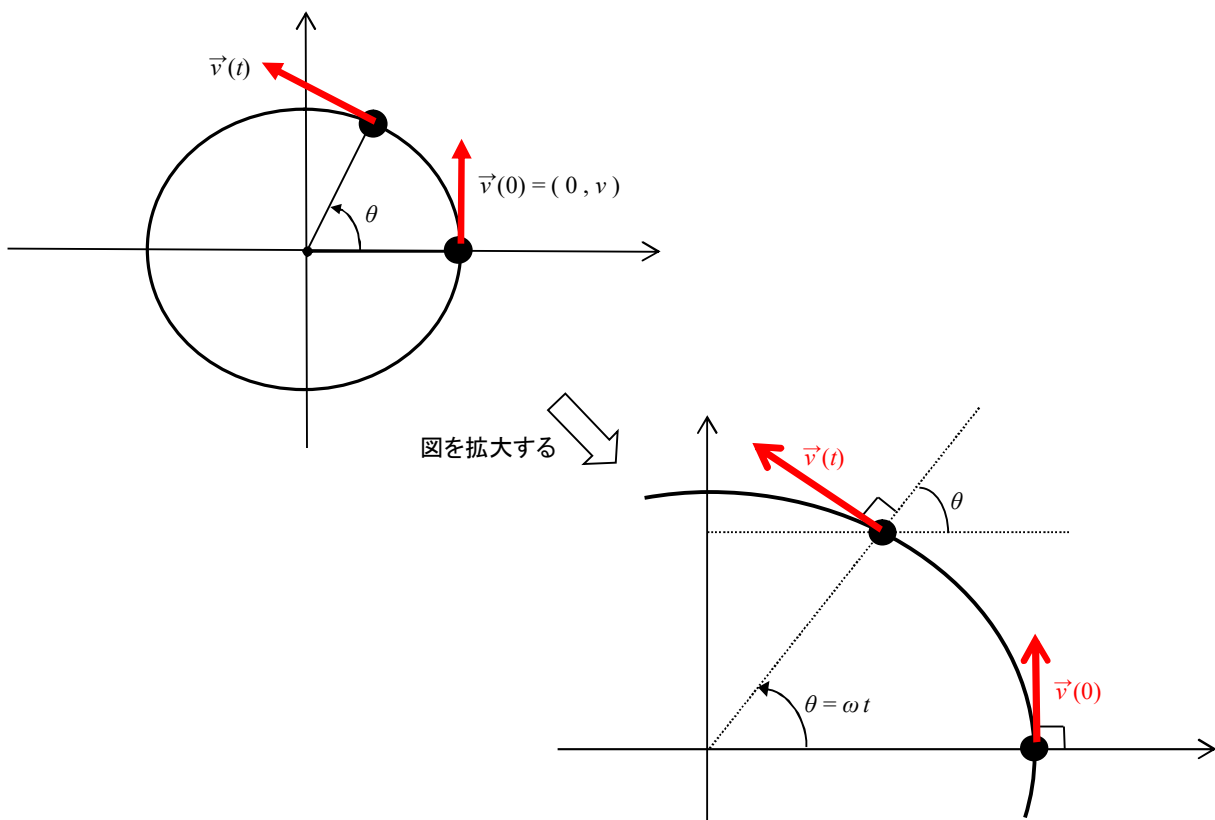
また、 t 秒間に回転した角度 θ は(8-1-11)式より、

$$\theta = \omega t \tag{8-2-2}$$

と表される。(8-2-1)式での回転角(位相角) θ は(8-2-2)式で表されるように時間 t に比例し、位置 $\vec{r} = (x, y)$ は時間 t の関数となる。位置 \vec{r} の向きは円の中心から外側を向いた向きであり、この向きが時間とともに変化する。ここでは、物体は反時計回りに回転しているものとした。

② 速度 \vec{v}

円運動する物体は**円の接線方向**に向かって動いている。速さ v は(8-1-12)式より、 $v = r\omega$ で一定となる。物体の位置が時間とともに変化しているので、その時々々の接線方向も違ってくる。したがって、速度の向きも時間とともに変化する。



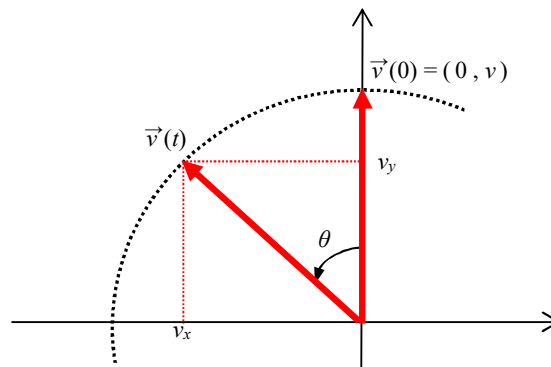
上の図より、時刻 t での速度 $\vec{v}(t)$ の向きは x 軸から反時計回りに ' $\theta + \pi/2$ ' の角度となる。したがって、速度 $\vec{v}(t)$ を成分表示で表す⁷⁸と下の式のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= (v_x(t), v_y(t)) = (v \cos(\theta + \pi/2), v \sin(\theta + \pi/2)) \\ &= (-v \sin \theta, v \cos \theta) = (-r\omega \sin \theta, r\omega \cos \theta)\end{aligned}\tag{8-2-3}$$

$$|\vec{v}(t)| = v = r\omega \quad \rightarrow \quad \text{一定}\tag{8-2-4}$$

* 別な考え方

ベクトルは平行移動して取り扱うことが可能なので、下の図のように速度ベクトルの始点を原点に移動して考える⁷⁹。



図より、 v_x は ' $-v \sin \theta$ '、 v_y は ' $v \cos \theta$ ' となることがわかる。 $\rightarrow \vec{v}(t) = (-v \sin \theta, v \cos \theta)$
(点線で描いた円の半径は速度の大きさ $= v = r\omega$ である)

③ 加速度 \vec{a}

円運動する物体は速度が時間によって変化(速度の向きが変化)しているので、加速度が発生している。時刻 t における加速度 $\vec{a}(t)$ はその定義式より下の式で表すことができる。

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}\tag{8-2-5}$$

上の式の x 成分 $a_x(t)$ と y 成分 $a_y(t)$ は $\theta = \omega t$ ($\Delta\theta = \omega \Delta t$, $v_x = -v \sin \theta$, $v_y = v \cos \theta$) より

$$a_x(t) = \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} = -v \frac{\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin \theta}{\Delta\theta/\omega} = -v \omega \cos \theta\tag{8-2-6}$$

⁷⁸ 三関数法の加法定理を用いると便利である。 $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$, $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \cos \beta$

⁷⁹ この図からも、時刻 $t=0$ のときと比べ、 t 秒後は角度 θ [rad]だけ反時計回りに進んでいる。

$$a_y(t) = \frac{v_y(t+\Delta t) - v_y(t)}{\Delta t} = v \frac{\cos(\theta+\Delta\theta) - \cos\theta}{\Delta\theta/\omega} = -v\omega \sin\theta \quad (8-2-7)$$

と導出できる。

* 上式の導出⁸⁰

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\theta+\Delta\theta) - \sin\theta}{\Delta\theta} &= \frac{\sin\theta \cos(\Delta\theta) + \cos\theta \sin(\Delta\theta) - \sin\theta}{\Delta\theta} \\ &= \frac{\sin\theta(\cos(\Delta\theta) - 1) + \cos\theta \sin(\Delta\theta)}{\Delta\theta} = \cos\theta \\ \frac{\cos(\theta+\Delta\theta) - \cos\theta}{\Delta\theta} &= \frac{\cos\theta \cos(\Delta\theta) - \sin\theta \sin(\Delta\theta) - \cos\theta}{\Delta\theta} \\ &= \frac{\cos\theta(\cos(\Delta\theta) - 1) - \sin\theta \sin(\Delta\theta)}{\Delta\theta} = -\sin\theta \end{aligned}$$

したがって、加速度 \vec{a} は $v = r\omega$ を用いると、(8-2-6)式と (8-2-7)式より、下の式のように表すことができる。

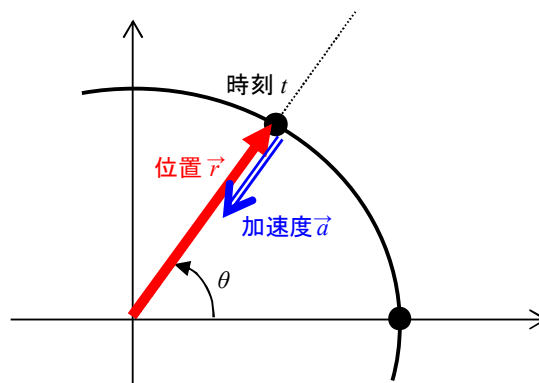
$$\vec{a}(t) = (a_x, a_y) = (-r\omega^2 \cos\theta, -r\omega^2 \sin\theta) \quad (8-2-8)$$

$$|\vec{a}(t)| = a = r\omega^2 = v^2/r \rightarrow \text{一定} \quad (8-2-9)$$

また、(8-2-8)式と(8-2-1)式を比べると、加速度 \vec{a} は位置 \vec{r} を用いて、下の式のように比例関係として表すことができる。

$$\vec{a} = -\omega^2 (r \cos\theta, r \sin\theta) = -\omega^2 \vec{r} \quad (8-2-10)$$

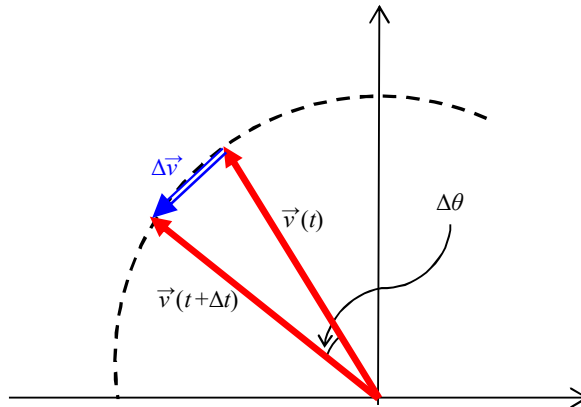
上の式からも、加速度 \vec{a} と位置 \vec{r} は逆向きであることがわかる。即ち、下の図のように円運動する物体の位置は円の中心から外側を向き、加速度は円周上から円の中心を向く。



⁸⁰ 角度 $\Delta\theta$ が微量となる場合は $\frac{\sin(\Delta\theta)}{\Delta\theta} = 1$, $\frac{\cos(\Delta\theta) - 1}{\Delta\theta} = 0$ となる公式を用いた

* 別な考え方

もう一度、速度ベクトル $\vec{v}(t)$ の始点を原点に移動した図を下に描く(破線で描いた円の半径は速さ v)。微小時間 Δt (その間に、微小角度 $\Delta\theta$ だけ回転する) 経過後の速度を $\vec{v}(t+\Delta t)$ とする。(8-2-5)式の子を $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$ とすると下図のようになる。この図において、 $\Delta\vec{v}$ の向きは円の接線方向(速度 \vec{v} と直角)で、 $\Delta\vec{v}$ の大きさ $=\Delta v$ は微小角度 $\Delta\theta$ に対する半径 v の円の円弧の長さなので、 $\Delta v = \text{半径} \times \text{角度} = v \Delta\theta$ となり、加速度の大きさ a は $a = v \Delta\theta / \Delta t = v \omega = r \omega^2$ となる。



加速度の向きは速度の向きと直角であるので、速度と比べて位相角が $\pi/2 = 90^\circ$ だけ進んでいる。つまり、加速度の位相角は位置の位相角 θ と比べると π だけ進んでいる。したがって、加速度 \vec{a} を成分表示で表すと下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_x, a_y) \\ &= (a \cos(\theta + \pi), a \sin(\theta + \pi)) \quad \leftarrow \text{位相角として } (\theta + \pi) \text{ とした} \\ &= (-a \cos \theta, -a \sin \theta) = -a (\cos \theta, \sin \theta) \end{aligned}$$

問 8-2-1. 半径 $r = 5.0 \text{ m}$ の円周上を等速円運動している質量 $m = 3.0 \text{ kg}$ の物体が 2.5 秒間に 60° 回転した。

- 1) この物体の速さ v と加速度の大きさ a を求めよ。
- 2) 半径が 2 倍の $R = 10 \text{ m}$ になると速さと加速度の大きさはそれぞれ何倍になるか。
- 3) 2.5 秒間に 90° と 120° の回転をする場合、速さ v と加速度の大きさ a をそれぞれ求め、それが 60° の場合と比べて何倍になるか求めよ。

問 8-2-2. 半径 $r = 20 \text{ cm}$ の円周上を 4 分間で 180 回転する物体がある。この物体の速さ v と加速度の大きさ a を求めよ。

・8-2 のまとめ

角速度 ω で反時計まわりの向きに回る等速円運動する物体において(位相角 $\theta = \omega t$)

時刻 $t = 0$ での位置を $\vec{r}(t=0) = (r, 0)$ (位相角 $\theta = 0$) とすると、

- ① 時刻 t での位置 $\vec{r}(t)$ は(大きさ = 半径 = r , 向き = 中心から円周方向(外方向)とする)成分表示では下のように表される。

$$\vec{r}(t) = r (\cos \theta, \sin \theta) \tag{8-2-11}$$

- ② 時刻 t での速度 $\vec{v}(t)$ は(大きさ = $v = r\omega$, 向き = 円の接線方向, 位相角は位置に比べて $\pi/2$ 進む)成分表示では下のように表される。

$$\vec{v}(t) = v (\cos(\theta + \pi/2), \sin(\theta + \pi/2)) = v (-\sin \theta, \cos \theta) \tag{8-2-12}$$

- ③ 時刻 t での加速度 $\vec{a}(t)$ は(大きさ = $a = r\omega^2$, 向き = 円の中心方向, 位相角は位置に比べて π 進む)成分表示では下のように表される。

$$\vec{a}(t) = a (\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi)) = a (-\cos \theta, -\sin \theta) \tag{8-2-13}$$

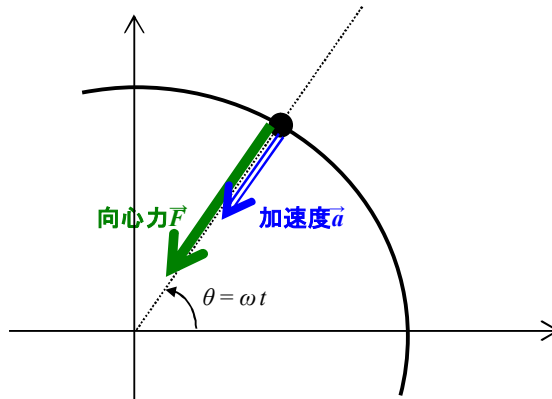
位置の大きさ = $r = r\omega^0$	→	速度の大きさ = $v = r\omega^1$	→	加速度の大きさ = $a = r\omega^2 = v^2/r$
位置の向き = 外方向	→	速度の向き = 接線方向	→	加速度の向き = 中心方向
(位置の位相角 = θ)	→	速度の位相角 = $\theta + \pi/2$	→	加速度の位相角 = $\theta + \pi$

8-3. 向心力

前の節で述べたように等速円運動する物体には円の中心に向かう加速度が発生する。ニュートンの運動の第2法則によれば、物体に加速度が発生する原因は物体に力が作用しているからである。したがって、円運動し続けるため、物体には常に中心方向に向いた力が必要となる。この力は中心方向に向かう力なので**向心力(中心力)**とよぶ。向心力 \vec{F} を用いて運動方程式を表すと下の式のようなになる。

$$\vec{F} = m \vec{a} = \begin{cases} \text{大きさ} = m a = m r \omega^2 = m v^2/r \\ \text{向き} = \text{中心方向} \end{cases} \tag{8-3-1}$$

「向心力の具体的な例としては、例えば、物体に糸をつけて回転させる場合には、向心力は糸の張力がそれに相当する。また、地球の回りを回る人工衛星の場合には、向心力は重力となる。



問 8-3-1. 半径 $r = 5.0 \text{ m}$ の円周上等速円運動している質量 $m = 4.0 \text{ kg}$ の物体が 2.5 秒間に 45° 回転した。

- 1) この物体にかかる(円運動するのに必要な)向心力の大きさ F と向きを答えよ。
- 2) 2.5 秒間に 90° と 120° 回転する場合の向心力の大きさ F を求めよ。

問 8-3-2. 半径 $r = 20 \text{ cm}$ の円周上等速円運動している質量 $m = 800 \text{ g}$ の物体に働く向心力の大きさ F を求めよ。

問 8-3-2. 下のような円運動の状況下で物体にかかる向心力の原因となる力は具体的にはどのような力か?

- 1) 太陽の回りを回る地球
- 2) カーブを曲がる自動車
- 3) メリーゴーランドにあるブランコ
- 4) 水素原子において陽子の回りを回る電子
- 5) ルーレット上を転がる球

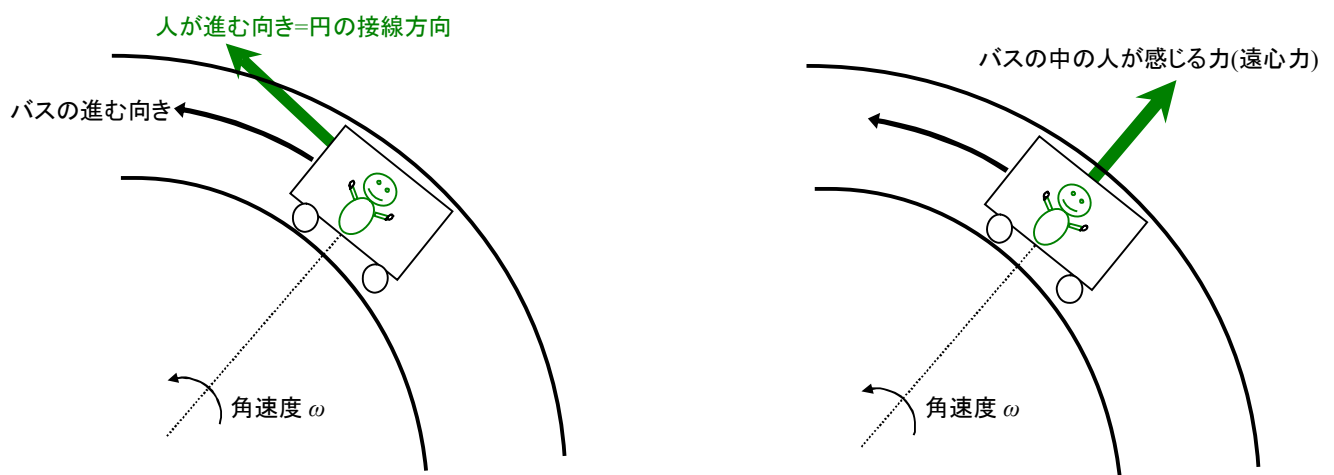
8-4. 遠心力と見かけの力⁸¹

バスに立って乗っている人はバスがカーブを曲がる時、カーブの外側に引っ張られるように感じる。バスにはカーブを曲がるために向心力(この場合、向心力の原因はバスのタイヤと路面との摩擦力)が働き、カーブとなる円周上等速円運動する。一方、バスの中に乗っている人自体には向心力が働いていないので「慣性の法則」で、まっすぐ円の接線方向に進むこととなる。したがって、乗っている人は(バスの中の人から見ると)カーブの外側に引っ張られて動いてしまう。この力を遠心力と呼ぶ。遠心力は円運動(加速度運動)している物体に乗っている人が感じる力である。遠心力 \vec{F} はニュートンの運動方程式 $\vec{F} = m \vec{a}'$ (ここでの加速度 \vec{a}' はバスの中の人(物体)が感じる加速度で、円運動しているバス自体にかかる中心方向を向いた加速度と逆向きで、同じ大きさとなる)より、下の式で表すことができる⁸²。

$$\vec{F} = m \vec{a}' = \begin{cases} \text{大きさ} = m r \omega^2 = m v^2 / r \\ \text{向き} = \text{中心から円の外方向} \end{cases} \quad (8-4-1)$$

上の式で m はバスの中の人(物体)の質量である。

バスの中にいる人がバスの中で同じ位置にとどまるためには、遠心力と釣り合う力(例えば、床に踏ん張ることによる生じる摩擦力)を発生させ、2つの力の「合力 = 0」とする必要がある。



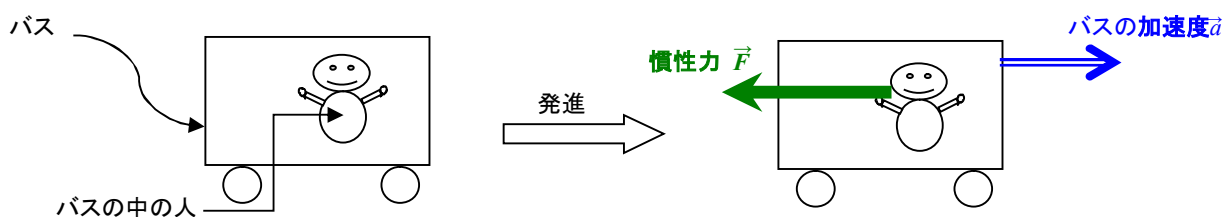
⁸¹ 物理が苦手な場合、この節は省略してもよい。また、ここでの「見かけの力」は「慣性力」のことである。

⁸² 回転半径 r と等速円運動の速さ $v (= r \omega)$ を用いると、加速度の大きさ $a = r \omega^2 = v^2 / r$ と表すことができる。

一方、バスに乗らずにバスの外側からバスの中の人を見ると、バスの中の人には外向きの力は働いているように見えな
い。バスに乗っている人には床との間で摩擦力が働き、これが向心力になって、回転しているように見える。つまり、遠心力は円
運動(加速度運動)している物体の中にいる人だけが感じる見かけの力とみなすことができる。

このような見かけの力は円運動ばかりでなく加速度運動する物体にも存在する。例えば、バスが発車するとき、バス自体の
加速度は進行方向と同じ向きであるが、中の人にはそれとは逆向きに(後方に)ひっぱられる力を感じる。これも、カーブするバス
の中にいる人が感じる力と同じ性質のものである。

バスに乗っている人は慣性の法則により、同じ運動の状態をし続ける性質がある。そして、バスが発進しても元の位置に留
まろうとするので、バスから見ると後ろ向きの力が発生し、後ろに引っ張られるように感じる。このように、加速度運動している物
体中の人(物体)が感じる力を「慣性力⁸³」と呼ぶ。遠心力も慣性力の一種である。慣性力はニュートンの運動方程式より、一般に
下の式で表される。



$$\text{慣性力} = \vec{F} = m \vec{a}' = m(-\vec{a}) \quad (8-4-2)$$

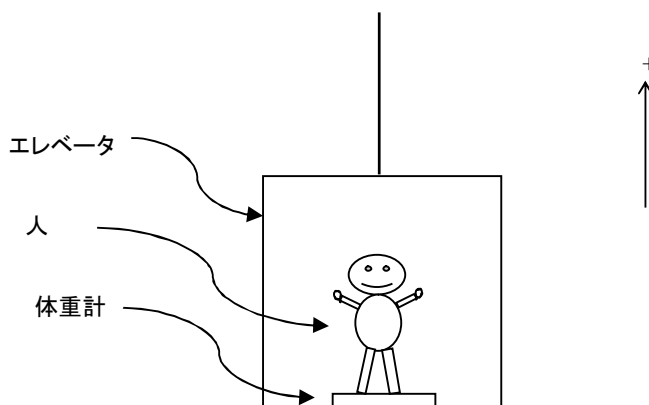
ここで、 m は加速度運動する物体内にある人(物体)の質量、 \vec{a}' は加速度運動する物体内にある人(物体)が感じる加速度、 \vec{a} は加
速度運動する物体本体の加速度であり、

$$\vec{a}' = -\vec{a} \quad (8-4-3)$$

の関係式が成り立つ。

問 8-4-1. 図のようにエレベータの中に質量 $m = 50 \text{ kg}$ の人が体重計に乗っている。下の場合について、慣性力の大きさ F 、慣
性力の向き、人に働く合力の大きさを求めよ。(問 5-4-4 と同じ問題だが、慣性力の観点から求める)

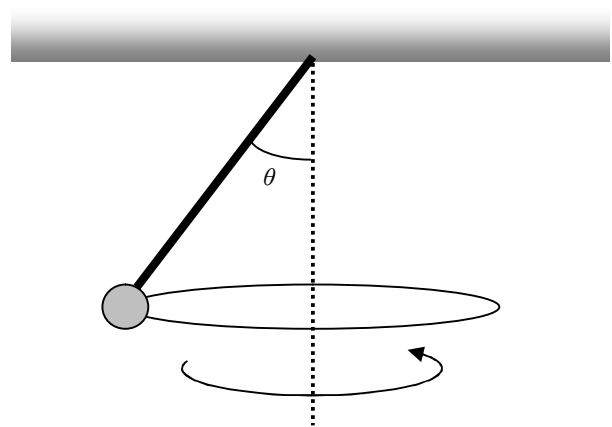
- 1) エレベータが一定の加速度の大きさ $a = 1.2 \text{ m/s}^2$ で上昇している場合。
- 2) エレベータが一定の加速度の大きさ $a = 2.3 \text{ m/s}^2$ で下降している場合。
- 3) エレベータが自由落下している場合。



⁸³ 「慣性の法則」が関係するのでこう呼ばれる。

問 8-4-2. 長さ ℓ の糸に質量 m のおもりをつけて図のように等速円運動させ、鉛直方向から角度 θ のまま保持した。

- 1) おもりにかかる糸の張力の大きさ S を求めよ。
- 2) このおもりの円運動の回転半径 R を求めよ。
- 3) このおもりにかかる遠心力の大きさ F を求めよ。
- 4) このおもりの円運動の角速度 ω を求めよ。

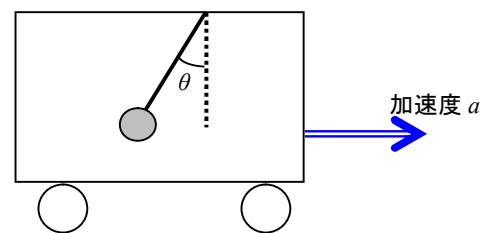


問 8-4-3. あらい面を持つ円盤の上に中心から距離 $\ell = 40$ cm のところに質量 $m = 500$ g のおもりを置いた。この円盤を回転させ少しずつ回転数をあげていった。周期 $T = 4.0$ s で円盤上にある物体は滑りだした。

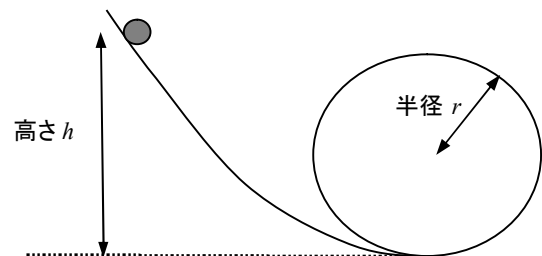
- 1) このときの円盤の角速度 ω を求めよ。
- 2) この物体に働く最大静摩擦力の大きさ F_0 を求めよ。
- 3) 静止摩擦係数 μ を求めよ。

問 8-4-4. バスがある加速度で発進した時、バスの天井からひもでつるした質量 m のおもりが図のように鉛直方向から角度 θ だけ傾いた。

- 1) このバスの加速度の大きさ a を求めよ。
- 2) ひもに発生する張力の大きさ S を求めよ。
- 3) 慣性力の大きさ F を求めよ。

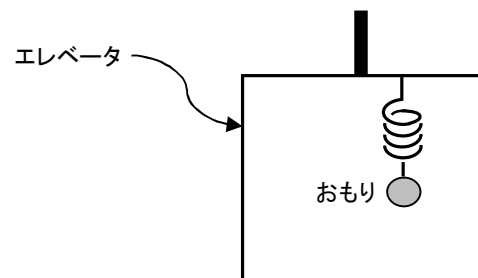


問 8-4-5. 図のように滑らかなレールがある。このレール上の底から高さ h の位置から質量 m の球を静かに滑らせた。この球が半径 r のレールの円周上をきれいに円運動するための高さ h の最小値を計算せよ。



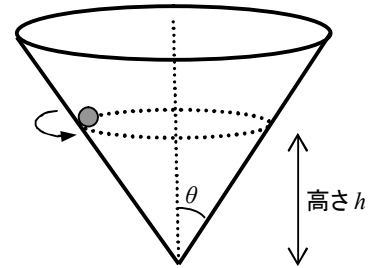
問 8-4-6. 図のようにエレベータの天井からバネ定数 k のバネの先端に質量 m のおもりがついている。

- 1) エレベータが止まっているとき、このバネは何もおもりをつけていない状態からどれだけ伸びるか？
- 2) エレベータが上向きに加速度の大きさ a で上昇しているとき、このバネは何もおもりをつけていない状態からどれだけ伸びるか？
- 3) エレベータが下向きに加速度の大きさ a で下降しているとき、このバネは何もおもりをつけていない状態からどれだけ伸びるか？



問 8-4-7. 図のように内面が滑らかな中空の円錐がある. 頂点から高さ h で質量 m の球が水平な円運動をしている.

- 1) 円運動の回転半径 R を求めよ.
- 2) この球に生じる遠心力の大きさ F を求めよ.
- 3) この円運動の周期を求めよ.

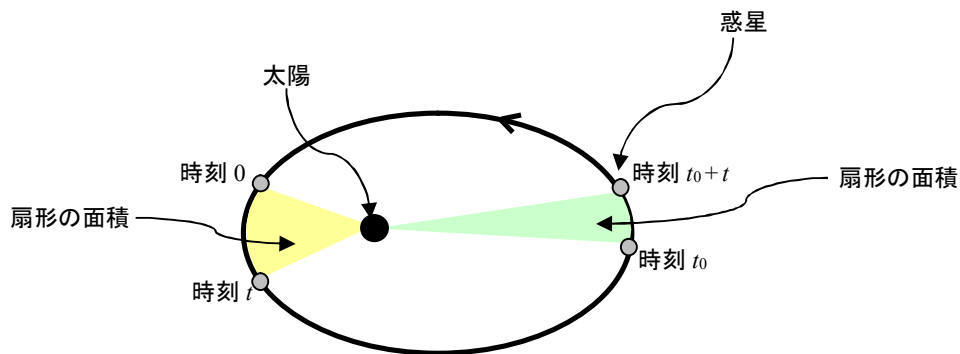


8-5. 円運動の例⁸⁴ — 惑星の運動と万有引力 —

円運動の例として, 地球や火星などの惑星が太陽の回りを回る公転運動を考えよう. 惑星が太陽の回りを回る公転運動を再発見したのは 16 世紀前半の天文学者のコペルニクスである. その後, 16 世紀後半, デンマークの天文学者ティコ・ブラーエが地球から見た惑星の位置を観測し, 膨大な記録を残した. その観測データに基づき弟子のケプラーは膨大な計算を行って, 惑星の運行に対して下の 3 つの法則(ケプラーの法則)を発見した.

- ① 第 1 法則; 惑星の楕円軌道で太陽の回りを回っている(金星, 地球などはほぼ円軌道).
- ② 第 2 法則; 一定時間に進む軌道の円弧とその間の太陽と惑星とを結ぶ 2 つの線分からなる扇形の面積は一定である.
- ③ 第 3 法則; 惑星の公転周期 T の 2 乗と軌道半径 R の 3 乗の比は惑星によらずに一定である.

$$\rightarrow T^2/R^3 = C \quad (C \text{ は定数}) \quad (8-5-1)$$



(ケプラーの第 2 法則; 惑星が同じ時間間隔で進む場合, 太陽から遠くとも近くともその扇形の面積は等しい.
 \rightarrow 惑星が太陽から遠い位置にあるとゆっくり回り, 近いと速く回る)

・万有引力の公式の導出

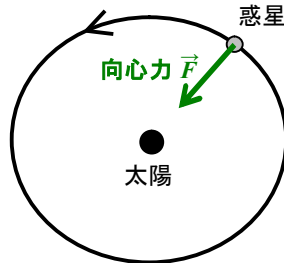
以下ではケプラーの法則と円運動の性質を使って, 万有引力の公式を導出する. 簡単のために下の仮定を置く.

- ① 惑星の軌道は円軌道で, 惑星は太陽に回りを等速円運動している.
- ② 惑星の運行に影響を与えるのは太陽だけである. \leftarrow 他の惑星の影響は無視する.

⁸⁴ 時間がない場合は省略してもよい.

惑星の質量を m とすると、惑星は等速円運動しているので、向心力 \vec{F} の向きは中心方向(惑星から太陽方向)でその大きさ F は惑星の回転半径(太陽と惑星間の距離)を R 、円運動(公転運動)の角速度を ω とすると下の式で表すことができる。

$$F = m R \omega^2 \quad \leftarrow \text{円運動の性質より} \quad (8-5-2)$$



次に、ケプラーの第3法則(8-5-1)式を上(8-5-2)式に適用する。 $\omega = 2\pi/T$ より、(8-5-2)式は定数 C を用いて

$$F = m R \omega^2 = m R (2\pi/T)^2 = \frac{4\pi^2}{C} m \frac{1}{R^2} \quad (8-5-3)$$

となる(最後の等号でケプラーの第三法則を適用させた)。この向心力は惑星と太陽の間に働く力なので、作用・反作用の法則に則って考えると、太陽にも逆向きで同じ大きさの力が作用することになる。上の式は惑星の質量 m のみが含まれているが、惑星と太陽を同等に考えると、太陽の質量 M も含んでいなければならない。したがって、向心力の大きさ F は惑星の質量にも太陽の質量にも比例すると考えられる。上の式の定数を新たな定数 G を導入する。

$$\frac{4\pi^2}{C} \rightarrow G M \quad (8-5-4)$$

したがって、(8-5-3)式は、下の式のような形に表すことができる。

$$F = G \frac{M m}{R^2} \quad (8-5-5)$$

ニュートンはさらに、この力は惑星と太陽ばかりでなく質量の持っている物体間にも必ず働いていると考え、これを**万有引力**と名づけた。万有引力において、物体間に働く力は引力である。また、定数 G は万有引力定数と呼ばれ、その数値は観測から

$$G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \frac{\text{m}^2}{(\text{kg})^2} \quad (8-5-6)$$

と与えられる。(8-5-5)式で表されるような全ての物体間に働く引力の法則を「**万有引力の法則**」と呼ぶ。

問 8-5-1. 地球の自転と公転の回転数 f と角速度 ω を求めよ。

問 8-5-2. 地球と太陽の間の距離 R は約 1.50×10^{11} m である。

1) (8-5-1)式で与えられる定数 C を求めよ。

- 2) (8-5-4)式と(8-5-6)式から太陽の質量 M を見積もれ.
- 3) 太陽から見て地球の 2 倍の距離に惑星がある場合, この惑星の公転周期 T' を求めよ.

問 8-5-3. 地球の表面にある物体と地球には, 万有引力に引き合っている. 物体にかかる重力の原因は万有引力である. 万有引力の表式(8-5-5)式より, 重力加速度の大きさ g について, 万有引力定数 G , 地球の半径 R , 地球の質量 M を用いて表せ.

問 8-5-4. 万有引力定数 $G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/(\text{kg})^2$, 重力加速度 $g = 9.807 \text{ m/s}^2$ とする.

- 1) 地球の半径は約 6380 km である. 地球の質量 $M_{\text{地球}}$ を見積もれ.
- 2) 月の半径は約 1740 km である. そして月の重力は地球の重力の 1/6 倍になる. 月の質量 $M_{\text{月}}$ を見積もれ.
- 3) 月が地球の周りを回る周期 T と角速度 ω を求めよ.
- 4) 上のデータから月と地球の間の距離 R を見積もれ.

9. #角運動量と力のモーメント

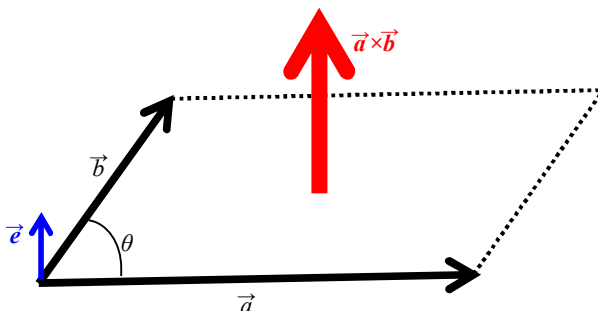
8章では回転運動の基本である等速円運動⁸⁶を行う物体の運動の性質を調べた。9章では止まっていた物体が回転運動し始める時の運動の法則について調べる。回転を始めるためには力のモーメントと呼ばれる量が物体に働く必要がある。回転の角速度 ω が時間変化する場合(回転速度が変化する場合で、回転を始める時もこの場合に相当する)、それを支配する運動方程式をこの章で導出する。この運動方程式は、ニュートンの運動の第2法則である運動方程式を用いて導出される。

9-0. 数学的準備(ベクトルの外積)

7章では、ベクトルの内積について学習した。ここでは、内積とは別な計算規則に従うベクトルどうしの積となる「ベクトルの外積⁸⁷」について学習する。内積は2次元、3次元、...のベクトルにおいて計算することができたが、外積は3次元のベクトルについてのみ計算できる。また、ベクトルの外積は、「向きと大きさを持つ」ので、「ベクトル量」となる。

3次元のベクトル \vec{a} と \vec{b} があるとすると、 \vec{a} と \vec{b} のベクトルの外積は、 $\vec{a} \times \vec{b}$ と表され、下の式で定義される。

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{array}{l} \text{大きさ} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = ab \sin \theta \\ \text{向き} = \text{右ネジ(右手で回すネジ)で、}\vec{a}\text{を}\vec{b}\text{に重ねるようにして回すときに右ネジが進む向き} \\ \quad (\text{回す時の角度}\theta\text{は、}\mathbf{0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ}\text{の範囲で回す。}\rightarrow \sin \theta\text{は正の値をとる}) \\ \rightarrow \text{下の図では}\vec{e}\text{の向き}(\vec{e}\text{は大きさが1の単位ベクトルで右ネジの進む向きを表す}) \end{array} \right. \quad (9-0-1)$$

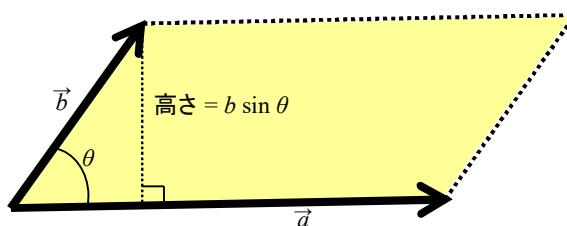


したがって、上の図で2つのベクトルの外積は大きさと向きを合わせて書くと、下の式のように表すことができる。

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin \theta \vec{e} \quad (9-0-2)$$

* 外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の意味

- $(\vec{a} \times \vec{b})$ の大きさ = $ab \sin \theta = \vec{a}$ と \vec{b} の始点を一致させてできる平行四辺形の面積
- = 底辺の長さ \times 高さ = $a \times (b \sin \theta)$



2年生では省略してよい。

⁸⁶ 等速円運動では回転の角速度 ω も一定。

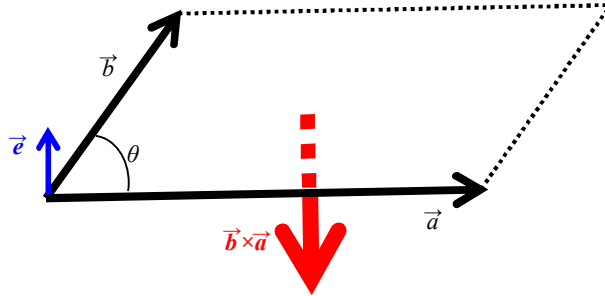
⁸⁷ ベクトルの外積を「ベクトル積」と呼ぶこともある。これに対し、ベクトルの内積は「スカラー積」と呼ばれることがある。

- ・ $(\vec{a} \times \vec{b})$ の向き
 = (右ネジを用いて) \vec{a} を回して, \vec{b} に重ねるとき, 反時計回り(+回転)か, 時計回り(-回転)か?

・ 外積の性質

積の順序を逆にして, $\vec{b} \times \vec{a}$ の場合の向きは「 \vec{b} を \vec{a} に重ねるようにして回すときに右ネジが進む向き」となるので, $\vec{a} \times \vec{b}$ の向きと逆向きになる(外積はかけ算の順序による). (9-0-2)式での単位ベクトル \vec{e} を用いると下の式が成立する.

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}) = a b \sin \theta (-\vec{e}) \tag{9-0-3}$$



$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \tag{分配則} \tag{9-0-4}$$

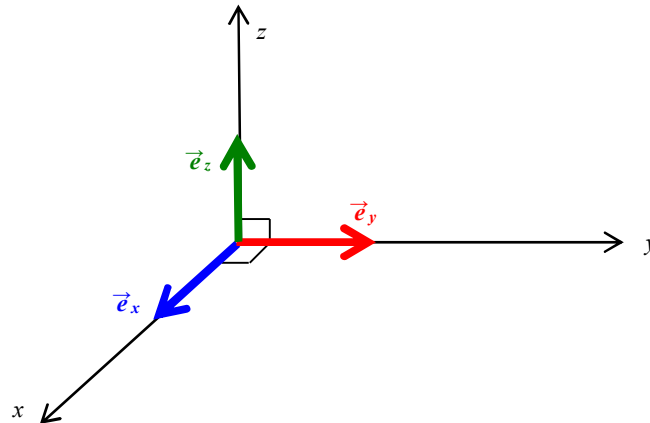
$$\vec{a} \times (m \vec{b}) = (m \vec{a}) \times \vec{b} = m (\vec{a} \times \vec{b}) \tag{m はスカラー} \tag{9-0-5}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0 \tag{同じベクトルどうしの外積⁸⁸} \tag{9-0-6}$$

・ 単位ベクトルどうしの外積

3次元空間の単位ベクトルは3つある. これを図示すると, 下の図のようにそれぞれ, 座標軸方向を向いたベクトルとなり, それぞれのベクトルの間の角度は 90° となる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_x = x \text{ 方向を向いた単位ベクトル} = (1, 0, 0) \tag{9-0-7} \\ \vec{e}_y = y \text{ 方向を向いた単位ベクトル} = (0, 1, 0) \tag{9-0-8} \\ \vec{e}_z = z \text{ 方向を向いた単位ベクトル} = (0, 0, 1) \tag{9-0-9} \end{array} \right.$$



⁸⁸ 同じベクトルの外積では, その間の角度 $\theta = 0^\circ$ となるので, $\sin \theta = \sin 0 = 0$ となる.

同じベクトルどうしの外積は、2つのベクトルの間の角度 θ が 0° なので、下の式ようになる。

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0 \quad (9-0-10)$$

次に、異なる単位ベクトル間(異なる単位ベクトル間の角度 θ は 90°)の外積は大きさが1で、向きは右ネジの進む方向に注意すると下の式ようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \end{array} \right. \quad (9-0-11)$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \quad (9-0-12)$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \quad (9-0-13)$$

・ 外積の成分表示

3次元のベクトル \vec{a} を成分表示して、単位ベクトルを用いると下の式のように表される。

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \quad (9-0-14)$$

\vec{b} も同様に表現できる。単位ベクトルどうしの外積の結果(9-0-11)式~(9-0-13)式の結果を用いると下の式のような結果を得られる。

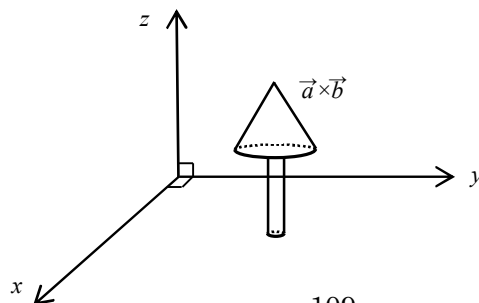
$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \times (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z) \\ &= a_x b_y (\underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}_{\vec{e}_z}) + a_x b_z (\vec{e}_x \times \vec{e}_z) + a_y b_x (\vec{e}_y \times \vec{e}_x) + a_y b_z (\underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_z}_{\vec{e}_x}) + a_z b_x (\vec{e}_z \times \vec{e}_x) + a_z b_y (\underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_y}_{\vec{e}_x}) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z \\ &= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \end{aligned} \quad (9-0-15)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (9-0-16)$$

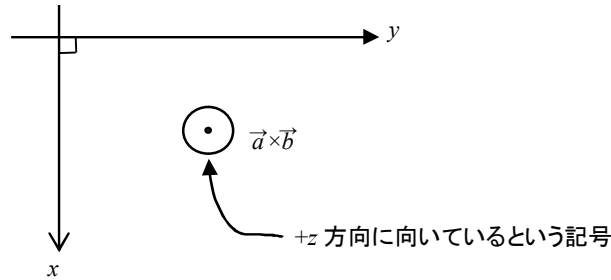
最後の等式は行列式を用いて表した。

・ 向きを表す記号

図のように x 軸, y 軸, z 軸があつて、ベクトルの外積 ($\vec{a} \times \vec{b}$) が $+z$ 方向を向いているとする。



これを $+z$ 方向から見ると、外積($\vec{a} \times \vec{b}$)は xy 平面から上向きに向いているので矢印の上側しか見えない。これを表す記号として、下の図のような記号(紙面の奥から表に向かうという記号で、中央部の点が矢印の上側を意味する)を導入する。



同様に $+z$ 方向から見たときに、「 $-z$ 方向を向いている」という記号は矢印のしっぽがみえるので「 \otimes 」という記号で表現する。

問 9-0-1. 下のように \vec{a} と \vec{b} の大きさと 2 つのベクトルの間の角 θ となるとき、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と外積の大きさ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ を計算せよ。

- 1) $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = \sqrt{3}, \theta = \pi/3$ 2) $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2\sqrt{2}, \theta = \pi/2$
 3) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3\sqrt{2}, \theta = 3\pi/4$ 4) $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 2, \theta = 5\pi/6$

問 9-0-2. 下のように 2 つのベクトル \vec{a} と \vec{b} について内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を計算せよ。

- 1) $\vec{a} = (3, 1, 0) \quad \vec{b} = (-2, 1, 2)$ 2) $\vec{a} = (1, 1, 2) \quad \vec{b} = (-2, -1, 0)$
 3) $\vec{a} = (1, -1, 2) \quad \vec{b} = (-2, 2, -4)$ 4) $\vec{a} = (-3, -2, -1) \quad \vec{b} = (1, 2, 3)$
 5) $\vec{a} = (1, 1, 0) \quad \vec{b} = (-2, 1, 0)$ 6) $\vec{a} = (1, -1, 0) \quad \vec{b} = (-2, 1, 0)$

問 9-0-3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ について行列式を用いて表せ。それぞれのベクトルは $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \dots$ のように表せるものとする。

問 9-0-4. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ が成り立つことを確かめよ。

問 9-0-5. $\vec{a} = (3, 0, 0) \quad \vec{b} = (0, 4, 0) \quad \vec{c} = (0, 0, 5)$ の時、 $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ の値を求め、この量はどのような性質の量にあたるかについて書け。

問 9-0-6. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = 0$ となることを確かめよ。

問 9-0-7. 下の平面上のベクトル \vec{a} と \vec{b} について外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の向きを記号「 \odot 」または「 \otimes 」で表せ。

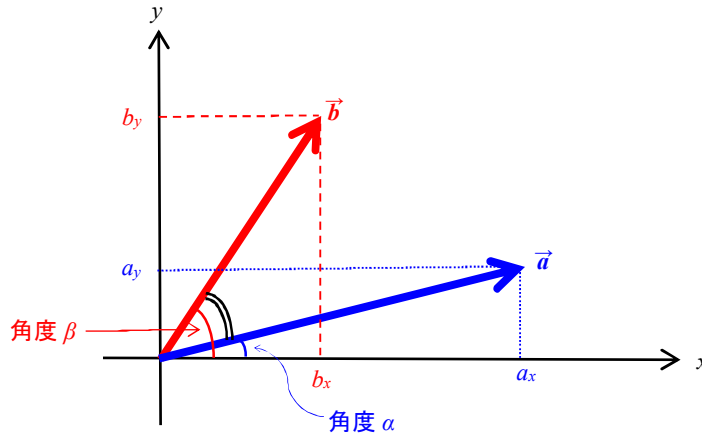
- 1)
- 2)
- 3)
- 4)

・ 内積と三角関数の加法定理

2次元のベクトルの内積から三角関数の余弦($\cos \theta$)に関する加法定理を導出する.

2つのベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y) = (a \cos \alpha, a \sin \alpha)$, $\vec{b} = (b_x, b_y) = (b \cos \beta, b \sin \beta)$ を考える.

ここで, \vec{a} の大きさ = a , \vec{b} の大きさ = b とする. 図のように2つのベクトルの間の角度を θ とする ($\theta = \beta - \alpha$).



$$\begin{aligned} \text{内積 } \vec{a} \cdot \vec{b} &= a b \cos \theta = a b \cos (\beta - \alpha) \\ &= a_x b_x + a_y b_y = a b \left(\frac{b_x}{b} \cdot \frac{a_x}{a} + \frac{b_y}{b} \cdot \frac{a_y}{a} \right) \\ &= a b (\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha) \end{aligned}$$

→ したがって, 余弦に対する加法定理が導かれる.

$\cos (\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$	(9-0-17)
---	----------

・ 外積と三角関数の加法定理

3次元のベクトルの内積から三角関数の正弦($\sin \theta$)に関する加法定理を導出する.

2つのベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a \cos \alpha, a \sin \alpha, 0)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = (b \cos \beta, b \sin \beta, 0)$ を考える.

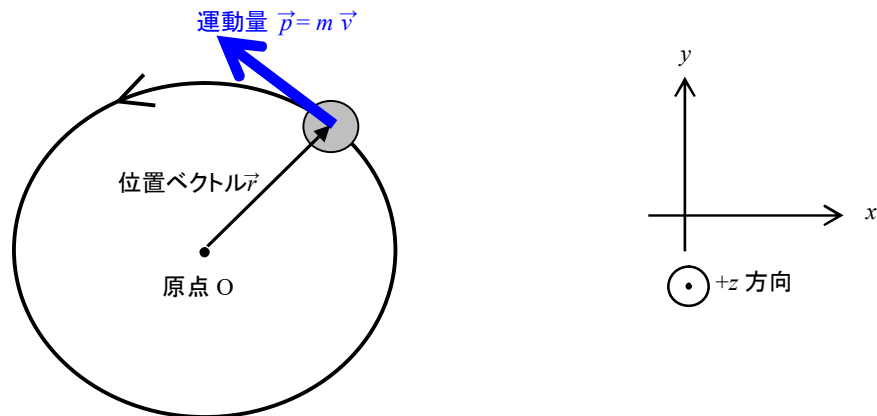
$$\begin{aligned} \text{外積 } (\vec{a} \times \vec{b}) \text{ の大きさ} &= a b \sin \theta = a b \sin (\beta - \alpha) \\ = (\vec{a} \times \vec{b}) \text{ の } z \text{ 成分} &= a_x b_y - a_y b_x = a b \left(\frac{b_y}{b} \cdot \frac{a_x}{a} - \frac{b_x}{b} \cdot \frac{a_y}{a} \right) \\ &= a b (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) \end{aligned}$$

→ したがって, 余弦に対する加法定理が導かれる.

$\sin (\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha$	(9-0-18)
---	----------

9-1. 回転と角運動量(Angular momentum) \vec{L}

下の図のように物体がある点 O を中心としてその回りを回転運動⁸⁹しているとしよう。直進運動の勢いを表す量として「運動量 \vec{p} 」を6章で導入したが、それと同様に、回転運動の勢いを表す量として、ここで、「角運動量 \vec{L} 」を導入する。



原点 O からの位置ベクトル \vec{r} にある質量 m の物体が速度 \vec{v} で動いているとき、原点 O のまわりの角運動量 \vec{L} を下の式のように位置 \vec{r} と運動量 \vec{p} の外積によって定義する。

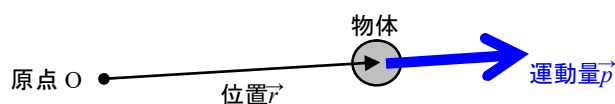
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (9-1-1)$$

上の式のように角運動量はベクトルの外積で表される。上の図のような運動(xy 平面上の円運動)では角運動量 \vec{L} の向きは $+z$ 方向となる。このとき、物体は $+z$ 方向から見て、 z 軸を中心として反時計回りに回転していることを意味する⁹⁰。

・ 回転しない場合(直線運動の場合)

- 位置 \vec{r} と運動量 \vec{p} が平行な場合($\vec{r} \parallel \vec{p}$)
- 物体は原点 O から常に遠ざかっている(近づいている)
- 原点 O の回りの回転はなし
- ⇒ $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = 0$

(9-1-2)



⁸⁹ 回転運動を行う場合は「どの軸を中心として回転しているか」を示し、その軸の $+z$ 側から見て、「反時計回り」か「時計回り」に回転しているかを示す必要がある。

⁹⁰ 単純な円軌道ばかりでなく楕円軌道や遠方から原点に近づきまた遠ざかる運動も角運動量を持ち、(その運動の一部が)回転運動していると言うことができる。

・ 角運動量の単位

角運動量の単位は(9-1-1)式の定義より、下の式のように表すことができる。

$$\text{角運動量の単位} = \text{位置の単位} \times \text{運動量の単位} = \text{m} \times \text{kg} \cdot \text{m/s} = \text{kg m}^2/\text{s} \quad (9-1-3)$$

・ xy 平面上の回転の角運動量

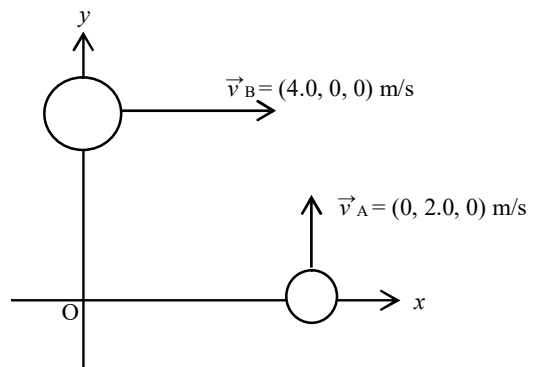
また、 xy 平面上で円運動(反時計回り)する場合は、円運動の中心点を原点 O とすると、その場合の角運動量 \vec{L} は位置 \vec{r} (大きさ $= r$) と速度 \vec{v} (大きさ $= v = r\omega$) は直交し、下の式のように z 方向を向く。

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v} = m r^2 \omega \vec{e}_z \quad (\leftarrow xy \text{ 平面の反時計回りの円運動では } z \text{ 方向を向く}) \quad (9-1-4)$$

問 9-1-1. 長さ $l = 50 \text{ cm}$ の棒(棒の質量は無視できる)の先端に質量 $m_A = 2.0 \text{ kg}$ と $m_B = 4.0 \text{ kg}$ の物体 A, B をつけて、A から長さ $r_A = 20 \text{ cm}$ の位置を中心にして、反時計周りに 2 秒間で 4 回転の割合で回転させた。

- 1) 回転の角速度 ω を求めよ。
- 2) 物体 A と B の速さを求めよ。
- 3) 物体 A と B での運動量の大きさを求めよ。
- 4) 物体 A と B での角運動量の大きさ向きを求めよ。

問 9-1-2. 質量 $m_A = 2.0 \text{ kg}$ の物体 A と質量 $m_B = 3.0 \text{ kg}$ の物体 B が時刻 $t = 0$ で図のように速さ $v_A = 2.0 \text{ m/s}$ と $v_B = 4.0 \text{ m/s}$ で等速度運動している。時刻 $t = 0 \text{ s}$ で、物体 A は x 軸上にあり、原点から $+4.0 \text{ m}$ の位置に、物体 B は y 軸上にあり、原点から $+4.0 \text{ m}$ の位置にある。時刻 $t = 0, 1.0, 2.0 \text{ s}$ での物体 A と物体 B の位置 $\vec{r}(t)$ と角運動量 $\vec{L}(t)$ をそれぞれ求めよ。



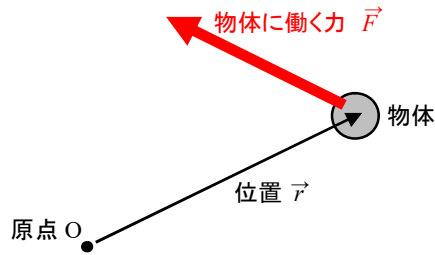
9-2. 力のモーメント⁹¹ (Moment of force) \vec{M}

力は物体の運動量(運動の勢いを表す物理量)を変える原因となる物理量であった⁹²。同様に、物体の角運動量(物体がある軸の回りに回転する回転運動の勢いを表す物理量)を変える原因となる物理量が「力のモーメント \vec{M} 」である。力のモーメント \vec{M} は回転軸上にある地点を原点 O にとり、そこからの力が働く位置を位置ベクトル \vec{r} とし、その位置で作用する力 \vec{F} の外積として、下の式で定義される。

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (9-2-1)$$

⁹¹ 物理における「モーメント」とは位置ベクトル \vec{r} とある物理量 \vec{A} の外積 $\vec{r} \times \vec{A}$ で表された量を指す。したがって、角運動量は運動量のモーメントということもできる。または、「長さ \times ある物理量(長さの重みをつけた物理量)」のことをモーメントと呼ぶ。

⁹² 運動量の単位時間当たりの変化量 $= (\vec{p} - \vec{p}_0)/\Delta t = m \vec{a}$ となる。したがって、物体に力が加わると、運動量も変化する。

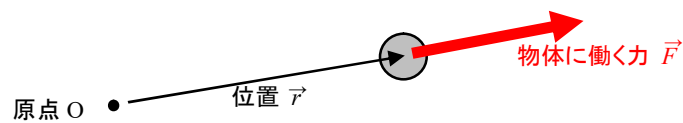


上の式より, 力のモーメントの単位は

$$\begin{aligned} \text{力のモーメントの単位} &= \text{位置(長さ)の単位} \times \text{力の単位} = \text{m} \times \text{N(ニュートン)} \\ &= \text{m} \times \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \end{aligned} \quad (9-2-2)$$

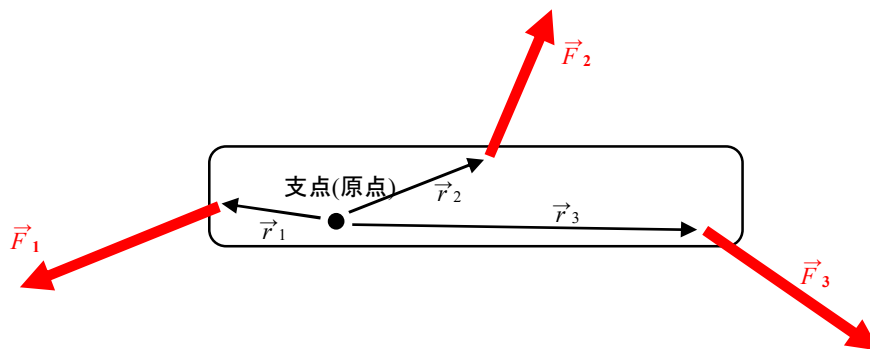
となり, 合成単位としてみると仕事やエネルギーの単位 J(ジュール)と等しくなる. しかし, 物理量としての意味が違うので, **力のモーメントの単位は, 「m N(または, Nm)」**を用いる. 上の図のように物体に力が働くと, 物体は力の方向に加速する. それに伴って, 図のように, 原点を中心として反時計回りに回り始めようとする. 力のモーメント \vec{M} の向きが, 紙面から上方向「+」を向く場合は紙面上で反時計回りに回転し始める.

一方, 下図のように力が働くと, 力と同じ向きに物体は加速するが, 原点の回りに回転運動を始めることはない(下の図では, $\vec{r} \parallel \vec{F}$ となるので, 「力のモーメント = 0」となる).



・力と力のモーメントのつり合い

下の図のようにある物体があり, ある支点(原点)を決め, その支点から, 位置 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots$ に力 $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ が働いているとしよう.



① 物体が並進運動(直線運動)し始めない条件

⇒ 力が釣り合っている条件式

$$\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \text{合力} = 0 \quad (9-2-3)$$

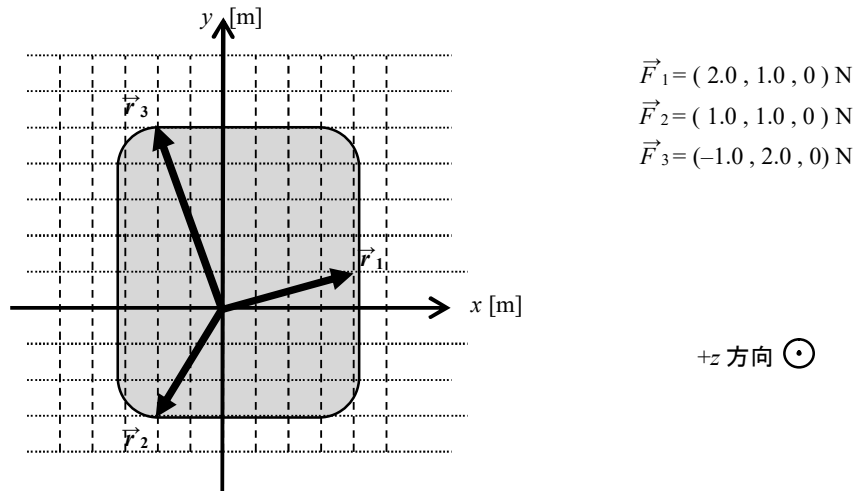
② 物体が支点を回転軸として回転運動し始めない条件

⇒ 力のモーメントが釣り合っている条件式

⇒ $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots =$ 力のモーメントの合計

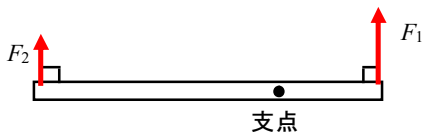
$$= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots = 0 \quad (9-2-4)$$

問 9-2-1. ある大きさを持った物体の3つの支点からの位置 $\vec{r}_i (i=1\sim 3)$ に力 $\vec{F}_i (i=1\sim 3)$ が作用している. それぞれの力による支点 O からの力のモーメント $\vec{M}_i (i=1\sim 3)$ と力のモーメントの合計 \vec{M}_{tot} を求めよ(ベクトルの座標表示を用いる). また, 物体はどちらに回り始めようとするか?($+z$ 方向から見て, 反時計回りか? 時計回りか?)

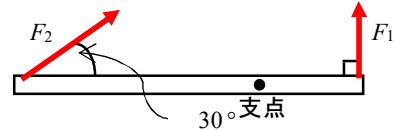


問 9-2-2. 長さ $a = 5.0$ m の棒がある. 左から 3.0 m の位置を支点とする. 棒の右端に力の大きさ $F_1 = 4.0$ N となる力が棒に対して垂直に働いていて, 左端にも大きさ F_2 の力が働いている. 棒が回転し始めないとき, 力 F_2 の大きさを求めよ.

1)

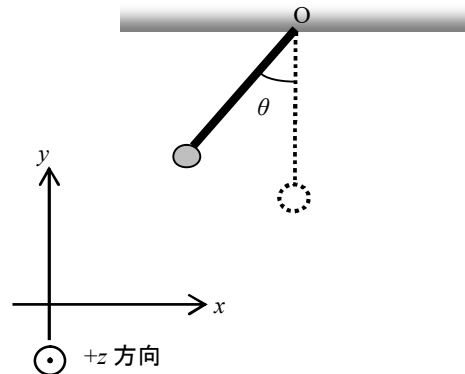


2)



問 9-2-3. 原点 O から長さ l の糸の先に質量 m のおもりをつけた. 鉛直下方向からの角度を $\theta(t)$ として以下の間に答えよ.

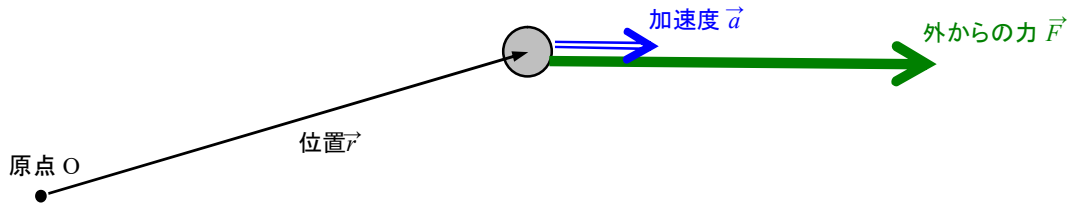
- 1) 物体の位置 $\vec{r}(t)$ に対して角度 $\theta(t)$ を用いて表せ.
- 2) 重力 $m\vec{g}$ による力のモーメント $\vec{M}_{重力}$ を表せ.
- 3) 物体に働く糸の張力 \vec{T} による力のモーメント $\vec{M}_{張力}$ を表せ



9-3. 角運動量の運動方程式⁹³

前の節では、(9-2-4)式で表されるように、「力のモーメントの総和が「0」となる場合、物体全体が回転運動し始めない。または、一定の角速度で回転を続ける」ことがわかった。この節では、力のモーメントの総和が「0」でない場合の回転運動について考えてみよう。

質量 m の物体に対して、外から力 \vec{F} が働いている場合に物体には加速度 \vec{a} が発生し、それらの間には(9-3-1)式のような運動方程式が成立する。



$$m \vec{a} = \vec{F} \quad (9-3-1)$$

加速度 \vec{a} に対し、速度 \vec{v} の時間微分、「 $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ 」を用いると上の式は

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (9-3-1)'$$

と表される。さらに、運動量 $\vec{p} = m\vec{v}$ を用いると運動方程式は(9-3-2)式のようにも表すことができる。

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (9-3-2)$$

回転運動に関する運動方程式を導出するため、(9-3-2)式において左から位置ベクトル \vec{r} との外積をとると、下の式が得られる。

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (9-3-3)$$

(9-3-3)式の左辺は、下の式のように、速度 $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ と運動量 $\vec{p} = m\vec{v}$ の外積は 0 なので、角運動量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ の時間変化 $d\vec{L}/dt$ に等しい。

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

一方、(9-3-3)式の左辺は、力のモーメント $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ と等しいので、(9-3-3)式は下の式のように**角運動量に関する運動方程式**が得られる。

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (\text{角運動量の時間変化} = \text{力のモーメント}) \quad (9-3-4)$$

⁹³ 以後、時間微分を用いて議論する。

さらに、物体に複数の力が働いている場合、運動方程式(9-3-1)式の右辺の力を合力として扱うので、角運動量に関する運動方程式(9-3-4)式は下の式ようになる。

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots = \text{力のモーメントの総和} \quad (9-3-5)$$

角運動量 \vec{L} が一定で時間による変化がない場合、(9-3-5)式の左辺 = 0 となる。

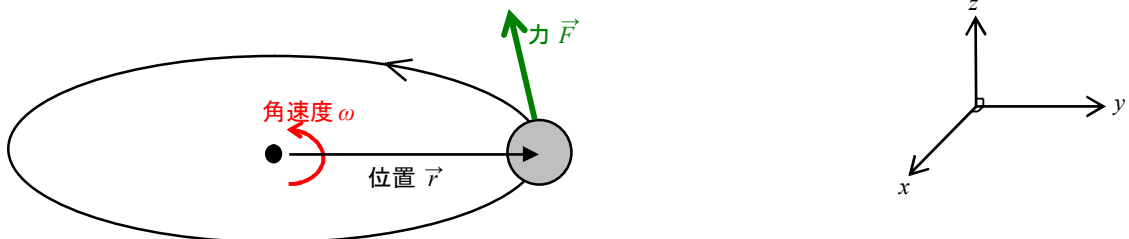
角運動量 \vec{L} = 一定 → 回転運動の変化なし(止まったままか、一定の角速度で回転)
→ 回転運動でのつり合いがとれている

$$\rightarrow \text{力のモーメントの総和} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots = 0 \quad (9-3-6)$$

これは(9-2-4)式と同じであり、角運動量に対する運動方程式からも回転に対するつり合いの条件式が導出される。(9-3-6)式は角運動量が一定(「**角運動量保存則が成立する**」)のための条件式となる。

・円運動に対する運動方程式

z 軸を回転軸として、原点からの距離 r が一定となる円運動⁹⁴を考える。このとき、物体に働く力 \vec{F} も xy 平面上で働く。このため、物体は xy 平面上にある半径 r の円周上を回転する。 z 軸を回転軸とし xy 平面上で回転する場合、力のモーメント \vec{M} は、 z 成分のみを持ち、 $\vec{M} = (0, 0, M_z)$ と表すことができる。同様に、角運動量 \vec{L} も z 成分のみ値を持ち、 $\vec{L} = (0, 0, L_z) = (0, 0, m r^2 \omega)$ と表すことができる。ここで、(9-1-4)式、 $\vec{L} = L_z \vec{e}_z = m r^2 \omega \vec{e}_z$ を用いた。したがって、角運動量の z 成分 $L_z = m r^2 \omega$ に対する運動方程式は角速度 ω のみ時間変化するので、(9-3-7)式のように表される。



$$m r^2 \frac{d\omega}{dt} = M_z \quad (9-3-7)$$

ここで、 $d\omega/dt$ は角速度 ω との時間変化で、1 秒間あたり角速度の変化⁹⁵で、並進運動の加速度 $a = dv/dt$ に相当する。

9-4. 慣性モーメントと回転の運動方程式

(並進運動に関する)運動方程式「 $m d\vec{v}/dt = \vec{F}$ 」と z 軸のまわりの回転に関する運動方程式(9-3-7)式とを比べてみよう。運動方程式の質量 m は慣性質量とも呼ばれ、物体の動きにくさを表す量である。これに対応して、回転運動の動きにくさを表す量として、慣性モーメント I を下の式のように導入する。

⁹⁴ 円運動であるが、必ずしも速さ v が一定の等速円運動ではない。

⁹⁵ 強引に言葉をつくと「 $d\omega/dt$ 」は角加速度と呼ぶこともできる (← 一般的な語句ではなく、あまり使われていない)

$$I = m r^2$$

(9-4-1)

このとき、角運動量の z 成分 L_z は $L_z = m r^2 \omega$ より、

$$L_z = I \omega$$

(9-4-2)

となる。この慣性モーメント I を用いると、 z 軸を回転軸とする回転に関する運動方程式(9-3-5)式は、下の式で表すことができる。

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_z$$

(9-4-3)

並進運動に関する運動方程式の(9-3-1)式との対応より、慣性モーメント I は回転に関する動きにくさを表す量である。

・回転の運動エネルギー

z 軸を回転軸として、原点からの距離 r が一定となる円運動における運動エネルギー K を考えよう。円運動では速さ $v = r \omega$ より、回転の運動エネルギーは下の式のようになる。

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

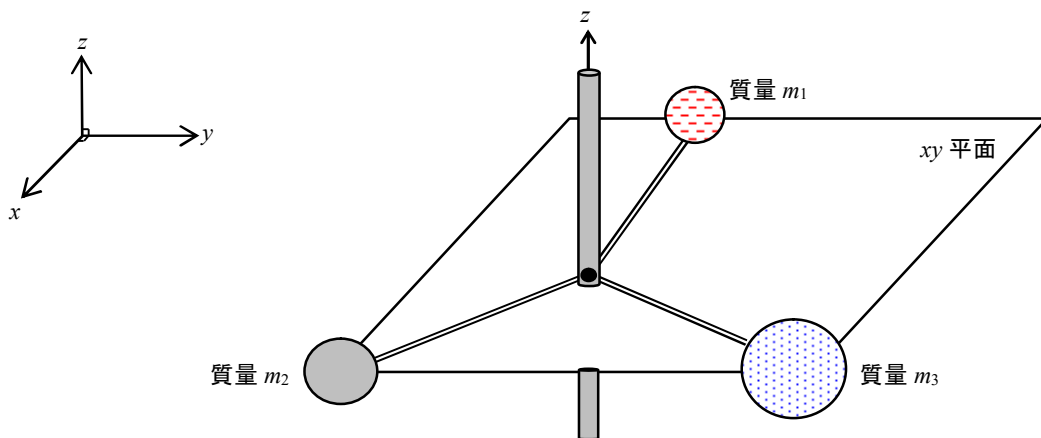
上の式に対して、慣性モーメント I を用いると、(9-4-4)式のように表される。

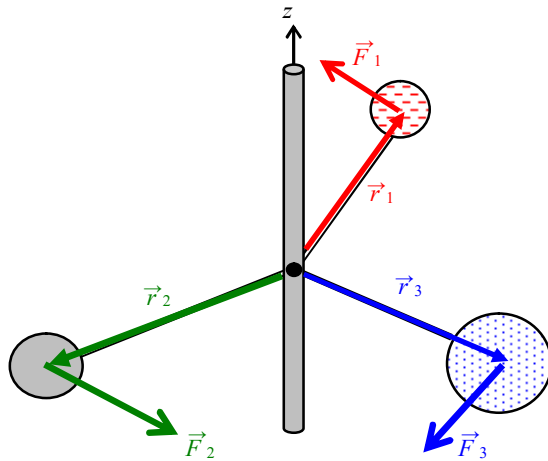
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

(9-4-4)

・複数の物体がある場合の回転の運動方程式

さらに、図のように原点から xy 平面上に固く質量の無視できる棒の先端に質量 m_i ($i=1\sim 3$)を持つ番号 i の物体がついていて、そこに力 \vec{F}_i が働いている場合を考える。この場合、棒が固いので 3 つの質量は原点を中心として同じ角速度 ω で回転する。





このとき、(9-3-7)式を拡張した角運動量に関する運動方程式は

$$(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2) \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_z = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 \quad (9-4-5)$$

と表される。ここで、 i 番目 ($i = 1 \sim 3$) の物体に働く力のモーメント $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ とする。3 つの物体からなる合成の慣性モーメント I を下の式で表す。

$$I = \sum_{i=1}^3 m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 \quad (9-4-6)$$

力のモーメントの総和 $\vec{M}_{\text{tot}} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$ とし、その z 成分を $M_{\text{tot},z}$ とすると、(9-4-5)式で z 成分のみをとると、次の回転に関する運動方程式が得られる。

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{tot},z} \quad (9-4-7)$$

さらに多くの質量を持つ系(質点系)に対しても、同様に扱うことができる。

・並進運動の運動方程式と回転運動の運動方程式の対応関係

並進運動の運動方程式と z 軸を回転軸とした回転運動の運動方程式より、下の表のような対応関係が成り立つ。

並進運動	回転運動
質量 m [単位; kg]	慣性モーメント I [単位; kg m ²]
速度 \vec{v} [単位; m/s]	角速度 ω [単位; 1/s]
加速度 $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ [単位; m/s ²]	角加速度 $d\omega/dt$ [単位; 1/s ²]
運動エネルギー $m v^2/2$ [単位; J]	運動エネルギー $I \omega^2/2$ [単位; J]
運動方程式 $m d\vec{v}/dt = \vec{F}$	運動方程式 $I d\omega/dt = M_z$