以上が本文である。このあとに二つの付録が付いている。

3.9 Appendix A, Topology この付録では、位相空間と距離空間について論じている。知識を整理するのに役立つ。

3.10 Appendix B, Homotopy theory この付録では、ホモトピー論の基礎事項から始めて、主に球面と Lie 群のホモトピー群について論じている。微分位相幾何学の重要な定理はホモトピー論の結果を‘正則値定理’で引き戻して証明されることも多く (たとえば, コボルディズム理論), この付録は有用である。また, 空間のホモトピー型を素数 p に局所化するテクニックも解説されている。

注 釈

- 1) 多面体の組み合わせ構造と位相構造の差を問うのが, 本来の基本予想であるが, 1961年にMilnorにより一般の多面体 (PL多様体でないような多面体) について反例が発見されたので, それ以降, PL多様体の組み合わせ構造と位相構造の差を問う問題に変更された。
- 2) ただし, 1970年に出版された手術理論の本 [14]にはこれらの数学者の名前がでていないので, 別にWallが無視しているわけではない。
- 3) $T_p V$ は点 p における V の接ベクトル空間を表す。 $T_q M$ についても同様。
- 4) 1970年出版のWallの本 [14]には, 同じ定理がKervaireの名とともに紹介されているので, ここは一種の‘うっかりミス’であろう。

文 献

- [1] 服部晶夫, 多様体のトポロジー, 岩波書店, 2003.
- [2] 服部晶夫・佐藤肇・森田茂之 (小島定吉・三松佳彦 編), 多様体のトポロジー, 幾何学百科I, 朝倉書店, 2016.
- [3] M. W. Hirsch, Differential Topology, Grad. Texts in Math., **33**, Springer, 1976.
- [4] M. W. ハーシュ (松本堯生 訳), 微分トポロジー, シュプリンガー数学クラシックス, **25**, 丸善出版, 2012 ([3]の翻訳).
- [5] M. A. Kervaire and J. W. Milnor, Groups of homotopy spheres: I, Ann. of Math. (2), **77** (1963), 504–537.
- [6] R. C. Kirby and L. C. Siebenmann, On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung, Bull. Amer. Math. Soc., **75** (1969), 742–749.
- [7] J. Milnor, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, Ann. of Math. (2), **64** (1956), 399–405.
- [8] J. W. Milnor, Topology from the Differentiable Viewpoint, Univ. Press of Virginia, Charlottesville, VA, 1965.
- [9] J. W. ミルナー (蟹江幸博 訳), 微分トポロジー講義, シュプリンガー数学クラシックス, **6**, 丸善出版, 2012 ([8]の翻訳).
- [10] S. Smale, Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four, Ann. of Math. (2), **74** (1961), 391–406.
- [11] 田村一郎, 微分位相幾何学, 岩波書店, 1992.
- [12] R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv., **28** (1954), 17–86.
- [13] C. T. C. Wall, Determination of the cobordism ring, Ann. of Math. (2), **72** (1960), 292–311.
- [14] C. T. C. Wall, Surgery on Compact Manifolds, London Math. Soc. Monogr., **1**, Academic Press, 1970.

(2017年9月17日提出)

(まつもと ゆきお・学習院大学理学部)

森脇淳・川口周・生駒英晃：モデル-ファルティングスの定理 —ディオファントス幾何からの完全証明,

ライブラリ数理科学のための数学とその展開, AL1, サイエンス社, 2017年, vi + 186 ページ.

安 福 悠

本書は, 森脇淳氏の京都大学に於ける学部・修士向け講義のノートを基にしたもので, デイオファントス幾何の基礎が紹介された後, モデル予想が完全証明されている。初学者用に, 整数論やアーベル多様体の基本的性質なども取り上げられており, Hartshorne [6]などで代数幾何をある程度学んでいれば, 読めるように配慮されている。また, 目標をモデル-ヴェイユの定理とモデル予想の証明に絞っているお蔭で, コンパクトにまとまっている。ディオファントス幾何の入門書はこれまで日本語では存在せず (拙著 [12] の一つの章のタイトルは‘ディオファントス幾何’だが, 数学者以外

を読者対象としたものである), 一方で Bombieri–Gubler [2] や Hindry–Silverman [7] は名著だが長いので, 本書がきっかけでディオファントス幾何を学んでみようと思う学生が増えることが期待できる. 重要な貢献のある数学者たちの顔写真が挿し込まれ, 親しみやすい工夫もされている.

内容と歴史的背景: モーデル予想とは, 1922年に Mordell [8] が立てた有名な予想で, 1983年の Faltings の論文 [4] で証明された. この業績を称えられ, 1986年に Faltings はフィールズ賞を受賞している. Faltings が証明した大定理はいくつもあることもあり, いまだに ‘モーデル予想’ と呼ばれることも多い結果だが, 本来 ‘Faltings の定理’ と呼ばれるべきであり, 本書では ‘モーデル–ファルティングスの定理’ という表現で統一されている.

この定理は ‘代数体 k 上定義される種数が 2 以上の代数曲線には, k 有理点が有限個しかない’ と主張する. 種数とは, 複素数体上で代数曲線の定義式を考えたときの零点集合 (位相空間としては 2 次元なので曲面) の穴の数のことで, 位相的な不変量である. 代数体とは有理数体の有限次拡大のことで, 整数論の研究対象である. k 有理点とは, 定義式を満たすような点で, 座標がすべて k 内にとれるようなものである. このような定義を踏まえれば, この定理の主張が, ‘方程式の代数体上の解が有限かどうか, という整数論の問題が, 種数という幾何によって制御されている’ と解釈できる. このため, 方程式の整数解や有理数解を調べる問題であるディオファントス問題を, 幾何学的に捉えて解決しようとするディオファントス幾何の哲学をよく表している結果だと分かる.

元々の Faltings の証明では, 代数的スタックや p -可除群などの概念が駆使されていた. これに対して, Dyson [3] のディオファントス近似の考え方に基づいて Vojta [10] が別証明を考えた. ただ, こちらもアラケロフ理論, 特に算術的リーマン–ロッホの定理に頼っており, 初等的とはとても言えなかった. この Vojta の発想を用いることで, Faltings は, アーベル多様体内の有理点や整数点に関する大定理を証明した ([5]). 一方で, モーデル予想に関しては, Vojta の考え方に基づいた, より簡潔な証明が Bombieri [1] により示された. 主な道具は, 通常リーマン–ロッホの定理と, Roth の補題 (しかも必要なのは 2 変数の場合のみ) と Siegel の補題となり, 本質的にディオファントス近似の定理として, モーデル予想を見ることができるようになった.

本書で紹介されているのは, この Bombieri 版の証明である. 著者三氏はともにアラケロフ理論の専門家だが, 森脇氏の 400 ページを超えるアラケロフ理論の解説書 [11] でも算術的リーマン–ロッホの定理は証明されていない. そのようなこともあり, 本書では Bombieri 版の紹介をされているのだろう. ただ, アラケロフ理論的な考え方は随所に現れている.

本書で扱われているもう一つの定理が, モーデル–ヴェイユの定理である. これは, アーベル多様体の基本的な性質から導けるものとして述べられているが, これも重要な定理で, ‘代数体 k 上のアーベル多様体 A では, k 有理点が有限生成 (アーベル) 群になる’ という主張である. 曲線がアーベル多様体になるのは, 種数が 1 のときである. よって, 本書で扱われているモーデル予想 (種数が 2 以上) とモーデル–ヴェイユの定理 (種数が 1) から, 曲線の有理点の多さが種数という位相不変量でコントロールされることが分かる (種数が 0 のときは, 一つ有理点を持つような代数体の上では無限個有理点があることがすぐに示せる).

本書の詳しい内容: まず第一章 ‘代数体と整数環’ で, 代数体についての基礎知識がまとめられている. トレース, ノルムの定義から始まって, 代数体の整数環, 整数基 (本書では ‘整数底’), 判別式がきちんと導入されている. この章の最大の目標は Minkowski による判別式の下界で, この道具となる

Minkowski の凸体定理も証明されている。整数環の素イデアル分解や different の諸性質などは引用のみの紹介だが、他の本を参照しないでも概念は理解できるよう説明が配慮されており、証明も含めて学びたい人のために文献も明記されている。

次の第二章‘有理点の高さの理論’は盛りだくさんで、ディオファントス幾何の基本的な道具である高さ関数が導入された後、アーベル多様体が紹介され、モーデル-ヴェイユの定理が証明されている。まず、代数体の絶対値について定義されている。有理数体上の通常の絶対値、そして p 進絶対値が定義された後、これらの一般の代数体への拡張も定義されている。続いて、積公式が証明され、 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義される射影代数多様体 X とその上の直線束 L に対する高さ h_L の定義・諸性質が示されている。そして、代数体上における非常に重要な有限性の定理である Northcott の定理が証明されている。

第二章後半はアーベル多様体についてである。200 ページ未満の本であるにもかかわらず、アーベル多様体の基本的性質を他文献、例えば Mumford [9] などに頼らず、Hartshorne [6] はとほろどほろ引用しつつも、証明付きで紹介しているところが、この本の素晴らしいところの一つである。モーデル-ヴェイユの定理やモデル予想の証明に必要なような、アーベル多様体の事実について簡潔に、しかし分かりやすくまとめられている。

具体的には、剛性補題の証明から始まり、群構造が自動的に可換になること、シーソーの定理、立方定理、 $\overline{\mathbb{Q}}$ -有理点の可除性などが証明されている。次に、任意の直線束に対してネロン-テイトの高さペアリングが定義され、その性質を立方定理から導いている。そして、対称的（本書では‘偶’）で豊富な直線束に対しては、 $A(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$ 上の内積となることを示している。続いて、ピカール多様体・ヤコビ多様体、アーベル-ヤコビ写像、テータ因子が構築されて、基本的な性質が調べられている。

本章最後がモーデル-ヴェイユの定理の証明である。まず、有界な判別式を持つ代数体が有限個しかないことがミンコフスキーの判別式定理から導かれる。そして、エタール写像による逆像の定義体に関するシュヴァレー-ヴェイユの定理が証明されている。この 2 定理から、 $A(k)/nA(k)$ の有限性（弱モーデル-ヴェイユの定理）を導き、フェルマー降下法と呼ばれる手法で、モーデル-ヴェイユの定理が導かれる。

第三章‘モーデル-ファルティングスの定理に向けての準備’では、次章でのモデル予想の証明を読みやすくするため、必要となる定理や補題がまとめられている。まずは、整数係数線形連立方程式の整数解の大きさに関する Siegel の補題である。この補題はディオファントス近似では頻繁に使われる。次に、Roth の補題が証明されている。これは、変数の数を減らす帰納法を可能にする補題で、Roth の定理や Schmidt の部分空間定理にも活用された。変数毎の次数が極端に異なる多項式を用意すると、零の位数を上からおさえられる点が存在する、という主張である。このための準備として、ロンスキアンと、多項式のノルムや零の位数についての一般論も述べられている。続いて、直線束のノルムとその高さについて理論構築されている。この他にも、この章では、ガウスの補題、マラー測度、テラー展開の係数の絶対値を（強）三角不等式を使って調べる Eisenstein の定理などが証明されており、ディオファントス近似のテクニックの基本が網羅されている。

第四章‘モーデル-ファルティングスの定理の証明’で、ついにモデル予想が証明される。まず、Vojta の不等式が紹介される。これは、代数体 k 上の種数 $g \geq 2$ の曲線 C に関し、 C をヤコビ多様体に埋め込んだとき、 $P, Q \in C(k)$ の内積が満たす不等式である。より具体的には、‘ある非零定数 θ と R が存在し、(内積で定まる) 角度 θ の円錐内には、 R 以上のノルムを持つ有理点が有限個しか

い' という主張である. これからモデル予想を導くには, 半径 R の球を用意し, その内側にある点と, 外側にある点に分ければよい. つまり, Northcott の定理より, 内部におさまるものは有限 (テータ因子の豊富性が肝心) で, 外部にあるものは, 角度 θ の円錐を有限個用意して全体を覆えば, Vojta の不等式より有限性が言える.

そこで, 本章の残りは Vojta の不等式の証明となるが, まず, Liouville の定理という古典的定理の証明を通して,

- (1) 変な直線束とその切断を作る
- (2) その切断の零の位数はある程度高い
- (3) その切断の零の位数はそれほど高くない

と示して (2) と (3) を矛盾させる, というディオファントス近似の定理の証明の雛型が紹介されている. 続いて, 証明の鍵となる, Vojta 因子 $V(d_1, d_2, d)$ と呼ばれる $C \times C$ 上の因子が紹介されている. ここで, d_1, d_2, d は自然数で $gd^2 < d_1 d_2 < g^2 d^2$ を満たすものであり ($g \geq 2$ がここで使われる), 最初の不等号により $V(d_1, d_2, d)$ に対応する直線束が非零な大域切断を持つことが保証され, 2 番目の不等号により対応するヤコビ多様体上のネロン-テイトの高さペアリングの不定値性が保証される. 雛型 (1) は定理 4.4 で, Siegel の補題により, 高さがあまり大きくない切断の存在が示せる. 雛型 (2) は定理 4.6 で, 計算はやや面倒だが, Eisenstein の定理を用いて示せる. 雛型 (3) が, デイオファントス近似の他の定理と同様, 一番難解な部分である. ただ, 本書では, Roth の補題と直線束のノルムを三章で準備しているので, ここに対応する定理 4.5 の証明は短く, 議論の流れが理解しやすくなっている. 定理 4.4~4.6 を用いると Vojta の不等式が導けることは, これらの定理の証明の前に行われているので, 読み進めやすい. 本章最後に, モデル予想 ('主菜') の応用 ('デザート') として, 代数体 k を一つ固定すると, ほとんどの n に対してフェルマーの最終定理が成り立つ ($x^n + y^n = z^n$ を満たす k 有理点は斉次座標の高さが 0 の点のみである) が示されている.

他書との比較: モデル予想の Bombieri 版証明を含んでいるディオファントス幾何のテキストとしては, Bombieri-Gubler [2] と Hindry-Silverman [7] がある. [7] では Roth の定理の証明が, [2] ではさらに Schmidt の部分空間定理や単数方程式などが含まれていることもあり, どちらも分厚い. その点, 本書は, モデル-ヴェイユの定理とモデル予想の証明に焦点を絞っており, 代数幾何や整数論からの準備も必要最低限に整理されているので, 読みやすいと思う.

[2] や [7] のモデル-ヴェイユの定理の証明では, クンマー理論やガロアコホモロジーの言葉が使われているが, 本書では同じ議論をこれらを導入せずに書かれてある. また, [7] では, シュヴァレー-ヴェイユの定理のかわりに, $\text{mod } p$ でよい還元を与える素数 p と互いに素なねじれ群の分析を行っている. これは, ランクの有限性を示すだけでなく, ランクの計算を実効的 (effective) にする, つまり具体的な数式によるランクの上界を求めるためである.

実際, 本書では計算実効性についてはあまり強調されていない. モデル-ヴェイユの定理より, アーベル多様体の有理点の有限生成性が分かっているが, ではアーベル多様体を与えられたら, 生成元の個数の上界が求まるのか, もっと欲張れば, 生成元を見つけられるのか, といった問題がある. また, モデル予想より, 種数 2 以上の曲線の有理点の有限性が分かっているが, ではその個数の上界が分かるのか, もっと欲張れば, 点を全て求められるのか, といった問題がある. モデル-ヴェイユの定理の生成元についても, モデル予想の有理点についても, 最初の質問, つまり個数の上界を求める

ことができる。しかし、欲張りな方の質問、つまり生成元や有理点が存在する範囲については、現在知られている証明方法では答えられない。例えば、モデル予想に関しては、小さい角度の円錐ごとの有理点の個数は、Vojta の不等式と Mumford 版 gap principle から分かるが、有理点の位置までは分からない。このようなことを考えながら読み進めると、ディオファントス幾何のデリケートさを感じられると思う。

終わりに：Bombieri 版の証明が発表されてまだ間もない時期に、この内容の講義を聴くことができた聴衆が羨ましい限りであるが、その内容が本書によって広く紹介されたことは誠によろこばしい。この本を通して、ディオファントス幾何を気軽に勉強できることになるので、日本でもこの分野がより発展していくことを評者も願っている。

文 献

- [1] E. Bombieri, The Mordell conjecture revisited, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **17** (1990), 615–640.
 [2] E. Bombieri and W. Gubler, *Heights in Diophantine Geometry*, New Math. Monogr., **4**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
 [3] F. J. Dyson, The approximation to algebraic numbers by rationals, *Acta Math.*, **79** (1947), 225–240.
 [4] G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, *Invent. Math.*, **73** (1983), 349–366.
 [5] G. Faltings, Diophantine approximation on abelian varieties, *Ann. of Math. (2)*, **133** (1991), 549–576.
 [6] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Grad.

- Texts in Math.*, **52**, Springer, 1977.
 [7] M. Hindry and J. H. Silverman, *Diophantine Geometry—An Introduction*, *Grad. Texts in Math.*, **201**, Springer, 2000.
 [8] L. J. Mordell, On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degrees, *Cambr. Phil. Soc. Proc.*, **21** (1922), 179–192.
 [9] D. Mumford, *Abelian Varieties*, *Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math.*, **5**, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Bombay; Hindustan Book Agency, New Delhi, 2008.
 [10] P. Vojta, Siegel’s theorem in the compact case, *Ann. of Math. (2)*, **133** (1991), 509–548.
 [11] 森脇淳, アラケロフ幾何, 岩波数学叢書, 岩波書店, 2008.
 [12] 安福悠, 発見・予想を積み重ねる——それが整数論, オーム社, 2016.

(2017年9月25日提出)
 (やすふく ゆう・日本大学理工学部)

編 集 後 記

二年間の‘数学’編集委員長の任期があつといふ間に過ぎ去り、今号を以ちまして退任となります。その間編集部の皆様、常任・非常任の編集委員の皆様には大変お世話になり有難う御座りました。そして何より高水準の記事を提供して下さいました執筆者や緻密な査読をして下さったレフェリーの方々へ改めて感謝申し上げます。お蔭様で大過なく任務を果たせた…かどうかは本当は未だ不明で、この二年間に依頼した原稿の多くはこれから順次出版されていきますので、今後は一読者として(今年の十二月までは一編集委員として)見守らせて頂く事になります▼今年の五月の連休は無駄に長く、お蔭で書類書きで潰れる筈の当初の予定が変わって、久しぶりに家族で温泉に出かけました。‘天狗の湯’で有名なその温泉宿の建物は安政五年築ださうで、古い物好きの私は大喜びしました(が他の三人には不評でした)。部屋自体の造作

は見慣れた現代の和室とさほど変わらないのですが、建物のあちこちに様々な意匠が施されてみて目を楽しませてくれます。階段の一つは螺旋型で、今時のものより段が密に配されてみて、平面の一点 blow-up の模型として秀逸でした。東日本大震災では浴室の壁に掲げられてゐる巨大な天狗の面が落ちたさうですが、建物自体は健在で、安政大地震の教訓を生かしてゐるのか、その耐震性能は称賛に値します。しかし現代の建築基準法や消防法とは両立しさうもなく、一度失はれたら再現は難しいでせうから、大事にしたいものです。この建物は明治・昭和期に増築された部分もあり、それぞれに味があるのですが、それらの間の貼合せの仕方は今一つな感じでした。建物も多様体も貼合せは大事です。編集委員会の引継ぎも貼合せを滑かにやりたいと思ひます▼五月には代替りの話題が他にもありましたが、七月からは‘数学’編集委員会も新体制になり、私自身も心機一転新たな仕事