

Gibbs の現象の特性を陽的に含んだ級数展開

正員 小林 正典* 正員 祖田 直也*

Series Expansions Containing Explicitly Gibbs Phenomenon Characteristics

Masanori Kobayashi*, Member, Naoya Soda*, Member

When a Fourier series is used to approximate a periodic and piecewise smooth function with a jump discontinuity, an overshoot at the discontinuity occurs and is called Gibbs phenomenon. For explaining understandably and systematically this Gibbs phenomenon from the educational point of view, the representation method is proposed using an accordion-like folding convergence of the extremum values for the partial sums of its Fourier series at the discontinuity. Using an integration by parts to obtain Fourier coefficients and rearranging its Fourier series, the expansions are devised to show explicitly the overshoots at the discontinuities for any functions with jump discontinuities.

キーワード：Gibbs 現象, フーリエ級数, 第 1 種不連続, オーバーシュート, アコーディオン式折りたたみ収束

Keywords: Gibbs phenomenon, Fourier series, jump discontinuity, overshoot, an accordion-like folding convergence

1. まえがき

フーリエ級数を教える立場で Gibbs の現象を学んでみて、その本質を初学者にもわかるように記述された書物を見つけることができなかつた。フーリエ級数は電気回路や信号処理の学問で重要な概念である。その収束問題のよい例が Gibbs の現象である。その本質を電気系の学生たちが理解できるようにその説明方法を開発することにした。

Gibbs の現象の本質は Fig.1 に示した鋸波波形であり、文献(1), (2)が内外の書物に引用されることが多いことがわかった。文献(1)は Gibbs の現象を定性的に説明しており、文献(2)は数学的に詳述している。

本論文は文献(2)をベースとして、Gibbs の現象の本質を究め尽くしている。特に、一様収束しない場合の関数列の部分 and の収束について、従来とは異なるアプローチで具体的に分かりやすく説明している。さらに、第 1 種不連続点をもつ関数のフーリエ級数を、Gibbs の現象を直接表す項を含んだ形で表現して、一般的かつ具体的に分かりやすく説明している。これらは独立に開発したものであったが、その一部のアイデアはすでに方形波の場合⁽³⁾に使われていることがわかった。

Gibbs の現象は、一様収束しない場合の関数列の収束の最も面白い例であり、これをきちんと理解することは、関数列の収束の微妙さ・面白さを理解することにも通じる⁽⁴⁾。

Gibbs の現象は、フーリエ級数の部分和を Cesàro 和、すな

わち部分和の平均で置き換えると、起こらなくなる⁽⁵⁾⁽⁶⁾。一方、1980 年代後半に急速に発展し、データ圧縮、画像解析、信号処理などにおいてフーリエ解析と並んで必要不可欠のテーマとなったものに、ウェーブレットがある。そのウェーブレット展開は Cesàro 総和法に似た収束性を持つので、Gibbs の現象は起こらないと期待されていた。しかし、最近、Kelly⁽⁷⁾はある種のウェーブレット展開は原点で Gibbs の現象を起こすことを示した。Walter⁽⁶⁾はウェーブレット級数の Gibbs の現象を他の級数の場合と比較した。

本論文は、このようにますますその本質の理解が重要となってきた Gibbs の現象を初学者の立場に立ち、新たなアプローチでその本質を明らかにしている。

2. 部分和 $s_n(x)$ の山と谷の性質

〈2.1〉 部分和 $s_n(x)$ の山と谷 Fig.1 に示すように、区分的に滑らかで第 1 種不連続点をもつ関数

$$d(x) = (\pi - x)/2, \quad 0 < x < 2\pi, \quad d(0) = d(2\pi) = 0 \tag{1}$$

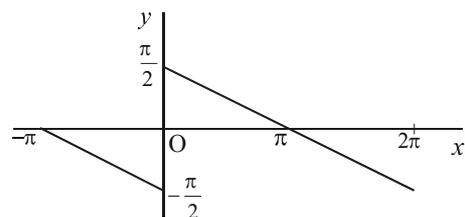


Fig. 1. A saw function $d(x)$ with a jump discontinuity.

* 茨城大学
〒316-8511 日立市中成沢町 4-12-1
Ibaraki University
4-12-1, Nakanarusawa-machi, Hitachi 316-8511

を周期が 2π であるとして、定義域を $(-\infty, \infty)$ に拡張して、次のフーリエ級数展開を得る⁽¹⁾⁽²⁾。

$$d(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \dots\dots\dots(2)$$

この部分 $s_n(x)$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \dots\dots\dots(3)$$

を関数列として考えて、その収束について考察する。
 $0 < x \leq \pi$ の区間で部分 $s_n(x)$ の曲線の形状を Fig.2 に示す。 $s_n(x)$ の曲線の極大点(本論文では山と呼ぶ。)と極小点(本論文では谷と呼ぶ。)では、 $ds_n(x)/dx = 0$ となる⁽³⁾。

$$ds_n(x)/dx = \sum_{k=1}^n \cos kx = \cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2} / \sin \frac{x}{2} \dots\dots\dots(4)$$

であるから、 $0 < x \leq \pi$ の区間でのそれらの個数は、 $ds_n(x)/dx$ の分子が 0 となる個数をそれぞれ調べて求め得る。その計算結果から、 $s_n(x)$ の曲線の山と谷は合計で n 個あり、 $n=2m+1$ のとき $m+1$ 個の山と m 個の谷、 $n=2m$ のときには、 m 個の山と m 個の谷(ただし、 $x=\pi$ は変曲点である。)をもつことがわかる。 $s_{18}(x)$ では山が $m=9$ 個、谷も $m=9$ 個が確認できる。

$s_n(x)$ の山を、 x 座標の小さい順に番号を付けると、それらの x 座標 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots$ は次式となる。

$$\xi_1 = \frac{\pi}{n+1}, \xi_2 = \frac{3\pi}{n+1}, \dots, \xi_k = \frac{(2k-1)\pi}{n+1}, \dots \dots\dots(5)$$

$s_n(x)$ の谷を、 x 座標の小さい順に番号を付けると、それらの x 座標 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k, \dots$ は次式となる。

$$\zeta_1 = \frac{2\pi}{n}, \zeta_2 = \frac{4\pi}{n}, \dots, \zeta_k = \frac{2k\pi}{n}, \dots \dots\dots(6)$$

〈2・2〉 部分 $s_n(x)$ の山と谷の極限 第1の山について考えてみると、部分 $s_n(x)$ は

$$s_n(\xi_1) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k\xi_1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k\Delta x}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{\sin x_k}{x_k} \Delta x \dots\dots\dots(7)$$

と変形できる。ここで、 $\Delta x = \xi_1 = \pi/(n+1)$ 、 $x_k = k\Delta x$ である。(7)式の右辺は、定積分

$$I(\pi) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \dots\dots\dots(8)$$

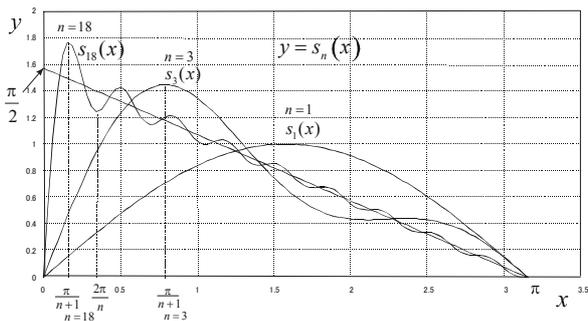


Fig. 2. Curves of partial sums $s_n(x)$.

を Fig.3 に示すように、数値積分法で求めるときの長方形の面積の和となっている⁽³⁾。すなわち、 n 個の長方形の面積 $\Delta S_k = (\sin x_k/x_k) \Delta x$ の和の極限として求めることができる。

$$I(\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n(\pi) \dots\dots\dots(9)$$

ここで、 $J_n(\pi) = \sum_{k=1}^n \Delta S_k$ であり、次式を得る。

$$J_n(\pi) = \sum_{k=1}^n \Delta S_k = s_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = s_n(\xi_1) \dots\dots\dots(10)$$

今度は、定積分 $I(\pi)$ の被積分関数 $\sin x/x$ を Fig.4 に示す。この関数は $(0, \pi)$ で正、 $(\pi, 2\pi)$ で負となり、交互に正負を繰り返す。この関数と x 軸とで囲まれる面積をそれぞれ A_1, A_2, A_3, \dots とすれば、 $A_1 > A_2 > A_3 > \dots \rightarrow 0$ であることがわかる。ゆえに、定積分

$$I(p) = \int_0^p \frac{\sin t}{t} dt$$

の最大値(第1極大値)は $p=\pi$ のときであり、第2極大値は $p=3\pi$ のとき、第 k 極大値は $p=(2k-1)\pi$ のときであり、最小値(第1極小値)は $p=2\pi$ のとき、第2極小値は $p=4\pi$ のとき、第 k 極小値は $p=2k\pi$ のときであることがわかる。すなわち、 $I(p)$ の最大値 $\sup I(p)$ は

$$\begin{aligned} \sup I(p) &= I(\pi) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \text{Si}(\pi) = 1.85193705\dots \left(> \frac{\pi}{2} \right) \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

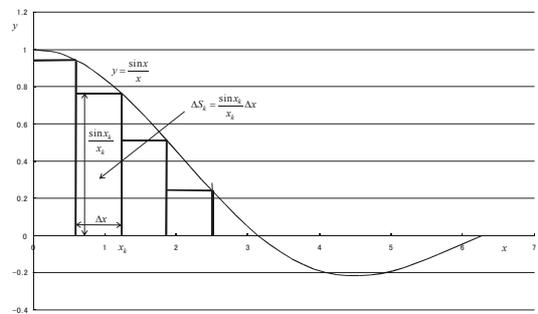


Fig. 3. Numerical integration $I(\pi) = \int_0^{\pi} (\sin x/x) dx$.

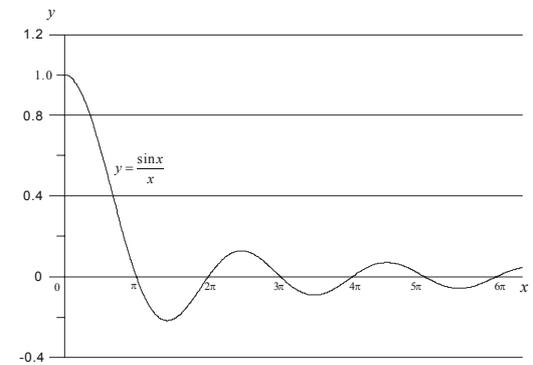


Fig. 4. The curve of the integrand $\sin x/x$ of $I(\pi)$.

である。この積分 $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ は正弦積分としてよく知られている。

したがって、第 1 の山の極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\xi_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = G' = \text{Si}(\pi) = 1.85193705 \dots \left(> \frac{\pi}{2}\right) \dots (12)$$

となり、減少数列 $x_n = \pi/(n+1) \rightarrow +0$ の部分積の山の関数列の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n)$ が $\text{Si}(\pi)$ と一致していることがわかる。この極限值 G' は Wilbraham-Gibbs 定数と呼ばれている⁽⁸⁾。 G' は $d(+0) = \pi/2$ より大きく、それらの比は

$$\frac{1}{d(+0)} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\xi_1) = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\xi_1) = G = \frac{2}{\pi} G' = 1.17897974 \dots \dots (13)$$

となる。この G は Gibbs 定数と呼ばれ⁽⁸⁾、第 1 種不連続点をもつ一般的な関数のフーリエ級数の部分積の不連続点での極限の最大オーバーシュート率は、すべてこの値となる(詳しくは後述する)。

さて、従来の多くの書物⁽²⁾⁽⁶⁾では、(13)式は

$$\frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 1.17897974 \dots \dots (14)$$

と書かれている。この(14)式を導くまでの概要を付録に示したが、Dirichlet 核 $D_n(x)$ を導入し、複雑な計算を行った後、0 に収束する正数列 $nh_n \rightarrow a(n \rightarrow \infty)$ を用いて、 $s_n(h_n)$ の値が最大となる条件として $a = \pi$ を決定している。

この 2 段階の従来の求め方は複雑である。また、上述したように、 $s_n(x)$ の山の座標は $\xi_1 = \pi/(n+1)$ であるから、従来の書物で用いられた関数列 $s_n(\pi/n)$ は山の近傍の値を表すが、山そのものの高さを表していないことがわかる。この点からも本論文の方法の方が直感的で理解し易いことがわかる。しかし、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi/(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi/n \text{ から } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\pi/(n+1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\pi/n)$$

が導かれ、関数列の極限は両者で一致する。

このように、部分積の山の関数列 $s_n(\pi/(n+1))$ を用いた極限である(13)式は、Gibbs の現象の最大オーバーシュート率を表していることが直感的に理解できることから、従来の(14)式よりは妥当な表現であることがわかる。

$d(x)$ は奇関数であるから、絶対値が最大なアンダーシュート率は次式となる。

$$\frac{1}{d(-0)} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(-\xi_1) = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\xi_1) = G \dots (15)$$

前述したように、 $s_n(x)$ の山の x 座標は、 $\xi_1 = \pi/(n+1)$, $\xi_2 = 3\pi/(n+1), \dots, \xi_k = (2k-1)\pi/(n+1), \dots$ と表されるから、第 1 の山の場合と同様に、 $s_n(x)$ の第 k の山の関数列の極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n\left(\frac{(2k-1)\pi}{n+1}\right) = \text{Si}((2k-1)\pi) \dots (16)$$

となる。すなわち、部分積 $s_n(x)$ の最大値は

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\pi/(n+1)) = G' \dots (17)$$

である。

また、 $s_n(x)$ の谷の x 座標は、 $\zeta_1 = 2\pi/n, \zeta_2 = 4\pi/n, \dots, \zeta_k = 2k\pi/n, \dots$ と表されたから、山の場合と同様に、 $s_n(x)$ の第 k の谷の関数列の極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(2k\pi/n) = \text{Si}(2k\pi) \dots (18)$$

となる。

〈2・3〉 部分積 $s_n(x)$ の山と谷の極限值 定積分

$$N(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^p \frac{\sin t}{t} dt \dots (19)$$

の具体的な求め方を示す。 $\sin t$ のテーラー展開は

$$\sin t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} t^{2k-1}$$

であるから、

$$N(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^p \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1) \cdot (2k-1)!} p^{2k+1} \dots (20)$$

具体的な計算結果を収束に要したべき級数の項数を括弧の中に示して、列記すると、

$$\begin{aligned} N(\pi) &= 1.1789(k=8), & N(2\pi) &= 0.9028(k=13), \\ N(3\pi) &= 1.0661(k=17), & N(4\pi) &= 0.9499(k=21), \\ N(5\pi) &= 1.0402(k=25), & N(6\pi) &= 0.9664(k=31), \end{aligned}$$

となる。すなわち、もとの関数の値 $d(+0) = \pi/2$ に対して、

$$(2k-1)\pi/(n+1) \rightarrow +0, \quad 2k\pi/n \rightarrow +0 \quad \text{when } n \rightarrow \infty.$$

第 1 の山は 17.89%、第 2 の山は 6.61%、第 3 の山は 4.02% のオーバーシュートすることがわかる。同様に、第 1 の谷は 9.72%、第 2 の谷は 5.01%、第 3 の谷は 3.36% のアンダーシュートすることがわかる。

〈2・4〉 部分積 $s_n(x)$ の山と谷以外の点の極限 減少

数列 $x_n = \eta\pi/n \rightarrow +0$ のとき、 $y_n = s_n(x_n)$ と置く。

- (1) $0 < \eta < 1$ のとき、 $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \text{Si}(\eta\pi) < G'$
- (2) $2k-1 < \eta < 2k(k=1,2,\dots)$ のとき、 $\text{Si}(2k\pi) < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \text{Si}(\eta\pi) < \text{Si}((2k-1)\pi)$
- (3) $2k < \eta < 2k+1(k=1,2,\dots)$ のとき、 $\text{Si}(2k\pi) < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \text{Si}(\eta\pi) < \text{Si}((2k+1)\pi)$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = d(+0) = \pi/2$ となる場合、

$N(0.6132\pi) = 1.0000(k=8)$ となるから、 $0 < \eta < 1$ のときには $\eta = 0.6132$, $N(1.5578\pi) = 1.0000(k=10)$ となることから、 $1 < \eta < 2$ のときには $\eta = 1.5578$ の場合にそれぞれ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \pi/2$ となる。

〈2・5〉 曲線 $y=s_n(x)$ の原点での凝集の真の姿 $s_n(x)$

の曲線の原点(不連続部分の midpoint に相当)での接線の傾き

は、(4)式から、

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{ds_n(x)}{dx} = n \dots\dots\dots(21)$$

である。したがって、 $n \rightarrow \infty$ のとき、原点と第 1 極大点を結んだ直線は y 軸と一致する。

また、上述したように、 $s_n(x)$ の曲線の山と谷は合計で n 個あることから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ の曲線には、山と谷が無数存在していることになる。しかし、不連続点 $x=0$ 以外の点では、それらの点における関数の値 $f(x)=(\pi-x)/2$ に一致する。不連続点 $x=0$ では折りたたまれた無限個の山と谷、およびそれらを結ぶ直線上に (2.4) 節で述べた山と谷以外の点が Fig.5 (概念を示しており、山と谷を結ぶ線は実際には直線ではなくて Fig.2 に示すような曲線である。) に示すように y 軸上に凝集している。

すなわち、 $n \rightarrow \infty$ の操作により、Fig.5 に示すようにそれらの山と谷があたかもアコーディオン (accordion) のように折りたたまれて、 y 軸に凝集することになる。そのようになっているのが、 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ の曲線の不連続点 $x=0$ での真の姿である。すなわち、 $s_n(x)$ の曲線は、 $n \rightarrow \infty$ のとき、関数 $f(x)=(\pi-x)/2$ の曲線に、原点を中点 (不連続部分の中点、 $\{d(+0)+d(-0)\}/2$) とする垂直な線分を付け加えたものになる。この線分の長さの最大値は、もとの関数の跳びの幅 $d(+0)-d(-0)$ の半分 $\{d(+0)-d(-0)\}/2$ の G 倍である。

(2.6) 部分和の極限の絶対値最大なオーバーシュートとアンダーシュート 第 1 種不連続点をもつ区分的に滑らかな周期関数 $f(x)$ において、不連続点 $x=x_0$ での部分 $s_n(x)$ の絶対値最大なオーバーシュートとアンダーシュートは、 $d(x)$ について考察した結果を、 $\pm 0 \rightarrow x_0 \pm 0$ と一般化することにより、減少数列 $x_n = x_0 + \{\pi/(n+1)\}$ に対して、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} + \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2} \cdot G, \dots\dots\dots(22)$$

また、減少数列 $x_n = x_0 - \{\pi/(n+1)\}$ に対して、

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} - \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2} \cdot G \dots\dots\dots(23)$$

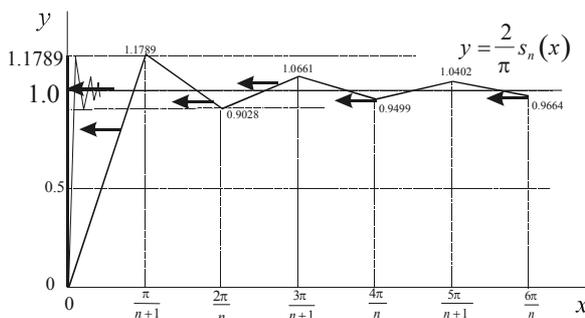


Fig. 5. Schematic figure for an accordion-like folding convergence of $s_n(x)$ at the discontinuity.

と表現できる。

3. 3 個の第 1 種不連続点をもつ関数のフーリエ級数の Gibbs の現象

区分的に滑らかな周期関数の例として、3 個の第 1 種不連続点 $x=0, x=b, x=c$ をもつ次の関数

$$g(x) = \begin{cases} u(x) & (0 < x < b) \\ v(x) & (b < x < c) \\ w(x) & (c < x < 2\pi) \end{cases}, \dots\dots\dots(24)$$

ただし、

$$g(0) = \frac{w(2\pi-0)+u(+0)}{2}, \quad g(b) = \frac{u(b-0)+v(b+0)}{2},$$

$$g(c) = \frac{v(c-0)+w(c+0)}{2}$$

である場合のフーリエ級数展開を考えてみる。周期が 2π であるとして、定義域を $(-\infty, \infty)$ に拡張して、部分積分を利用してフーリエ係数を求め、それらを整理して、次の部分 and を得る。

$$\begin{aligned} s_n(x) = & \frac{1}{2\pi} \int_{+0}^{b-0} u(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{b+0}^{c-0} v(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{c+0}^{2\pi-0} w(t) dt \\ & + \left\{ \frac{u(+0)-w(2\pi-0)}{2} \right\} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \\ & + \left\{ \frac{v(b+0)-u(b-0)}{2} \right\} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k(x-b)}{k} \\ & + \left\{ \frac{w(c+0)-v(c-0)}{2} \right\} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k(x-c)}{k} \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{+0}^{b-0} u'(t) \frac{\sin k(x-t)}{k} dt \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{b+0}^{c-0} v'(t) \frac{\sin k(x-t)}{k} dt \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{c+0}^{2\pi-0} w'(t) \frac{\sin k(x-t)}{k} dt \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

第 4 項は、不連続点 $x=0$ での Gibbs の現象を受け持つ。具体的には(22)式と(23)式の第 2 項を受け持ち、その他の項が(22)式と(23)式の第 1 項を受け持つ。同様に第 5 項は、不連続点 $x=b$ での Gibbs の現象を、第 6 項は、不連続点 $x=c$ での Gibbs の現象をそれぞれ受け持つ。

不連続点 $x=0, x=b, x=c$ での Gibbs の現象について、 $x=b$ の場合を詳細に述べて考察する。減少数列 $x_n = b + \{\pi/(n+1)\}$ に対して、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx_n}{k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin kb}{k} = \frac{1}{2}(\pi - b) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k(x_n - b)}{k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{k} = G \times \frac{\pi}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k(x_n - c)}{k} &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k(c - b)}{k} = -\frac{1}{2}(\pi - c + b) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{+0}^{b-0} u'(t) \frac{\sin k(x_n - t)}{k} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{+0}^{b-0} u'(t) \frac{\sin k(b - t)}{k} dt = \clubsuit \end{aligned}$$

ここで、 $0 < b - t < b$ から、

$$\frac{1}{2}(\pi - x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \quad (0 < x < 2\pi)$$

のフーリエ級数展開を利用して、

$$\begin{aligned} \clubsuit &= \int_{+0}^{b-0} u'(t) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k(b - t)}{k} dt = \int_{+0}^{b-0} u'(t) \frac{1}{2}(\pi - b + t) dt \\ &= u(b - 0) \frac{1}{2}\pi - u(+0) \frac{1}{2}(\pi - b) - \frac{1}{2} \int_{+0}^{b-0} u(t) dt \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{b+0}^{c-0} v'(t) \frac{\sin k(x_n - t)}{k} dt \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{b+0}^{c-0} v'(t) \frac{\sin k(t - b)}{k} dt = \spadesuit \end{aligned}$$

ここで、 $0 < t - b < c - b$ から、

$$\begin{aligned} \spadesuit &= -\int_{b+0}^{c-0} v'(t) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k(t - b)}{k} dt = -\int_{b+0}^{c-0} v'(t) \frac{1}{2}(\pi - t + b) dt \\ &= -v(c - 0) \frac{1}{2}(\pi - c + b) + v(b + 0) \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} \int_{b+0}^{c-0} v(t) dt \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{c+0}^{2\pi-0} w'(t) \frac{\sin k(x_n - t)}{k} dt \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{c+0}^{2\pi-0} w'(t) \frac{\sin k(t - b)}{k} dt = \blacklozenge \end{aligned}$$

ここで、 $c - b < t - b < 2\pi - b$ から、

$$\begin{aligned} \blacklozenge &= -\int_{c+0}^{2\pi-0} w'(t) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k(t - b)}{k} dt \\ &= -\int_{c+0}^{2\pi-0} w'(t) \frac{1}{2}(\pi - t + b) dt = -w(2\pi - 0) \frac{1}{2}(-\pi + b) \\ &\quad + w(c + 0) \frac{1}{2}(\pi - c + b) - \frac{1}{2} \int_{c+0}^{2\pi-0} w(t) dt \end{aligned}$$

となり、これらを用いて、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) = \frac{v(b+0) + u(b-0)}{2} + \frac{v(b+0) - u(b-0)}{2} \cdot G \dots (26)$$

$x \rightarrow b - 0$ の場合は、減少数列 $x_n = b - \{\pi/(n+1)\}$ に対して、 $x \rightarrow b + 0$ の場合とは次の項のみ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin k(x_n - b)}{k} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{k} = -G \cdot \frac{\pi}{2}$$

と異なるから、次式を得る。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) = \frac{v(b+0) + u(b-0)}{2} - \frac{v(b+0) - u(b-0)}{2} \cdot G \dots (27)$$

同様な方法で、減少数列 $x_n = \pi/(n+1)$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) = \frac{u(+0) + w(2\pi - 0)}{2} + \frac{u(+0) - w(2\pi - 0)}{2} \cdot G \dots (28)$$

また、減少数列 $x_n = -\{\pi/(n+1)\}$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) = \frac{u(+0) + w(2\pi - 0)}{2} - \frac{u(+0) - w(2\pi - 0)}{2} \cdot G \dots (29)$$

さらに、減少数列 $x_n = c + \{\pi/(n+1)\}$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) = \frac{w(c+0) + v(c-0)}{2} + \frac{w(c+0) - v(c-0)}{2} \cdot G \dots (30)$$

さらに続けて、減少数列 $x_n = c - \{\pi/(n+1)\}$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) = \frac{w(c+0) + v(c-0)}{2} - \frac{w(c+0) - v(c-0)}{2} \cdot G \dots (31)$$

このように不連続点 $x = 0, x = b, x = c$ において、(22)式と(23)式の Gibbs の現象が成り立つことを説明できた。

4. むすび

Gibbs の現象の本質を電気系の学生たちが理解できるようにその説明方法を開発するために、周期関数のフーリエ級数展開の部分和の曲線の山の関数列 $s_n(\pi/(n+1))$ を用いた極限が Gibbs の現象の最大オーバーシュートを表していることを応用して、部分和の山と谷が y 軸上に凝集して収束する様子を、アコーデオン式折りたたみモデルで説明する方法を数値的に計算した結果も示して具体的に提案した。さらに、第1種不連続点 $x = \beta$ をもつ区分的に滑らかな関数のフーリエ級数展開を、不連続点でのオーバーシュートを表す項、 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n(x - \beta)/n$ を陽的に含んだ形で表現する方法を開発し、電気系の学生たちが理解しやすいように具体例 ($\beta = 0, b, c$) について式を展開して、不連続点でのオーバーシュートについてわかり易く説明した。

最後に、論旨の明確化のご指導および数学的に貴重なご指導とご助言をいただきました本論文の査読者にこころより感謝申し上げます。

(平成 21 年 1 月 13 日受付, 平成 21 年 5 月 7 日再受付)

文 献

- (1) Zygmund, Trigonometrical series, Monografie Matematyczne Tom5, Warszawa-Lwów, pp.179-181 (1935)
http://matwbn.icm.edu.pl/kstresc.php?tom=5&wyd=10&jez=
- (2) 土倉 保: フーリエ解析, pp.77-80, 至文堂 (1964)
- (3) 福田礼次郎: フーリエ解析, pp.57-60, 岩波書店 (1997)
- (4) 萬代武史: 「ギブズ現象について」, 『数学セミナー』2007 年 6 月号, pp.37-43, 日本評論社 (2007)
- (5) 細野敏夫: 「Cesàro 総和法と Cherenkov 放射への応用」, 信学論 C-I, Vol.J82-C-I, No.3, pp.101-108 (1999)
- (6) G. C. ウォルター (榭原 進・萬代武史・芦野隆一訳): ウェーブレットと直交関数系, pp.71-71, pp.161-163, 東京電機大学出版局 (2001)
- (7) S. Kelly: “Pointwise convergence for wavelet expansions”, Ph.D. dissertation, Washington University, St. Louis (1992)
S. Kelly: “Gibbs phenomenon for wavelet”, *Appl. Comput. Harmonic Analysis*, No.3, pp.72-81 (1996)
- (8) http://mathworld.wolfram.com/Wilbraham-GibbsConstant.html

付 録

文献(2)の部分 and $S_n(x)$ の極限の求め方の概要

文献(2)は、その後の Gibbs 現象に関する書物の元となっている書物であるので、そこで記述された部分 and $s_n(x)$ の極限の求め方を、少しアレンジしてその概要を述べる。

$$\begin{aligned}
 s_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt = \int_0^x \left\{ D_n(t) - \frac{1}{2} \right\} dt \\
 &= \int_0^x \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{t} dt \\
 &\quad + \int_0^x \left(\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} \right) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt - \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (付 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_n(x) &= \frac{1}{2} + \cos x = \cos 2x + \dots + \cos nx \\
 &= \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{1}{2} x} \dots\dots\dots (付 2)
 \end{aligned}$$

ここで、(付 1)式の最後の辺の第 2 の積分で被積分関数の絶対値は、 $t \rightarrow 0$ のとき

$$\left| \frac{t - 2 \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| = O\left(\frac{t^3}{t^2}\right) = O(t) \dots\dots\dots (付 3)$$

である (平均値の定理, または $\sin(t/2)$ の Taylor 展開から) から、積分は $x \rightarrow 0$ のとき 0 に収束する。また、 x として 0 に収束する正数列 h_n をとらせることにし、さらに $nh_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$ とすれば

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{t} dt &= \int_0^{(n+(1/2)h_n)} \frac{\sin t}{t} dt \\
 &\rightarrow \int_0^a \frac{\sin t}{t} dt \quad (n \rightarrow \infty) \dots\dots\dots (付 4)
 \end{aligned}$$

となる。よって、以上から $n \rightarrow \infty$ のとき、 $nh_n \rightarrow a$ ならば

$$s_n(h_n) \rightarrow \int_0^a \frac{\sin t}{t} dt \dots\dots\dots (付 5)$$

であることがわかる。 $I(a) = \int_0^a \frac{\sin t}{t} dt$ の値が最大になるのは、 $a = \pi$ のときであるから、上にもどって、 $h_n \rightarrow \pi/n$ とおけば

$$\begin{aligned}
 s_n\left(\frac{\pi}{n}\right) &\rightarrow \text{Si}(\pi) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \\
 &= 1.85194 \dots \left(> \frac{\pi}{2} \right) \quad (n \rightarrow \infty) \dots\dots\dots (付 6)
 \end{aligned}$$

が得られる。

小林 正典

(正員) 1947 年 6 月 17 日生。1970 年 3 月茨城大学工学部電気工学科卒業, 1972 年 3 月同大学大学院工学研究科修士課程電気工学専攻修了, 1972 年 4 月茨城大学助手, 1981 年 4 月講師, 1982 年 8 月助教授, 1990 年 7 月教授, 現在に至る。電気磁気学, 数学演習などの講義, 主として電磁界理論, ELF 磁界有効利用の基礎研究に従事。1981 年工学博士 (東京工業大学)。



祖田 直也

(正員) 1999 年 3 月大分大学大学院工学研究科博士後期課程物質生産工学専攻修了。2000 年 1 月茨城大学工学部助手, 2005 年 7 月同講師, 2009 年 4 月准教授, 現在に至る。主として非線形磁気特性を考慮した磁界解析反磁界係数に関する研究に従事。日本磁気学会, 日本 AEM 学会, IEEE 会員。

