

複数の凸多面体を折る 展開図の研究

上原 隆平

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科教授

第11回 組合せ最適化セミナー 二日目

2014年7月31日 1時間目(9:30-10:30)

(辺)展開図とは？

- (一般)展開図：多面体の表面を切って平面上に広げた多角形
 - 連結であること
 - 重なりを持たない単純多角形であること(便宜上、直線の集まりとする)
- (辺)展開図：多面体の辺に沿って切り広げた多角形
 - 展開の境界部分は多面体の辺からなる

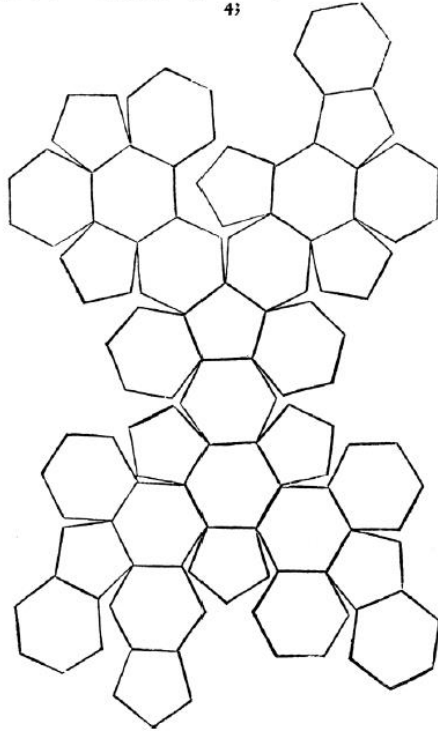
★今日は「展開図」といえば一般の展開図という意味なので注意

展開図の簡単な歴史

- アルブレフト・デューラーの『画家マニュアル』(1525)

S In anders das mach auß zweynig sechseter flachen feldern/gleichfellig vnd windlich/
so man darzu ehut zwelff fünffeter flacher felder/ so die gleichertig gegen den sechseten
feldern sind/ vnd in inen selbe auch gleich windlich vnd ordentlich an einander gefügt wer
den/ wie ich das offen im plano hernach hab außgerissen/ So man dann das alles zusamen
schließ/ so würt ein corpus daraus/ das gewinnet zwey vnd sechzig eck/ vnd neunzig schärfen
seiten/ die Corpus fñret in einer helen kugel mit allen seiten offen an.

43



- 数多くの立体を辺展開図で記述していた
- どうも以下の成立を予想していた...?

未解決予想:

任意の凸多面体は辺展開図を持つ

展開図の簡単な歴史

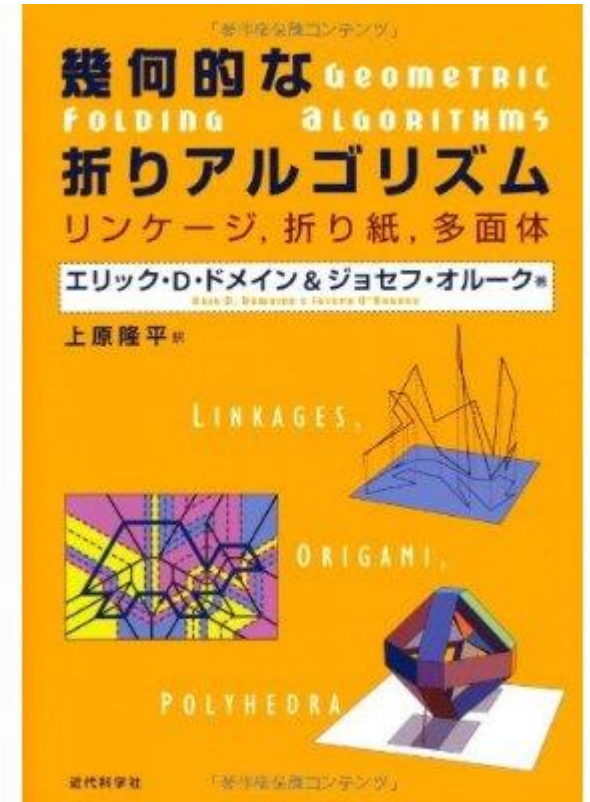
未解決予想:

任意の凸多面体は辺展開図を持つ

(今日はやらない) 未解決予想の周辺の結果:

- 反例らしいものすら見つからない(当然?)
- 凹多面体なら反例がある
(どんな辺展開も重なってしまう)
- 辺展開でなく一般展開なら可能
(一般の点から各頂点に最短路を描いて切るという方法)
- ランダムな凸多面体をランダムに展開すると
実験的にはほぼ確率1で重なってしまう

ポイント: 展開図に関してわかっていることは、ほとんどない



もし興味があれば...

展開図の簡単な歴史

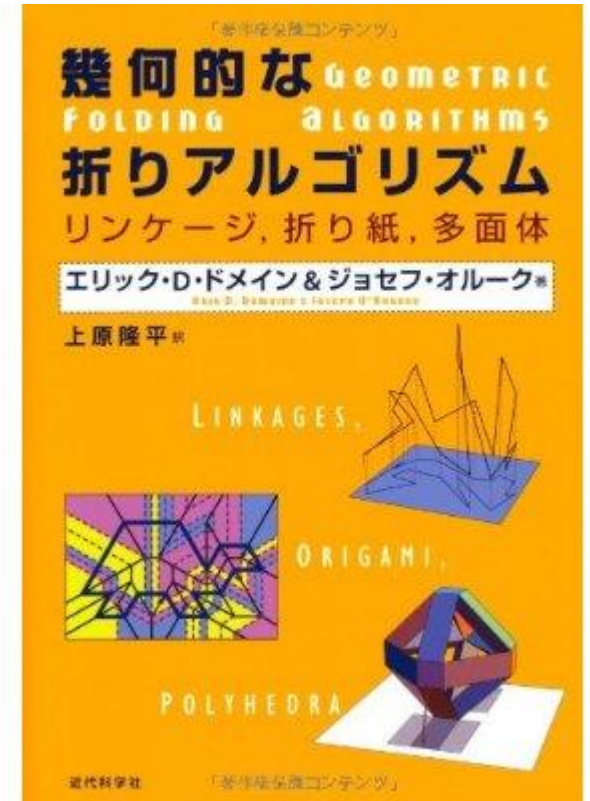
未解決予想:

任意の凸多面体は辺展開図を持つ

ポイント: 展開図に関してわかっていることは、
ほとんどない

本研究の興味の対象:

- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる(凸)多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- (凸)多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム



もし興味があれば...

展開図の簡単な歴史

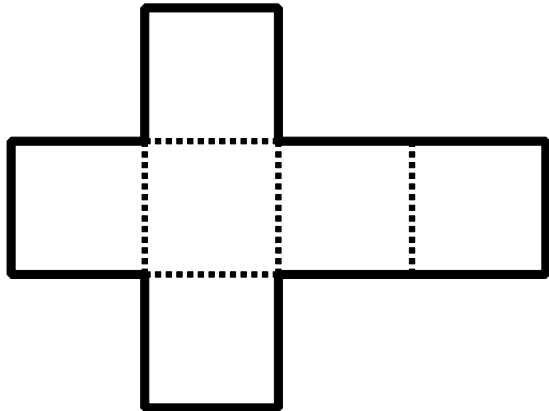
ポイント: 展開図に関してわかっていることは、ほとんどない

本研究の興味の対象:

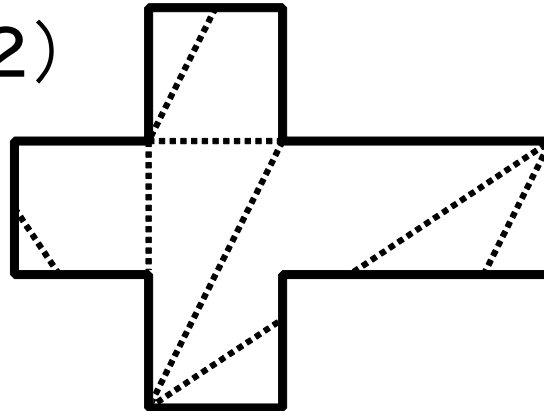
- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる(凸)多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- (凸)多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム

演習問題: 何が折れるでしょう？

(1)



(2)



ちなみにこの「ラテンクロス」からは85通りで23種類の異なる多面体が折れることが知られている。

今日の予定

1. 展開図の基礎的な知識

1. 正多面体の共通の展開図

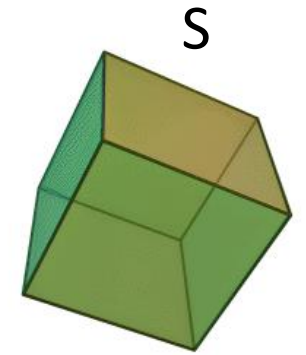
1時間目～2時間目

2. ペタル型の紙で折るピラミッド型: 2時間目～3時間目

3. (複数の箱が折れる共通の展開図: 3時間目?)

1. 展開図の基礎知識(1)

凸多面体 S の頂点と辺から構成されるグラフを G とする

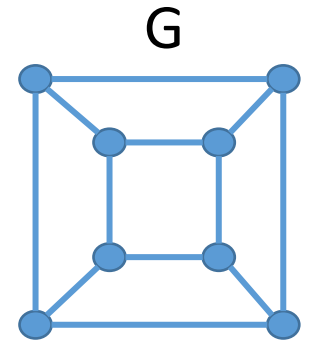


[全域木定理(その1)]

S の辺展開におけるカットラインは、 G 上の全域木である

[証明]

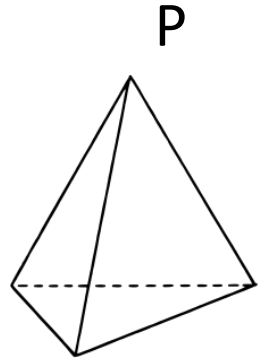
- すべての点を訪れること:
カットされない頂点があると、平坦に開けない
- 閉路をもたないこと:
閉路があると、展開図がばらばらになってしまうため、連結にならない



[全域木定理(その2)]

S の一般展開におけるカットラインは、 S 上ですべての頂点を張る木である

1. 展開図の基礎知識(2)

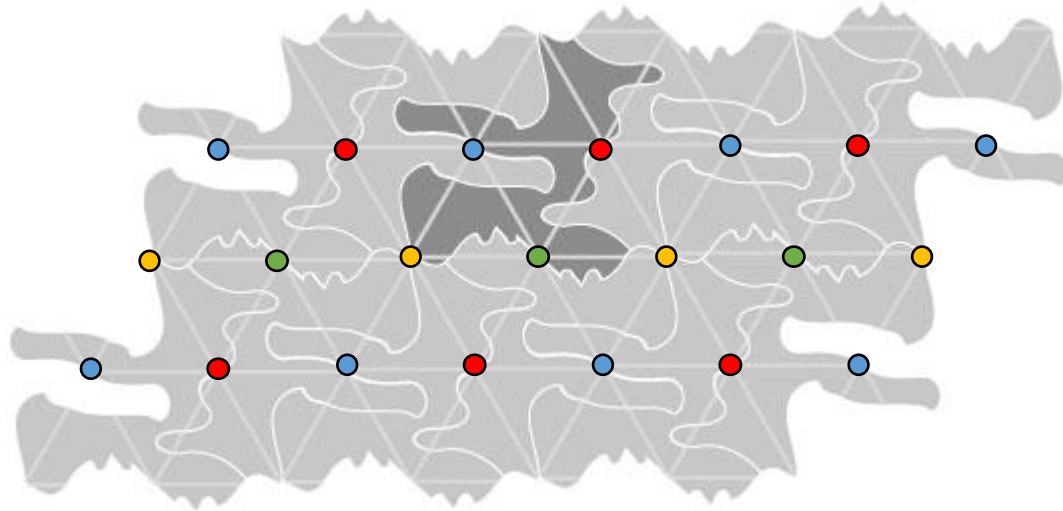


正4面体の(一般)展開図に関する特徴づけ

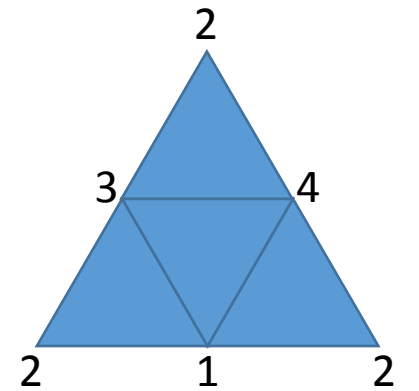
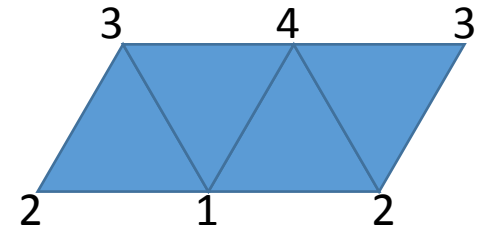
[正4面体の展開図定理(秋山 2007)]

正4面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。

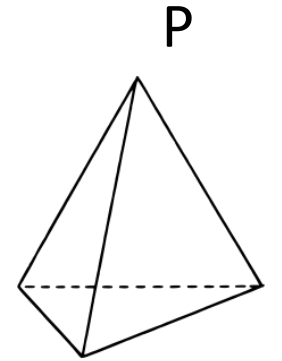
- (1) Pは **p2 タイリング**。つまり 180° 回転で敷詰め可能
- (2) **回転中心**の **4** 頂点が正三角格子をなす
- (3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない



参考: 正4面体の辺展開図は二種



1. 展開図の基礎知識(2)



正四面体の(一般)展開図に関する特徴づけ

[正四面体の展開図定理(秋山 2007)]

正四面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。

- (1) Pは **p2 タイリング**。つまり 180° 回転で敷詰め可能
- (2) **回転中心**の **4** 頂点が正三角格子をなす
- (3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない

Tile-Makers and Semi-Tile Makers,
Jin Akiyama, *The Mathematical Association of America, Monthly* 114,
pp. 602-609, 2007.

[直感的な説明]

平面上で正四面体を4回、
上手に転がすと、元に戻る。
各面にインクをつけて転がすと
平面全体にスタンプを押せる。

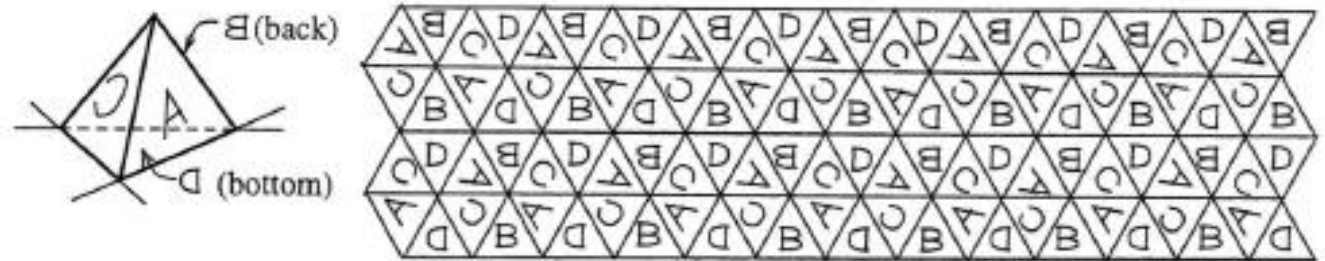
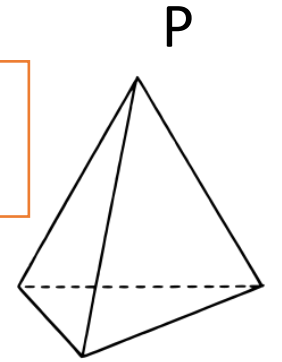


Figure 2.1. Carved regular tetrahedron R and the tiling by stamping with R.

1. 展開図の基礎知識(3)

4単面体(Tetramonohedron):
4つの面が合同な4面体



4単面体の(一般)展開図に関する特徴づけ

[4単面体の展開図定理(秋山、奈良 2007)]

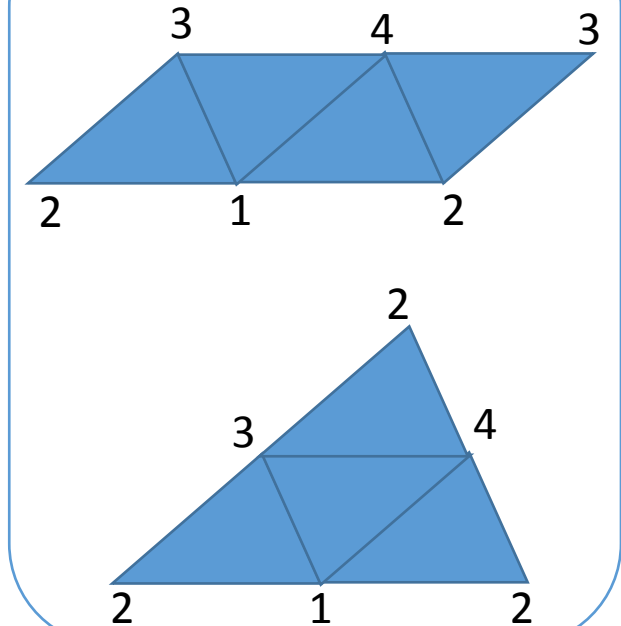
4単面体の展開図Pは以下の条件を満たすタイリングであり、逆も成立する。

- (1) Pは **p2 タイリング**。つまり 180° 回転で敷詰め可能
- (2) **回転中心の4頂点**が**その単面による三角格子**をなす
- (3) この4頂点は、タイリング上で「同値」な位置にない

[直感的な説明]

正三角形を全体にゆがませればよい。

参考: 4単面体の辺展開図は二種



1. 展開図の基礎知識：演習問題

正多面体の一般展開図の最短カットの長さはいくら？

- 正4面体にはわりと美しい最適解があります
 - 最適解とその証明ができればなおよし
- 正8面体と正6面体
 - 最適解を見つけるのは、なんとかなると思う
 - 最適性を示すのは、手間がかかります
- 正20面体と正12面体
 - 最適解を見つけるのはちょっと大変かも

今日の予定

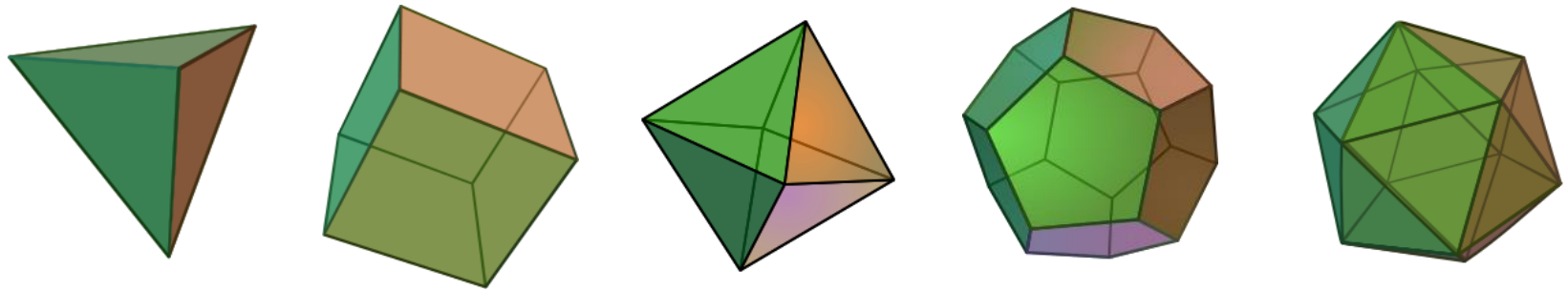
1. 展開図の基礎的な知識

1. 正多面体の共通の展開図

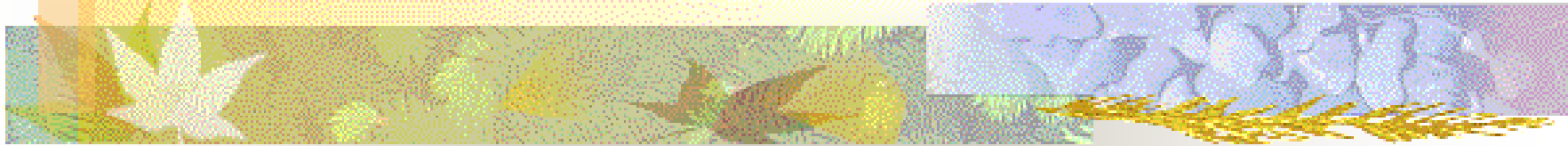
1時間目～2時間目

2. ペタル型の紙で折るピラミッド型: 2時間目～3時間目

3. (複数の箱が折れる共通の展開図: 3時間目?)



複数の正多面体を折れる展開図について



上原隆平(JAIST), 堀山貴史(埼玉大学), 白川俊博(アマチュア数学者?)

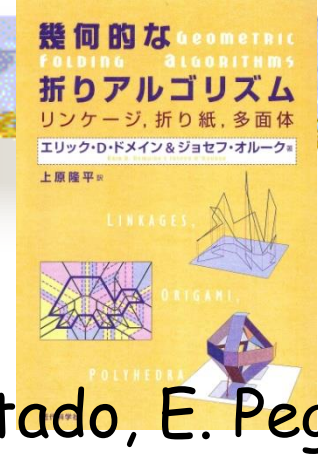
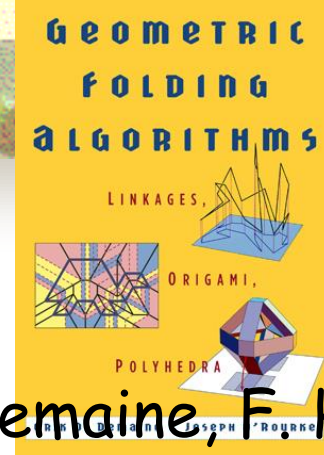
文献

Toshihiro Shirakawa, Takashi Horiyama, and Ryuhei Uehara.
Construct of Common Development of Regular Tetrahedron and Cube
27th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2011)
pp. 47–50, 2011/3/28–30

はじめに

■ 未解決問題25.6

(by M. Demaine, F. Hurtado, E. Pegg)

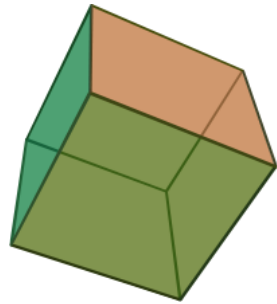


- Can any **Platonic solid** be cut open and unfolded to a polygon that may be refolded to a **different Platonic solid**?

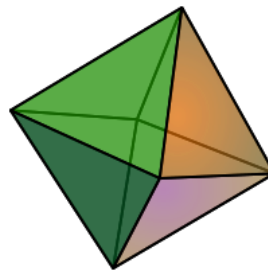
For ex., may a cube be so dissected to a tetrahedron?



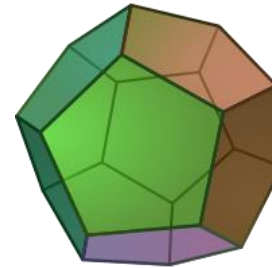
正4面体



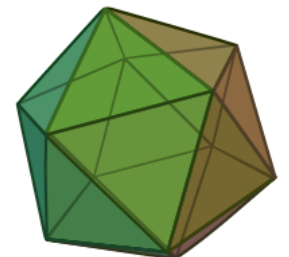
立方体



正8面体

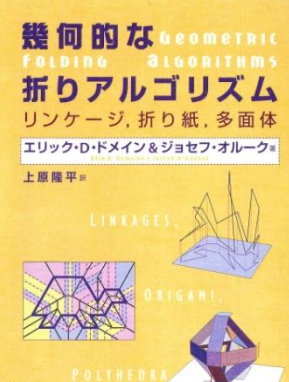
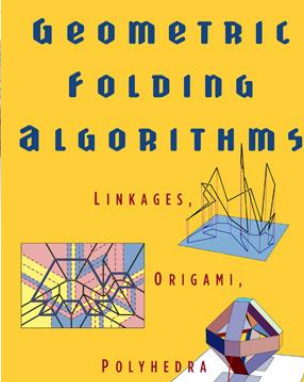


正12面体



正20面体

はじめに



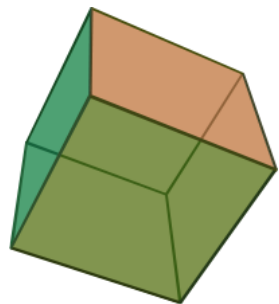
■ 未解決問題25.6

複数の正多面体を折ることができる
共通の展開図は存在するのか？

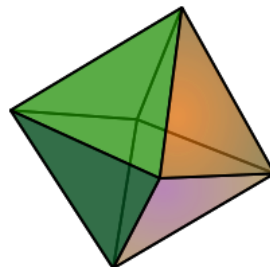
For ex., may a cube be so dissected to a tetrahedron?



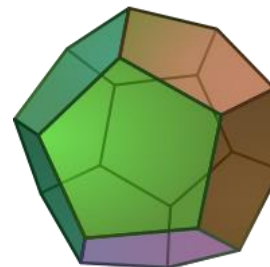
正4面体



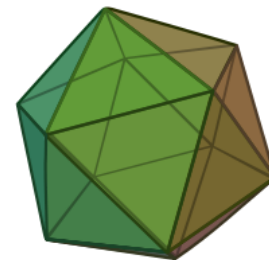
立方体



正8面体



正12面体



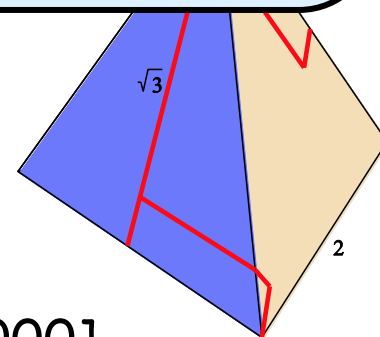
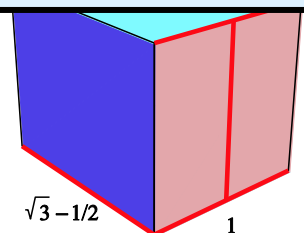
正20面体

はじめに

複数の正多面体を折ることができる
共通の展開図は存在するのか？

惜しい！ [O'Rourke]

正8面体 \Leftrightarrow 4単面体
(=すべての面が合同な4面体)



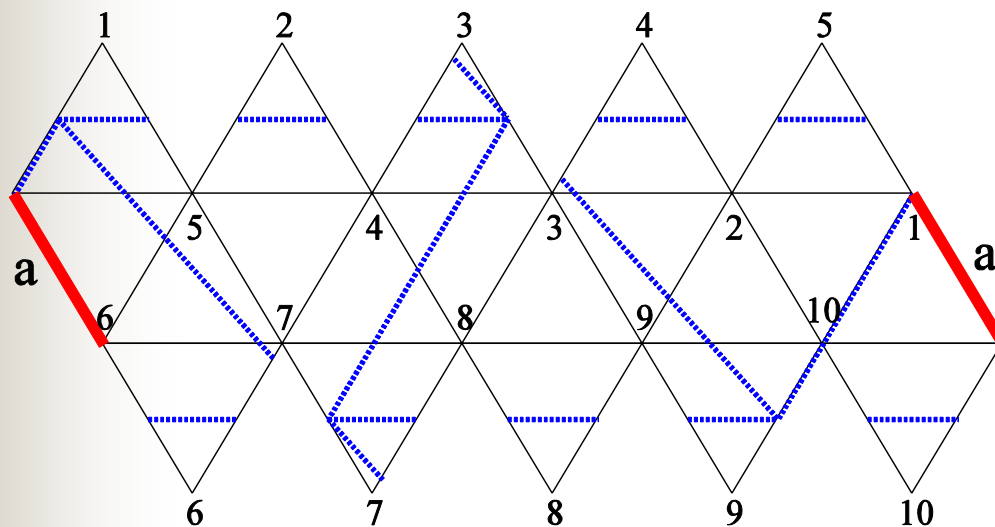
惜しい!! [平田2000]

正4面体
 \Leftrightarrow 箱(大きさ $1 \times 1 \times 1.232$)

複数の正多面体を折ることができる 共通の展開図は存在するの？

惜しい! 例たち(上原2010)

演習問題

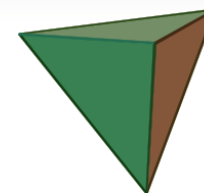
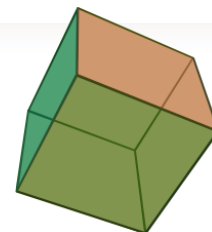


正20面体 \Leftrightarrow 4単面体

以下の共通の展開図を
考えてみよ. どのくらい
正多面体に近い
か検討せよ.

- 立方体 \Leftrightarrow 4単面体
- 八面体 \Leftrightarrow 4単面体

今回の結果



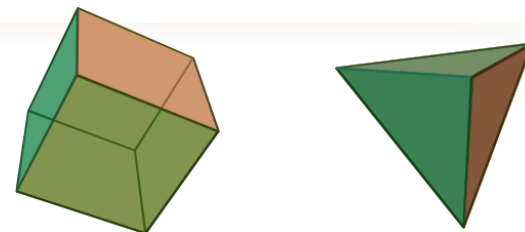
ある「点列を生成するプログラム」を作った。
生成される点列は、

(1) 無限個の点を生成すると、それは**立方体**と**正4面体**
が両方折れる展開図に収束する！

- ある意味で未解決問題を解決した！
- ...一部証明できてない部分がある

(2)

今回の結果

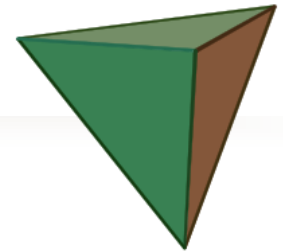


ある「点列を生成するプログラム」を作った。

生成される点列は、

- (1) 無限個の点を生成すると、それは**立方体**と**正4面体**が両方折れる展開図に収束する(一部予想)
- (2) 立方体と正4面体に極めて近い4単面体を折れる展開図が存在する。「極めて近い」辺の長さの誤差は高々 $\varepsilon < 2.89 \times 10^{-1796}$ でおさえられる(定理)

鍵を握る定理

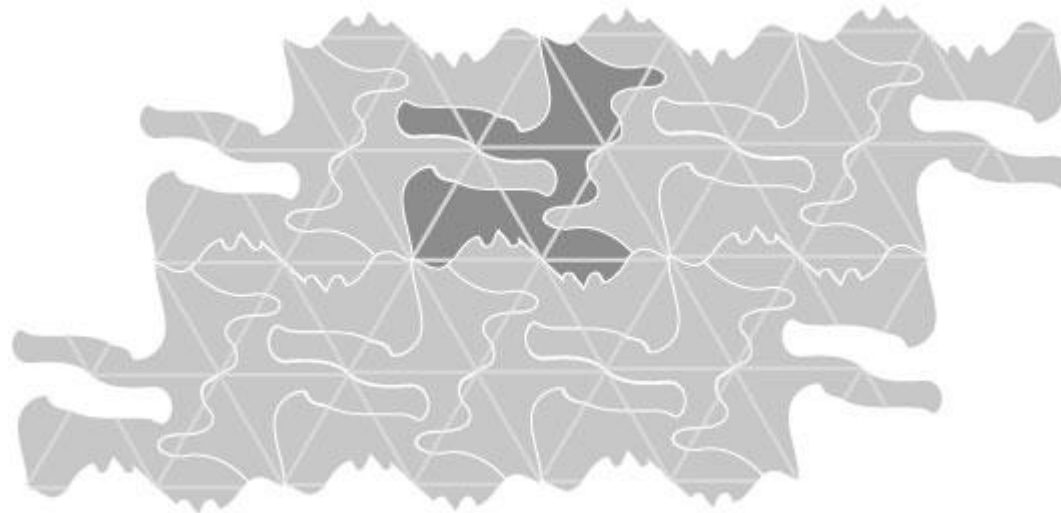


- 定理 [秋山2007, 秋山・奈良2007]

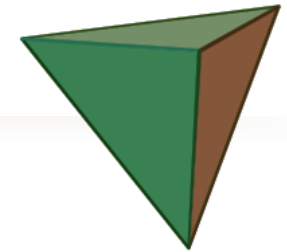
正4面体の任意の展開図を P とする。

すると P はタイリングである。

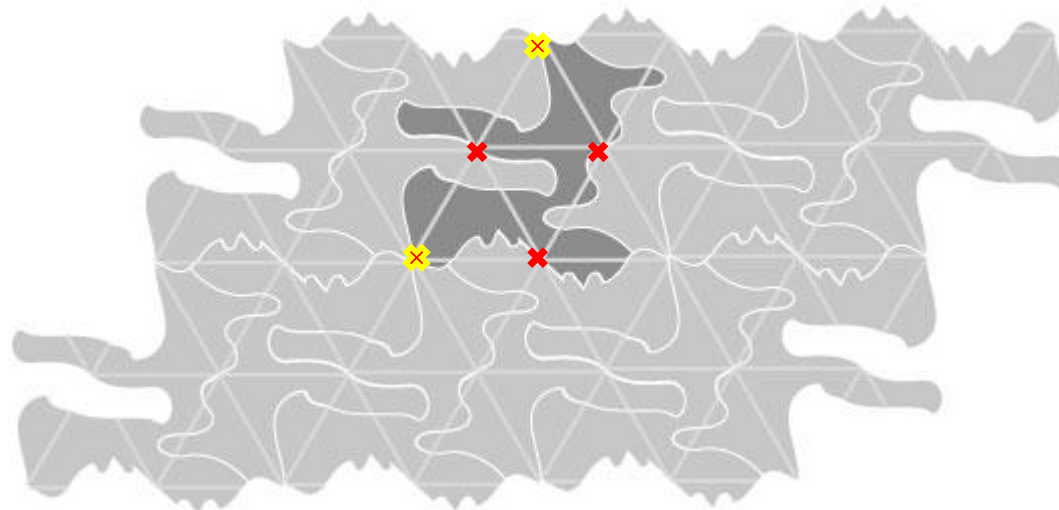
つまり P は平面を埋め尽くす。



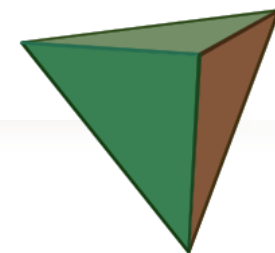
鍵を握る定理(詳細)



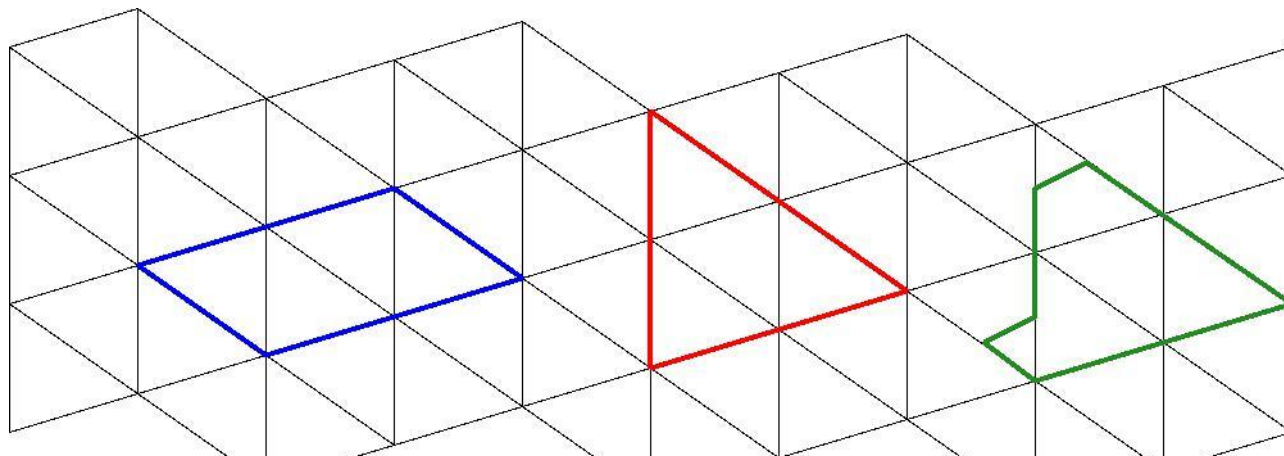
- 定理 [秋山2007, 秋山・奈良2007]
P が**正四面体**の展開図である必要十分条件は
 - (1) Pは**p2タイリング**。つまり 180° 回転で生成される
 - (2) **回転中心**の4点が三角格子を構成する
 - (3) 上記の4点はタイリング上の「同値関係」にない



鍵を握る定理(詳細)



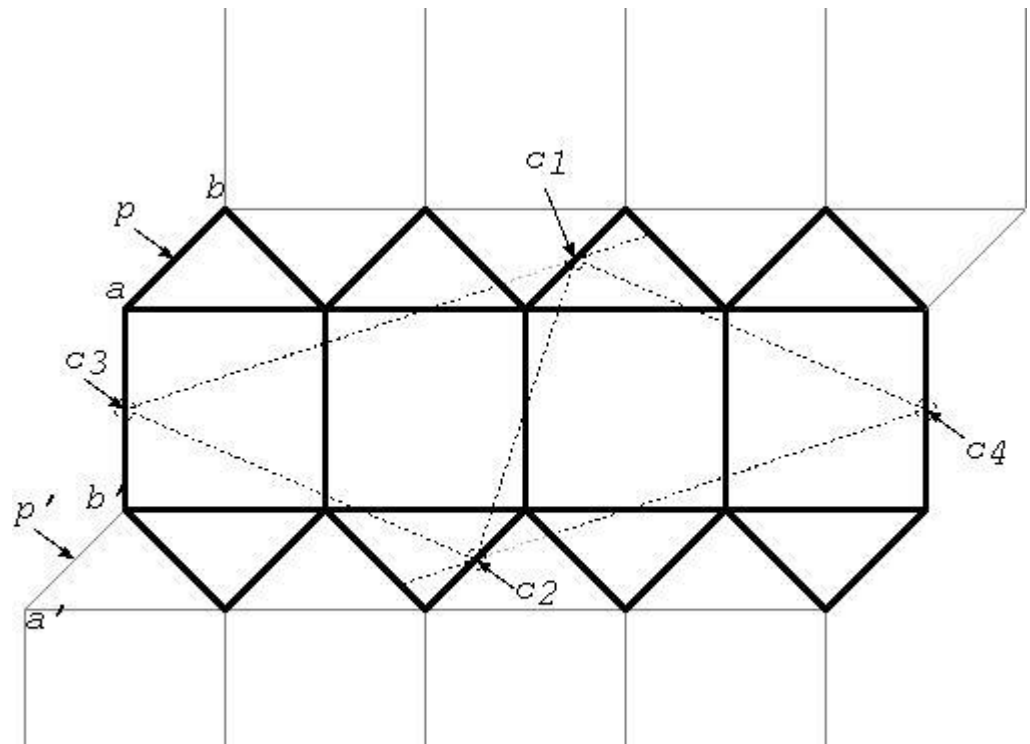
- 定理 [秋山2007, 秋山・奈良2007]
P が**4単面体**の展開図である必要十分条件は
 - (1) Pは**p2タイリング**。つまり180° 回転で生成される
 - (2) **回転中心**の4点が(**必ずしも正三角形でない**)
三角格子を構成する
 - (3) 上記の4点はタイリング上の「同値関係」にない



展開図の構成方法

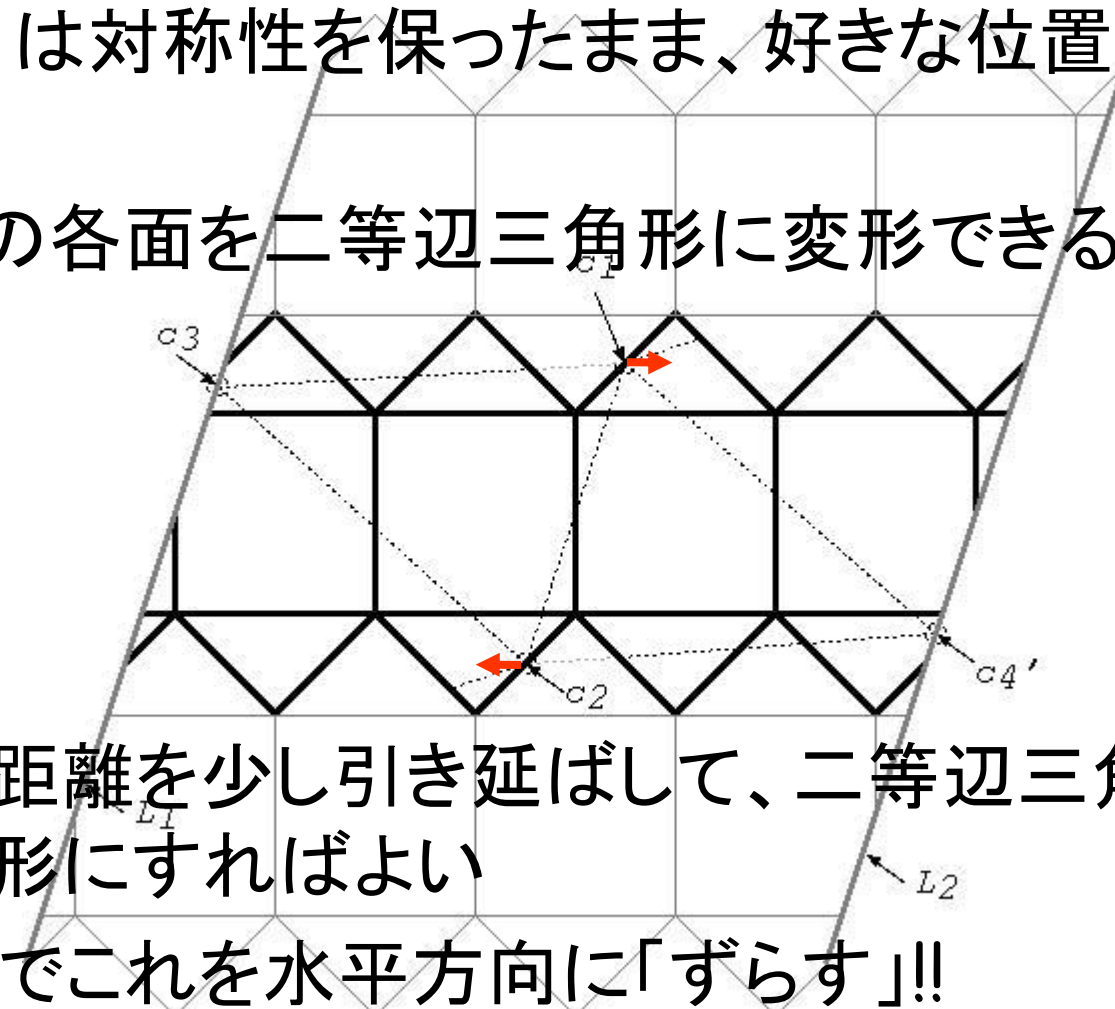
- 立方体の展開図を以下を保持したまま変形する:
 - 立方体の展開図
 - $p2$ タイリング = 4単面体の展開図

初期展開図



展開図の構成方法

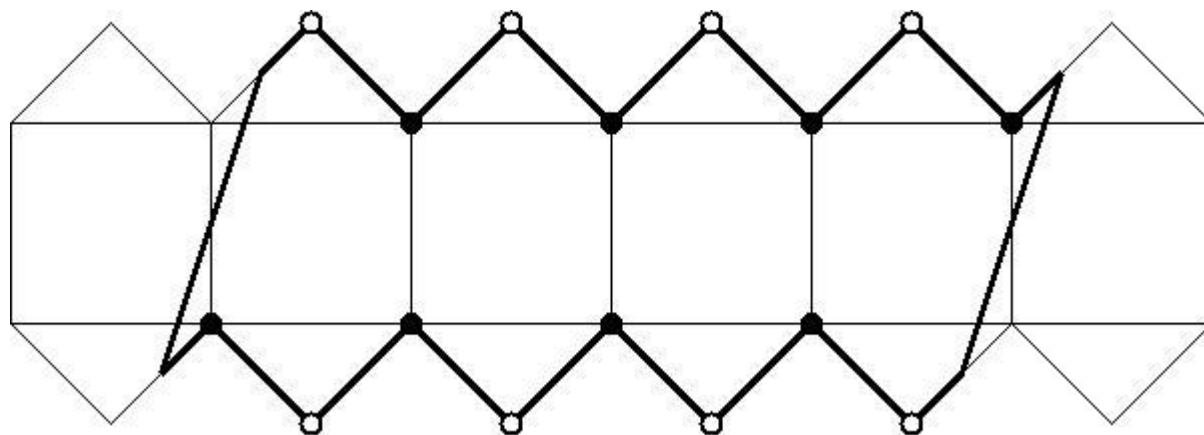
- L_1 と L_2 を c_1c_2 と平行に切りなおす
... c_3 と c_4 は対称性を保ったまま、好きな位置に移動できる
- 4単面体の各面を二等辺三角形に変形できる



- c_1c_2 間の距離を少し引き延ばして、二等辺三角形を正三角形にすればよい
 - ...そこでこれを水平方向に「ずらす」!!

展開図の構成方法

- 展開図の辺上には、いくつか動かすことのできない「固定点」が存在する

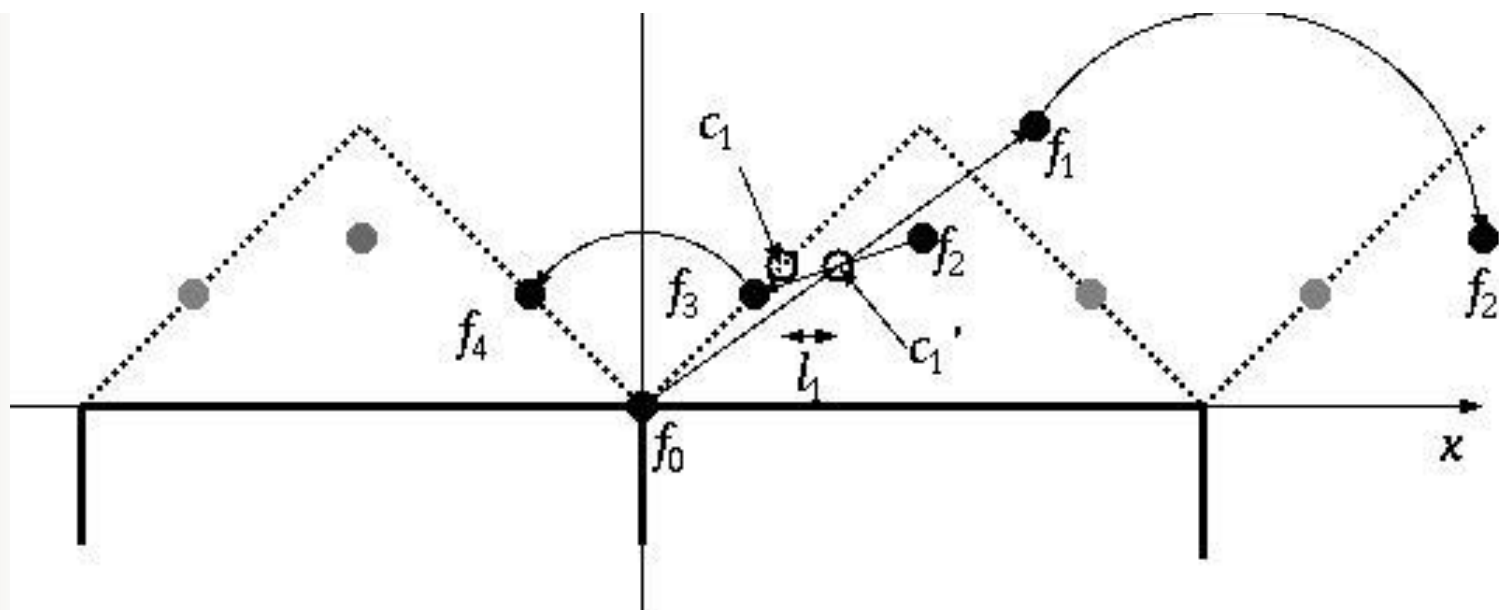


○ : 立方体の「フタ/底」の中心を作る点

● : 立方体の「角(頂点)」を作る点

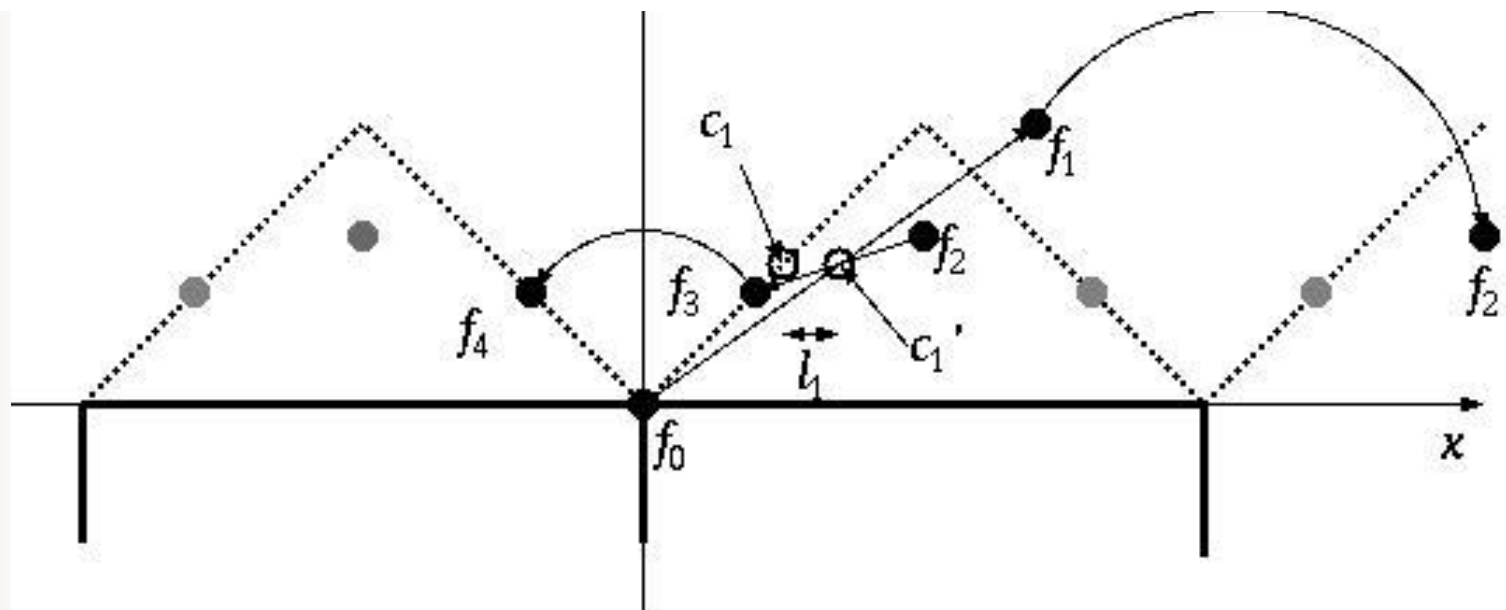
回転対称の相手同士でもある…

c_1 (や c_2) を動かす方法



- 回転中心 c_1 を c_1' に距離 l_1 だけ「ずらす」と...
 - 全体はp2タイリングなので、動かさない「固定点」の“像”の方を動かしてやればよい
 - 回転対称の新しい中心 c_1' に対する像の列は、「新しい展開図で輪郭の上に乗って」いなければならない点である

c_1 (や c_2) を動かす方法



- 回転中心 c_1 を c_1' に距離 l_1 だけ「ずらす」と...
 - l_1 が有理数: 得られる有限個の点を結べば、正しい展開図が構成できる
 - l_1 が無理数: 無限個の点列が生成されて、「展開図」に「収束」する

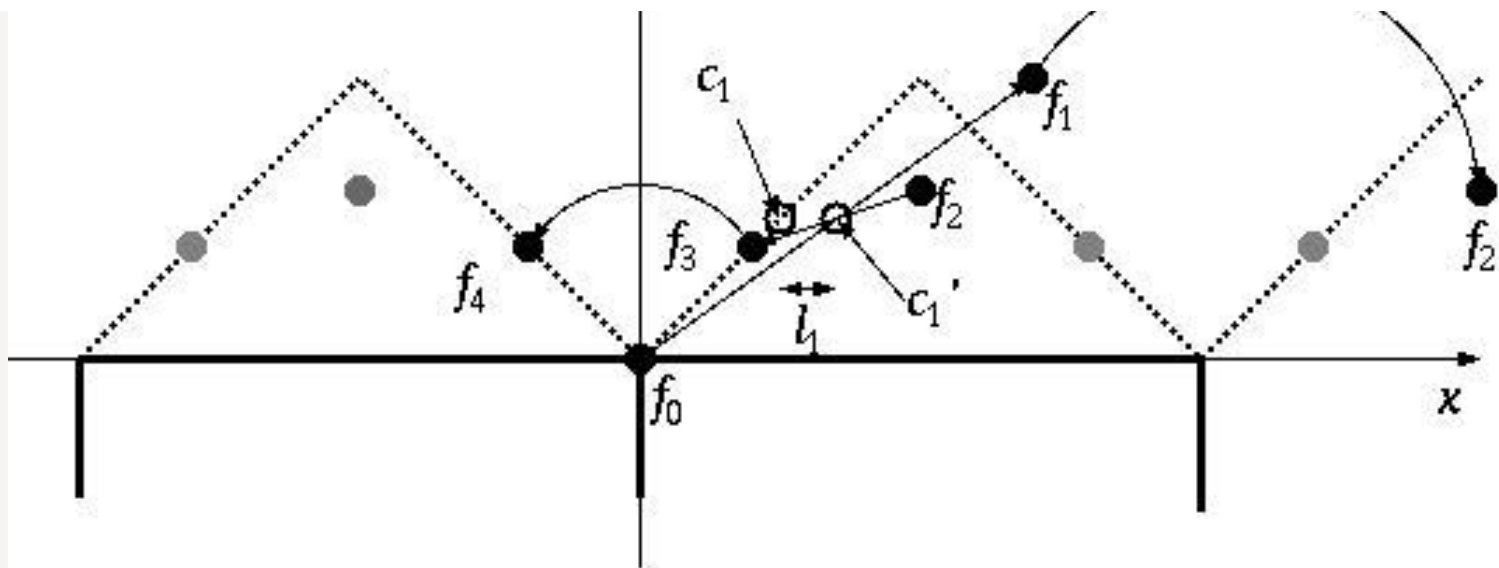
生成例

立方体と正四面体にとても近い14単面体

輪郭線は一種の「フラクタル構造」をしている

展開図を「連結」にするためには、 l_1 と l_2 の選び方に注意が必要

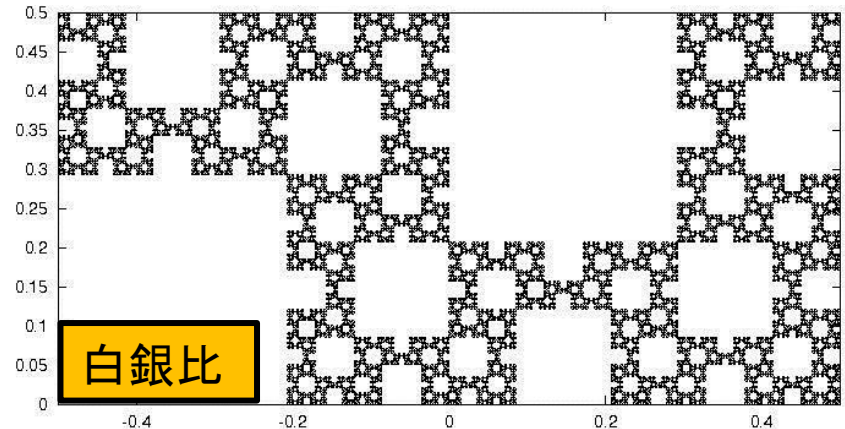
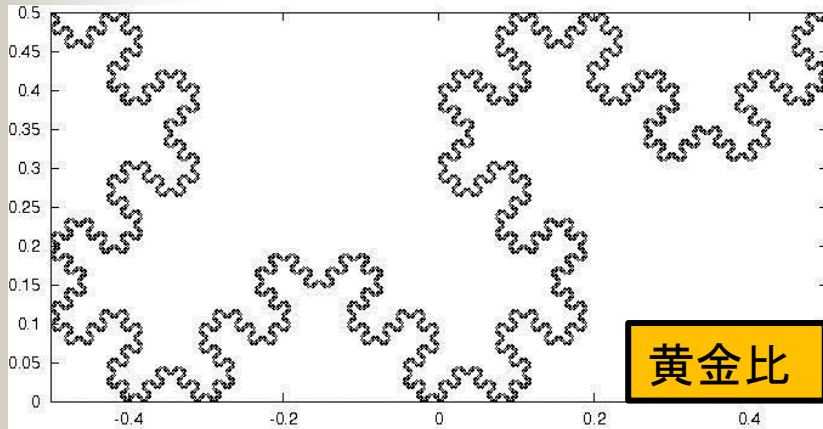
輪郭線の特徴(予想)



- [実験的な観測/予想] こうした「フラクタル曲線」は、 l_1 の値の連分数展開の係数によって決まる

$$l_1 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

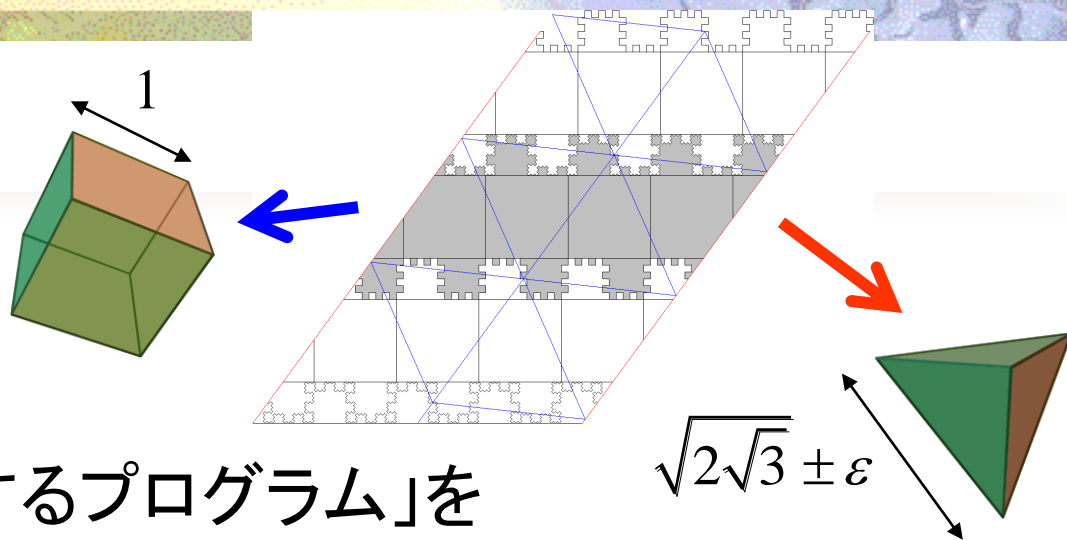
輪郭線の特徴(予想)



- [実験的な観測/予想] こうした「フラクタル曲線」は、 l_1 の値の連分数展開の係数によって決まる

$$l_1 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

まとめ



ある「点列を生成するプログラム」を作った。生成される点列は、

予想 無限個の点を生成すると、それは**立方体**と**正4面体**が両方折れる展開図に収束する

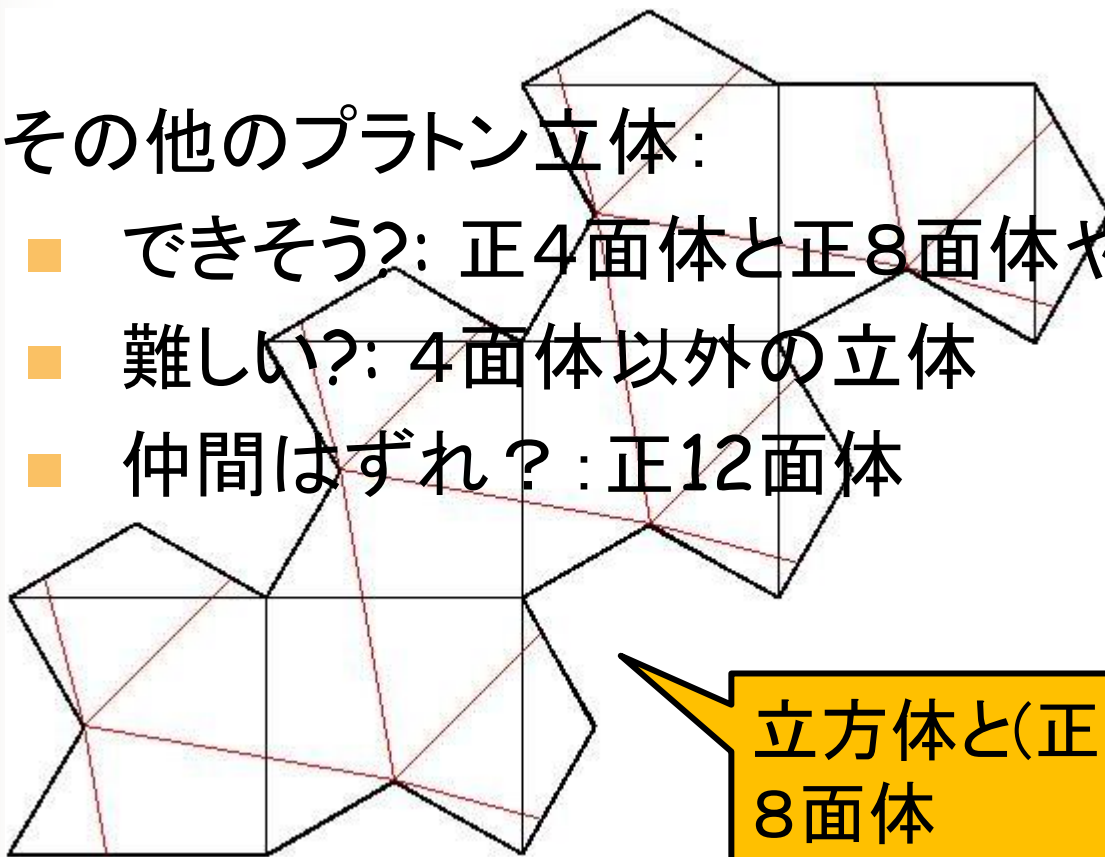
定理 立方体と正4面体に極めて近い4単面体を折れる展開図が存在する。「極めて近い」辺の長さの誤差は高々 $\epsilon < 2.89 \times 10^{-1796}$ でおさえられる

未解決問題

- [実験的な**定理**予想] こうした「フラクタル曲線」は、 l_1 の値の連分数展開の係数によって決まる

- その他のプラトン立体:

- できそう?: 正4面体と正8面体や正20面体
- 難しい?: 4面体以外の立体
- 仲間はずれ?: 正12面体



立方体と(正じゃないけど)
8面体

今日の予定

1. 展開図の基礎的な知識

1. 正多面体の共通の展開図

1時間目～2時間目

2. ペタル型の紙で折るピラミッド型: 2時間目～3時間目

3. (複数の箱が折れる共通の展開図: 3時間目?)

Bumpy Pyramid Folding

Zachary Abel (MIT)

Erik Demaine (MIT)

Martin Demaine (MIT)

Hiro Ito (Univ. of Electro-Communications)

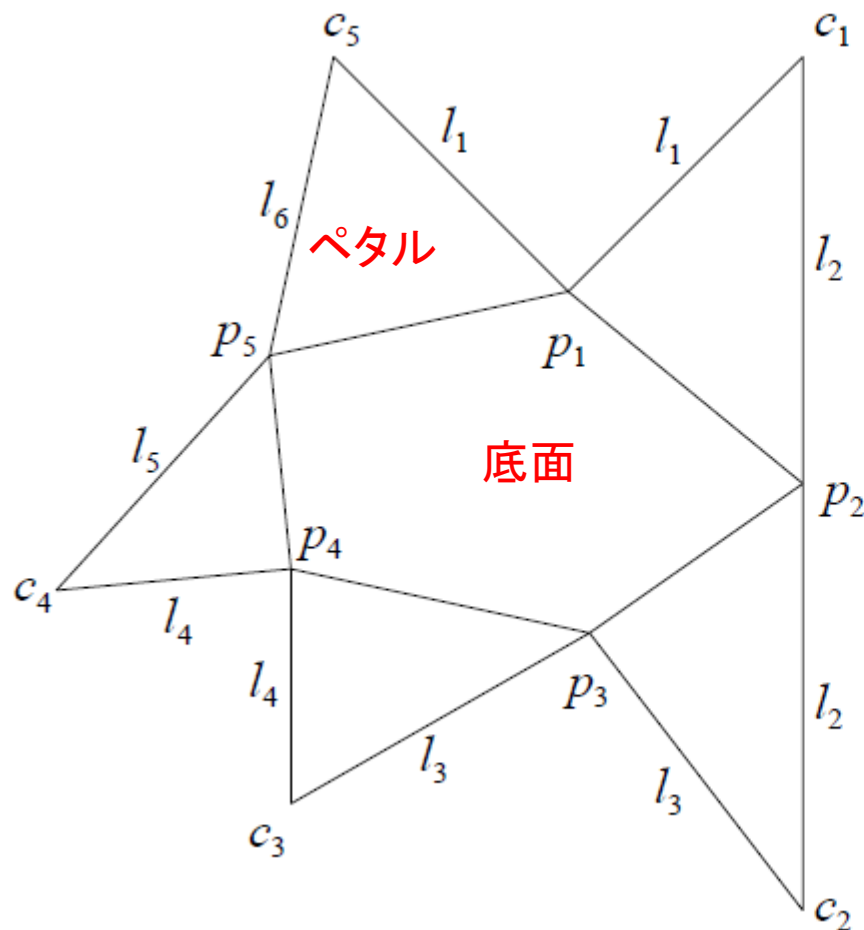
Jack Snoeyink (The University of North Carolina)

[Ryuhei Uehara \(JAIST\)](#)

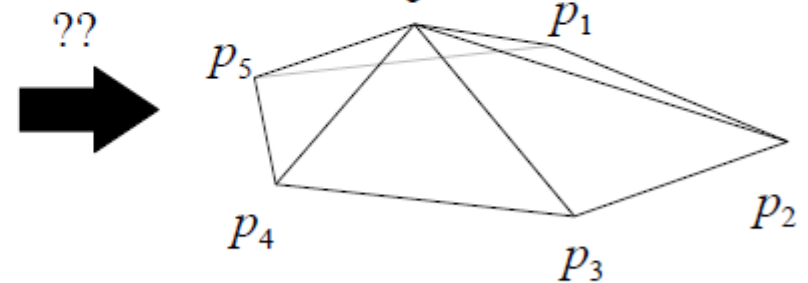
文献

Zachary Abel, Erik D. Demaine, Martin Demaine, Hiro Ito, Jack Snoeyink and Ryuhei Uehara: Bumpy Pyramid Folding, *The 26th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2014)*, 2014/08/11-2014/08/13, Halifax, Canada.

Bumpy Pyramid Folding



計算幾何学
(計算折り紙)の問題



Background (1)

➤ ある日、パズル関係の知人から手紙が届く...

1. 折り紙の問題1:

入力: 周囲にペタルのついた三角形

出力: ここから三角錐が折れるか?

結論: 接着される辺同士の長さが合っていて、
十分長ければ可能

2. 折り紙の問題2:

入力: 周囲にペタルのついた4角形

出力: ここから4角錐(ピラミッド)が折れるか?

観測: 一般に2通りの折り方があり、凸と凹になる...?

(一般化)ピラミッド問題

入力: 周囲にペタルのついた凸 n 角形

問題1: ここから n 角錐(ピラミッド)が折れるか?

一般には「ならない」が、立体は折れることが多い

問題2: ピラミッドにならない場合,

問題2-1: 凸多面体が折れるか?

問題2-2: 体積最大の立体が折れるか?

メタ問題2: 二つの問題の解は違うのか?

メタ²問題2: 二つの問題の解が同じになるのはどんなときか?

底面の三角形分割ごとに異なる凸凹な立体が折れる

Background (2)

➤ 「折り」と「展開」の問題

- 1500年代に研究が始まったが、
わかっていることは、あまりない
- 近年、計算幾何学の有望なテーマ

➤ 最大の未解決問題(予想):

どんな凸多面体も、辺に沿って切るだけで
展開図に展開できる。ただし**展開図**とは、
以下の条件を満たす多角形:

- 重なりを持たない(←これが難しい)
- 連結である



Background (2)

➤ 最大の未解決問題(予想):

どんな凸多面体も, 辺に沿って切るだけで
展開図に展開できる. ただし**展開図**とは,
以下の条件を満たす多角形:

- 重なりを持たない
- 連結である

➤ ピラミッド問題は, 凸多面体の展開の最初の
ステップの逆問題に見える...

既存の関連結果

1. Alexandrovの定理(1942)

幾何情報(距離情報と組合せ的な構造)が与えられたとき、「**凸**多面体の体積」は一意的に決まる。
⇒ほとんどの**凸**多面体は展開図と折り方が与えられるとユニークに決まる。

- 体積を求める多項式: Sabitov 1998.
- 構成的証明: Bobenko, Izvestiev 2008.
- 多項式時間アルゴリズム: Kane, et al. 2009.
...実行時間は $O(n^{456.5})$

⇒今回の問題は特殊なケースの研究

今回の結果(1)

1. 折り紙の問題1:

入力: 周囲にペタルのついた三角形

出力: ここから三角錐が折れるか?

結論: 接着される辺同士の長さが合っていて、
十分長ければ可能

...Sabitov の多項式で計算した体積が正であればよい。

$$V^2 = \frac{1}{144} [l_1^2 l_5^2 (l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_6^2 - l_1^2 - l_5^2) + l_2^2 l_6^2 (l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_2^2 - l_6^2) + l_3^2 l_4^2 (l_1^2 + l_2^2 + l_5^2 + l_6^2 - l_3^2 - l_4^2) - l_1^2 l_2^2 l_4^2 - l_2^2 l_3^2 l_5^2 - l_1^2 l_3^2 l_6^2 - l_4^2 l_5^2 l_6^2].$$

今回の結果(2)

1. 折り紙の問題2:

入力: 周囲にペタルのついた4角形

出力: ここから4角錐(ピラミッド)が折れるか?

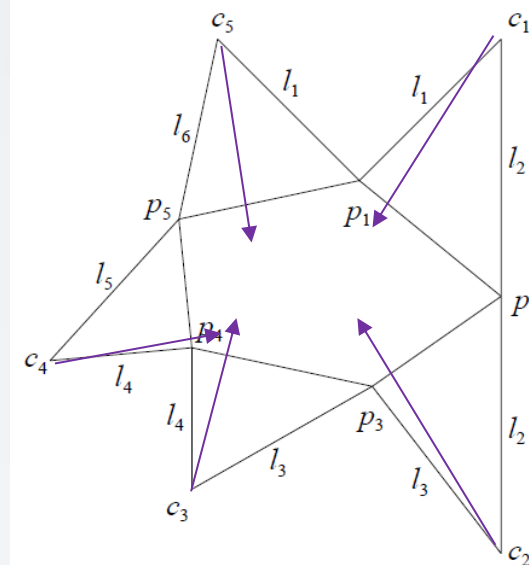
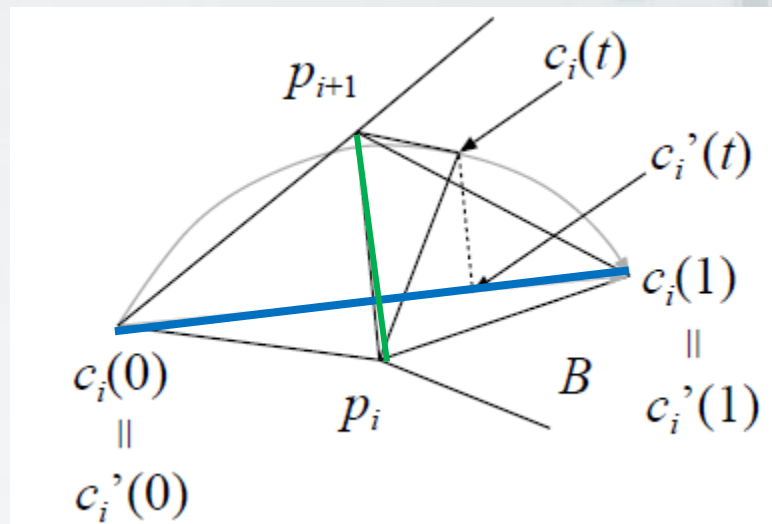
- 底面の4角形を対角線で切ると二つの4面体を接着した立体ができる
 1. 2通りの切り方で体積が同じ: ピラミッドができる
 2. 体積が異なるなら、一方は凸で一方は凹
 3. (凸な方だけできることもある)

Sabitovの結果だけでは、ここから先は難しい...

重要なObservation

頂点を折り返すとき、
頂点の写像の軌跡は
底面の辺に対する垂線となる

⇒ピラミッドを折るときの頂点の
動きを上から見ると、
「軌跡」が計算できる



(一般化)ピラミッド問題:解(1)

入力: 周囲にペタルのついた n 角形

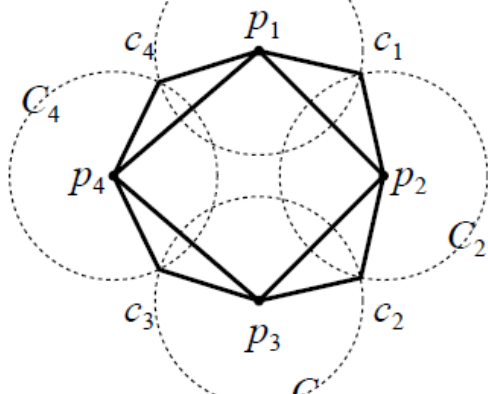
問題1: ここから n 角錐(ピラミッド)が折れるか?

[解答] 各頂点からの垂線が1点で交わればよい!

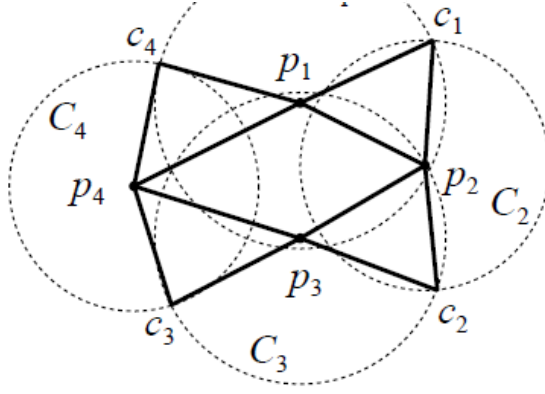
(+ 頂点が十分な高さを持つことも必要)

線形時間で簡単に判定できる。

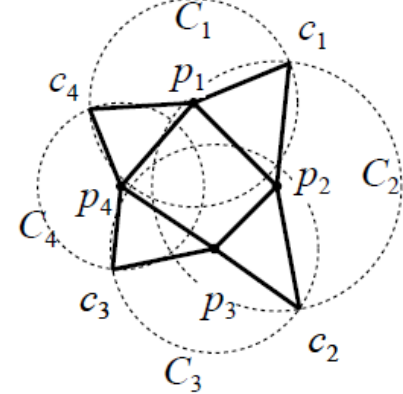
例: (1) できない



(2) 凸だけできる



(3) 凸と凹が両方できる



(一般化)ピラミッド問題:解(2)

入力: 周囲にペタルのついた n 角形

問題2: ピラミッドにならない場合,

問題2-1: 凸多面体が折れるか?

問題2-2: 体積最大の立体が折れるか?

[解] 多項式時間アルゴリズムがある。DPで $O(n^3)$

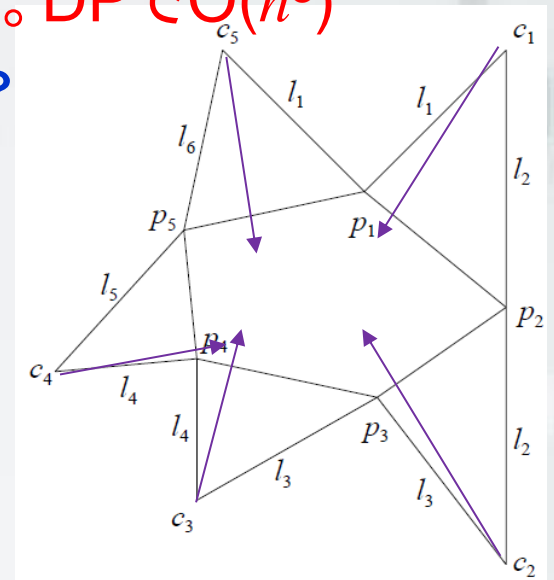
メタ問題2: 二つの問題の解は違うのか?

[解] 一般に違う(凹>凸がある)

メタ²問題2: 二つの問題の解が

同じになるのはどんなときか?

[未解決] わかりません...



(一般化)ピラミッド問題:解(3)

入力: 周囲にペタルのついた n 角形

問題2: ピラミッドにならない場合,

問題2-1: 凸多面体が折れるか?

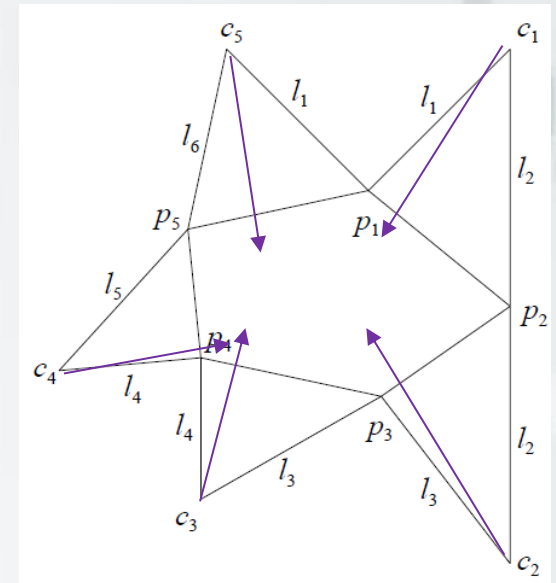
[定理] (ペタルが十分な長さがあるならば)

1. いつでも折れる
2. 折る手順(=ペタルの接着順序)を線形時間で計算できる。

[証明の核となるアイデア]

折る手順は Power Diagram

(一般化Voronoi図)で計算できる!

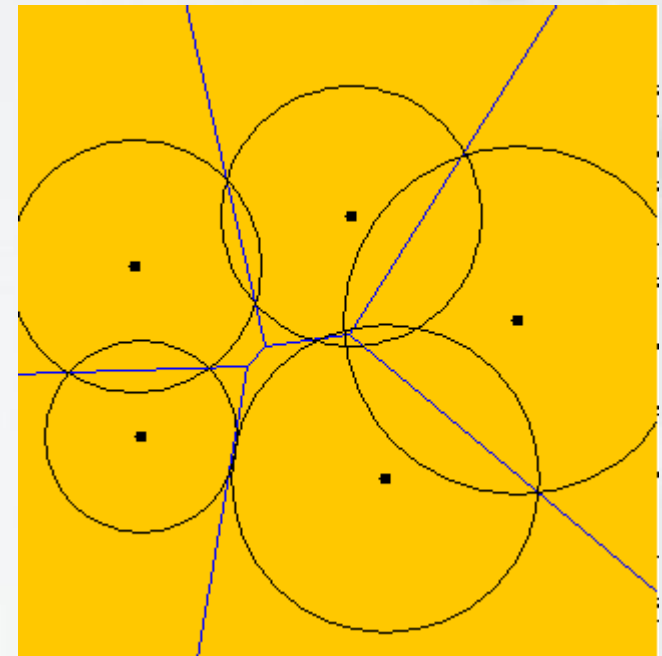
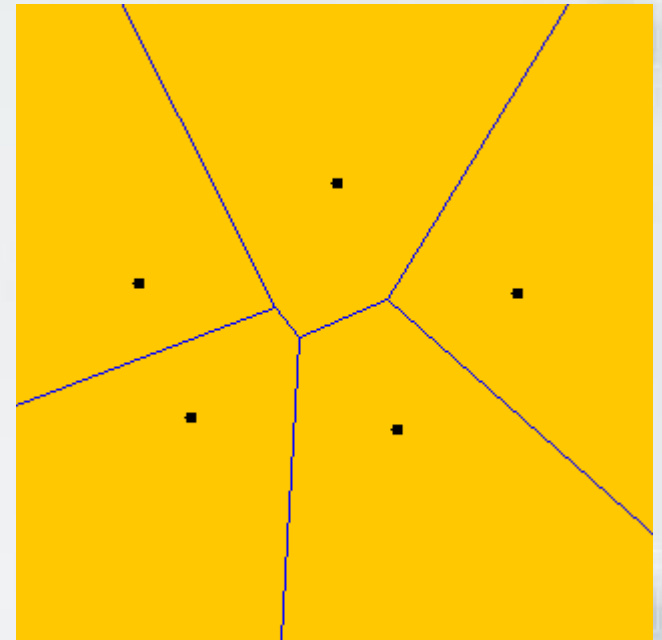


Power Diagram

- Voronoi図では
各点対間に垂直
2等分線を引く
- Power Diagram
では各頂点に
「重み」がある

細かいけど重要な注意: 点が凸に並んでいると、これらは「木」になり、閉路をもたない。

<http://pages.cpsc.ucalgary.ca/~laneb/Power/>



(一般化)ピラミッド問題:解(3)

入力: 周囲にペタルのついた n 角形

問題2: ピラミッドにならない場合,

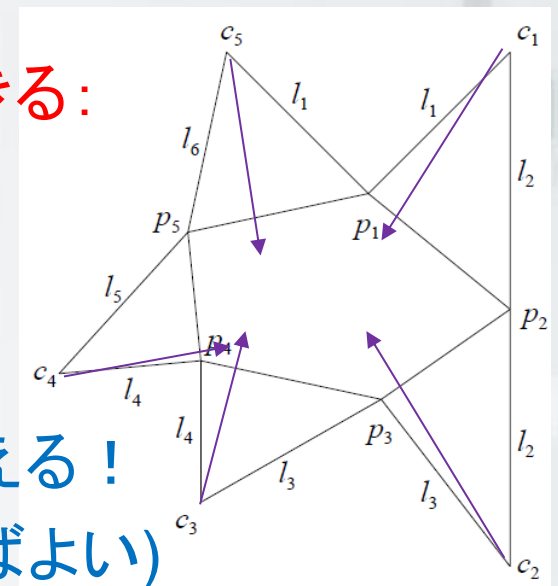
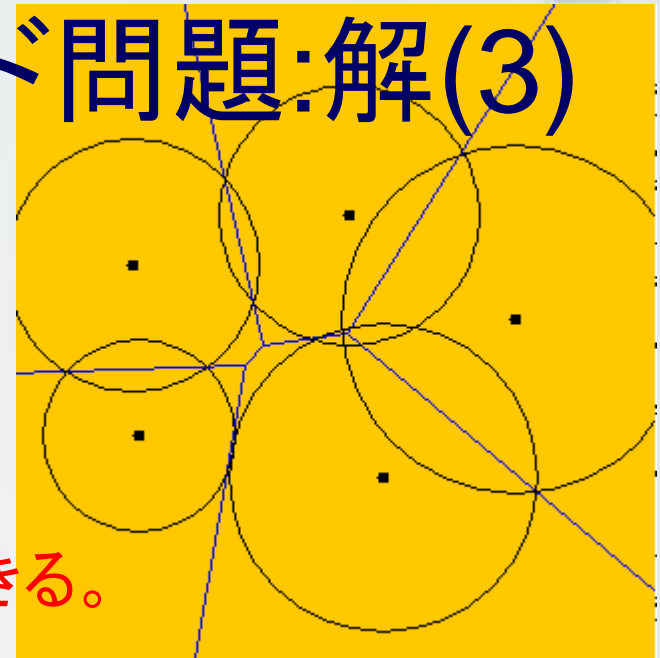
問題2-1: 凸多面体が折れるか?

[定理] 線形時間で折る手順を計算できる。

[証明の核となるアイデア]

折る手順は Power Diagram で計算できる:

1. 底面の点 p_i が「点」
2. 付随する長さ l_i が「重み」
3. Power Diagram の線が頂点 c_i と接着後にできる新たな頂点の軌跡を与える!
(Power Diagram の「木」に沿って貼ればよい)



まとめと課題

(一般化)ピラミッド問題

入力: 周囲にペタルのついた n 角形

問題1: ここから n 角錐(ピラミッド)が折れるか? **OK!**

問題2: ピラミッドにならない場合,

問題2-1: 凸多面体が折れるか? **Good!** $O(n^3)??$

問題2-2: 体積最大の立体が折れるか? **So so (改善の余地?)**

メタ問題2: 二つの問題の解は違うのか?

メタ²問題2: 二つの問題の解が同じになるのはどんなときか? **未解決問題**

底面が凸 n 角形
であることを使っ
てない

頂点が底面からはみ出さな
ければ凸が最大になりそうな
気がするけれど...

今日の予定

1. 展開図の基礎的な知識

1. 正多面体の共通の展開図

1時間目～2時間目

2. ペタル型の紙で折るピラミッド型: 2時間目～3時間目

3. (複数の箱が折れる共通の展開図: 3時間目?)

Common Developments of Three Different Orthogonal Boxes

[Ryuhei UEHARA](#) @ JAIST

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/>

uehara@jaist.ac.jp

and

Toshihiro Shirakawa

(Amateur puzzle solver)

主な文献

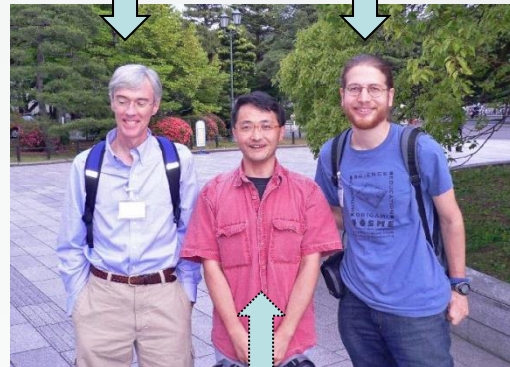
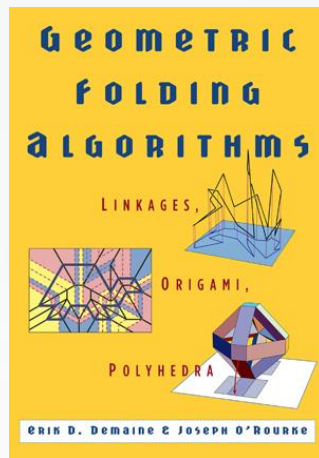
Toshihiro Shirakawa and Ryuhei Uehara
Common Developments of Three Different Orthogonal Boxes,
The 24th Canadian Conference on Computational Geometry
(CCCG 2012), pp. 19-23, 2012/8/8-10, PEI, Canada.

The bible of this topic...

Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra

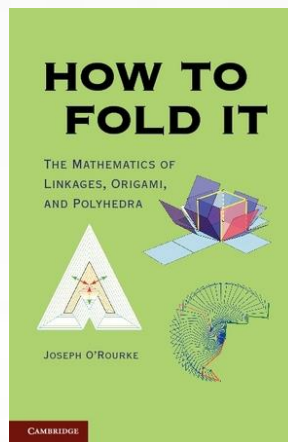
by J. O'Rourke and E. D. Demaine, 2007.

Authors



(2009)

I, [unintelligible] to Japanese (2009).

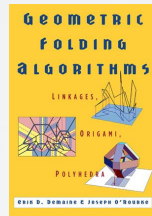


2011

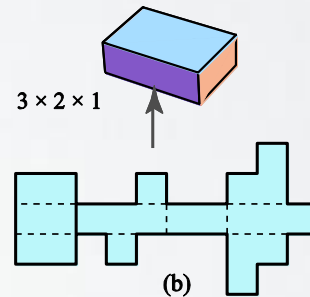
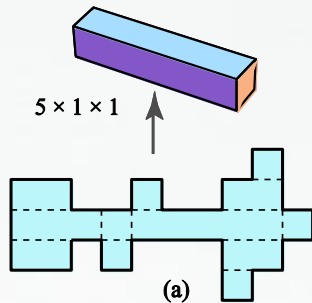


2012, August!!

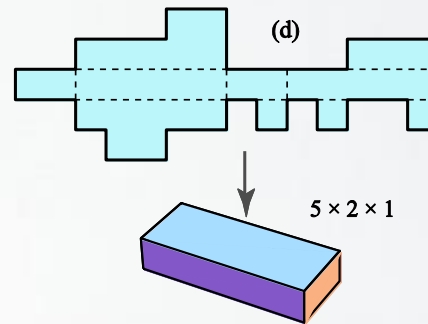
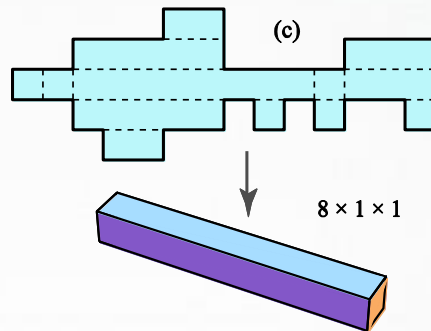
In ,



➤ There were two developments that fold into two boxes;



- Are they exceptional?
- Is there any development that fold to 3 or more boxes??



[Biedl, Chan, Demaine, Demaine, Lubiw, Munro, Shallit, 1999]

Developments of two boxes

In [Uehara, Mitani 2007], randomized algorithm that looks for such polygons by *brute force*;

➤ Polygons folding into 2 boxes:

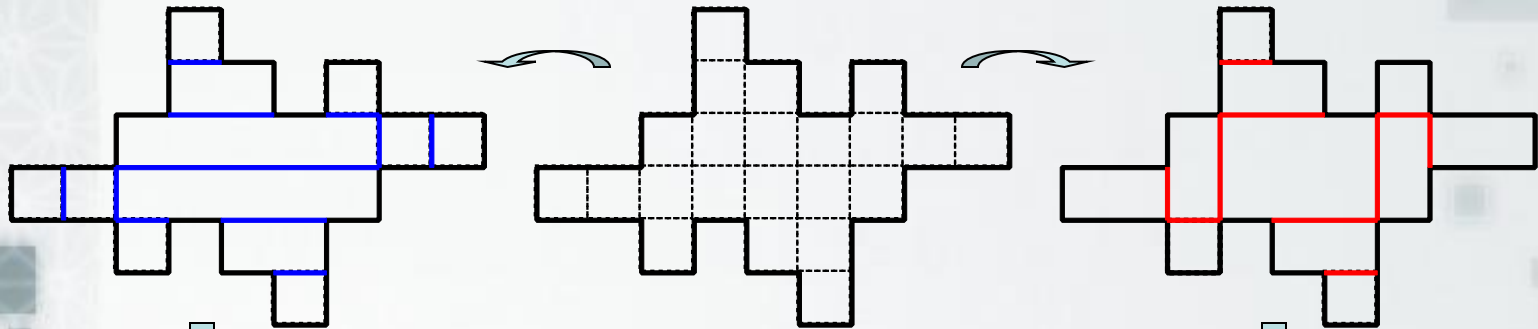
1. There are many (~ 9000)
(by supercomputer (SGI Altix 4700))
2. Theoretically, infinitely many



Note:

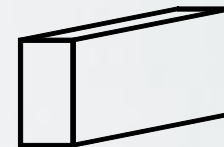
Example:
 $1 \times 1 + 1 \times 5 + 1 \times 5$
 $= 1 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 3$
 $= 11$ (surface area: 22)

Polygons folding to 2 different orthogonal boxes



$$1 \times 1 \times 5$$
$$= a \times b \times c$$

- We fold/(cut) at an edge of **unit squares**
- Surface area:
 $2(ab + bc + ca)$
- Necessary condition:



$$1 \times 2 \times 3$$
$$= a' \times b' \times c'$$

$$ab + bc + ca = a'b' + b'c' + c'a'$$

It seems to be better to have many combinations...

Note:

Surface areas;

If you try to find for three boxes,

If you try to find for four boxes,

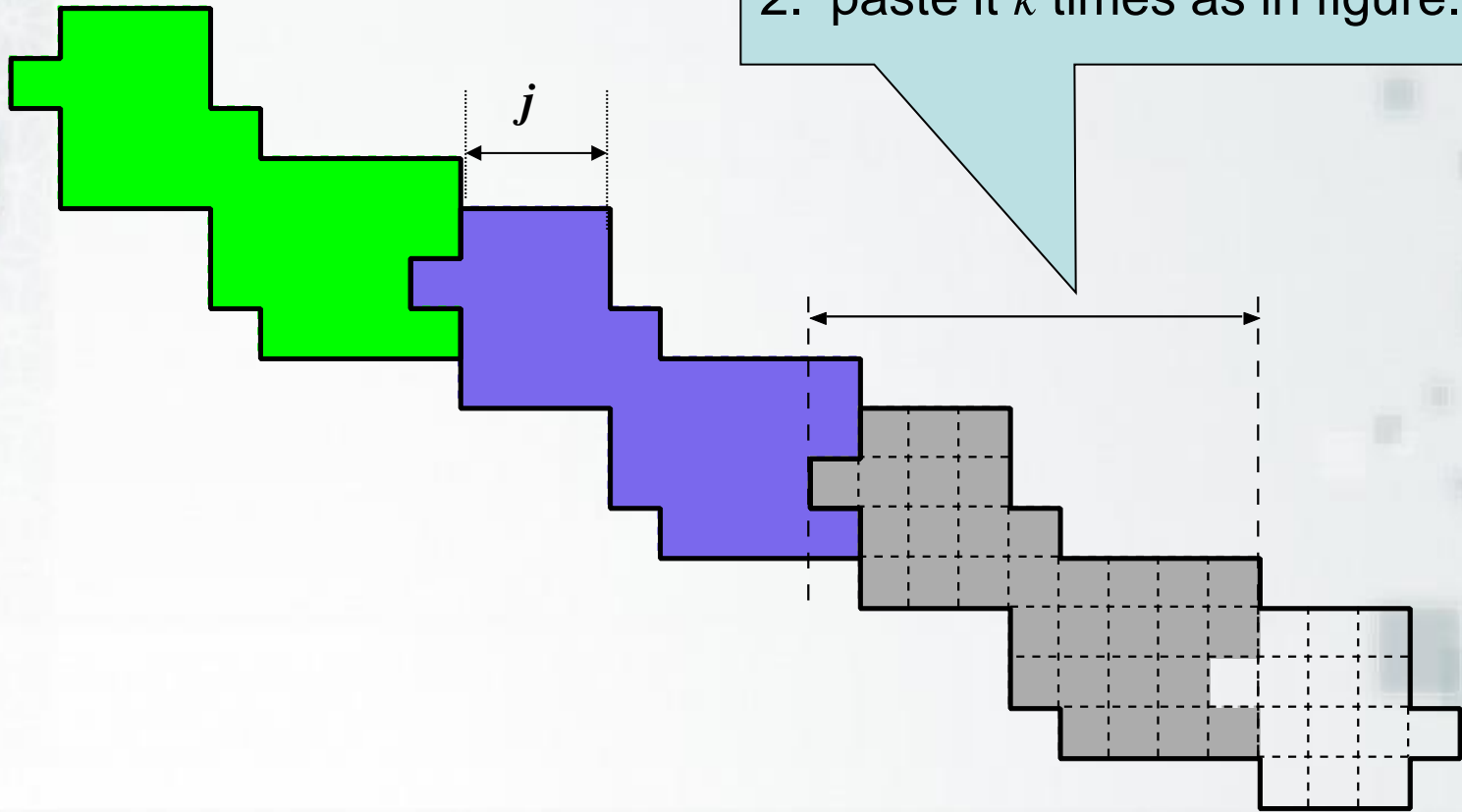
Area	Trios	Area	Trios
22	(1,1,5),(1,2,3)	46	(1,1,11),(1,2,7),(1,3,5)
30	(1,1,7),(1,3,3)	70	(1,1,17),(1,2,11),(1,3,8),(1,5,5)
34	(1,1,8),(1,2,5)	94	(1,1,23),(1,2,15),(1,3,11), (1,5,7),(3,4,5)
38	(1,1,9),(1,3,4)	118	(1,1,29),(1,2,19),(1,3,14), (1,4,11),(1,5,9),(2,5,7)

known results

Developments of two boxes

[Thm] There exist an infinitely many developments that fold to 2 boxes.

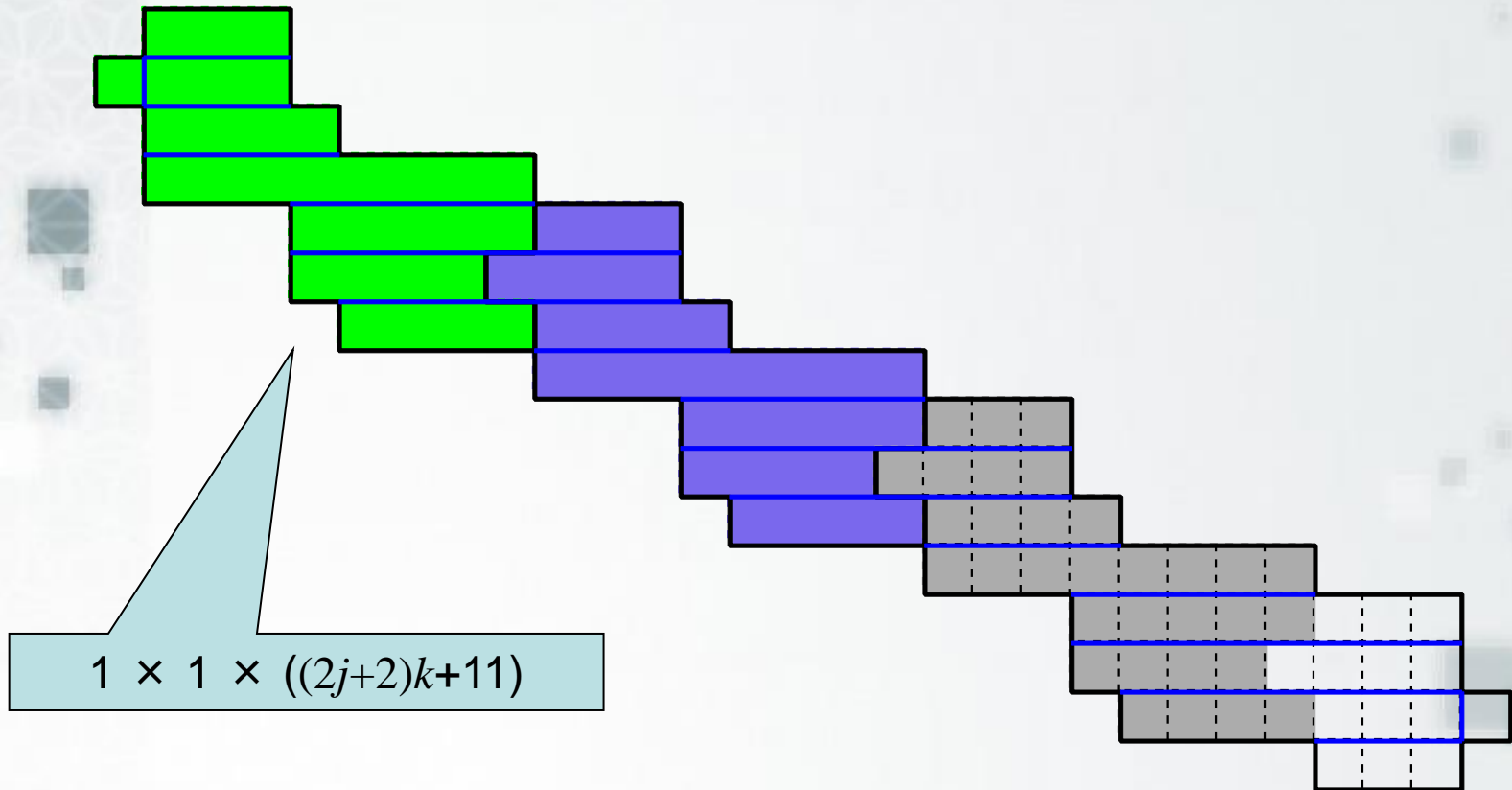
[Proof]



Developments of two boxes

[Thm] There exists an infinitely many polygons...

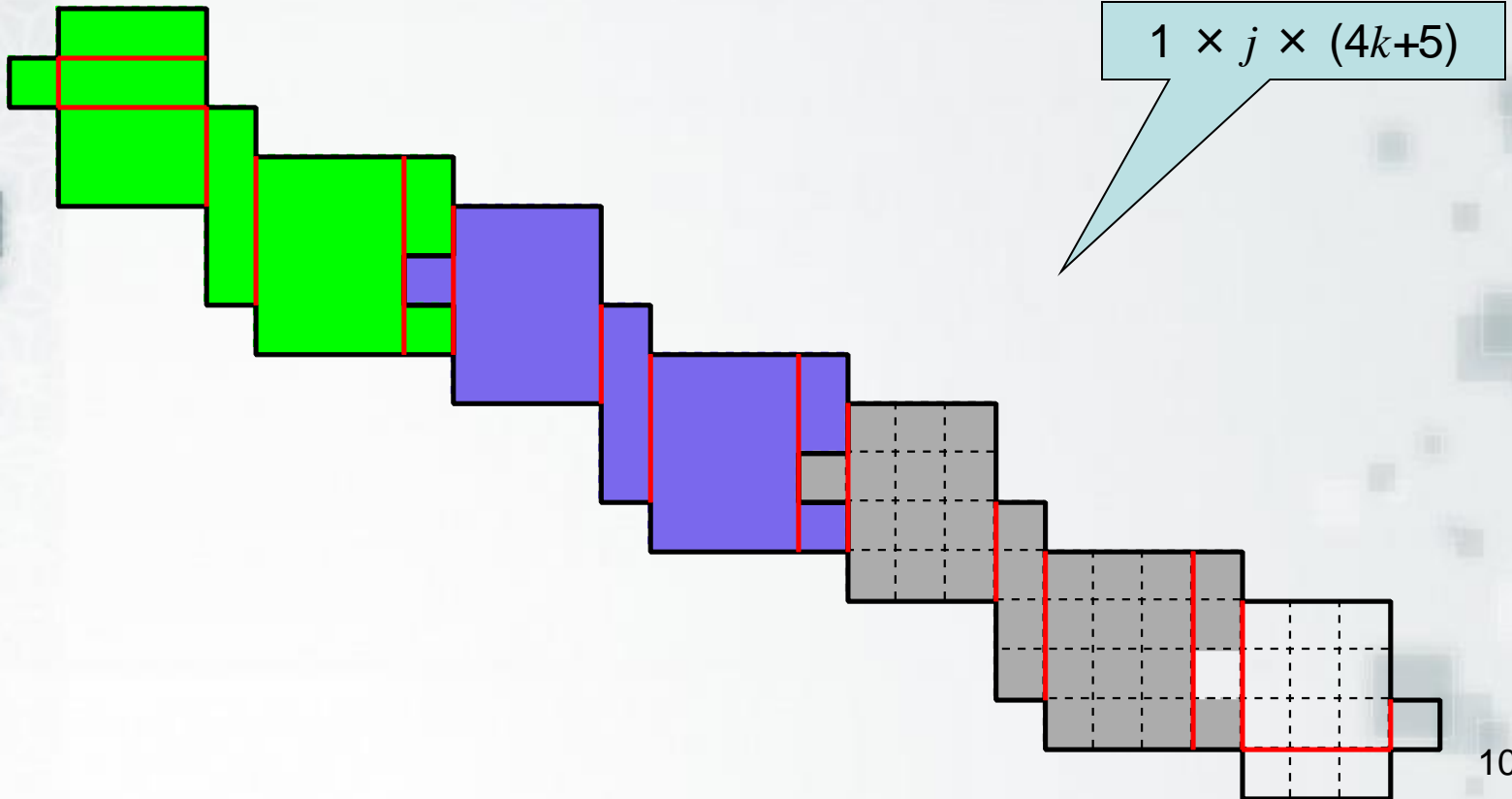
[Proof]



Developments of two boxes

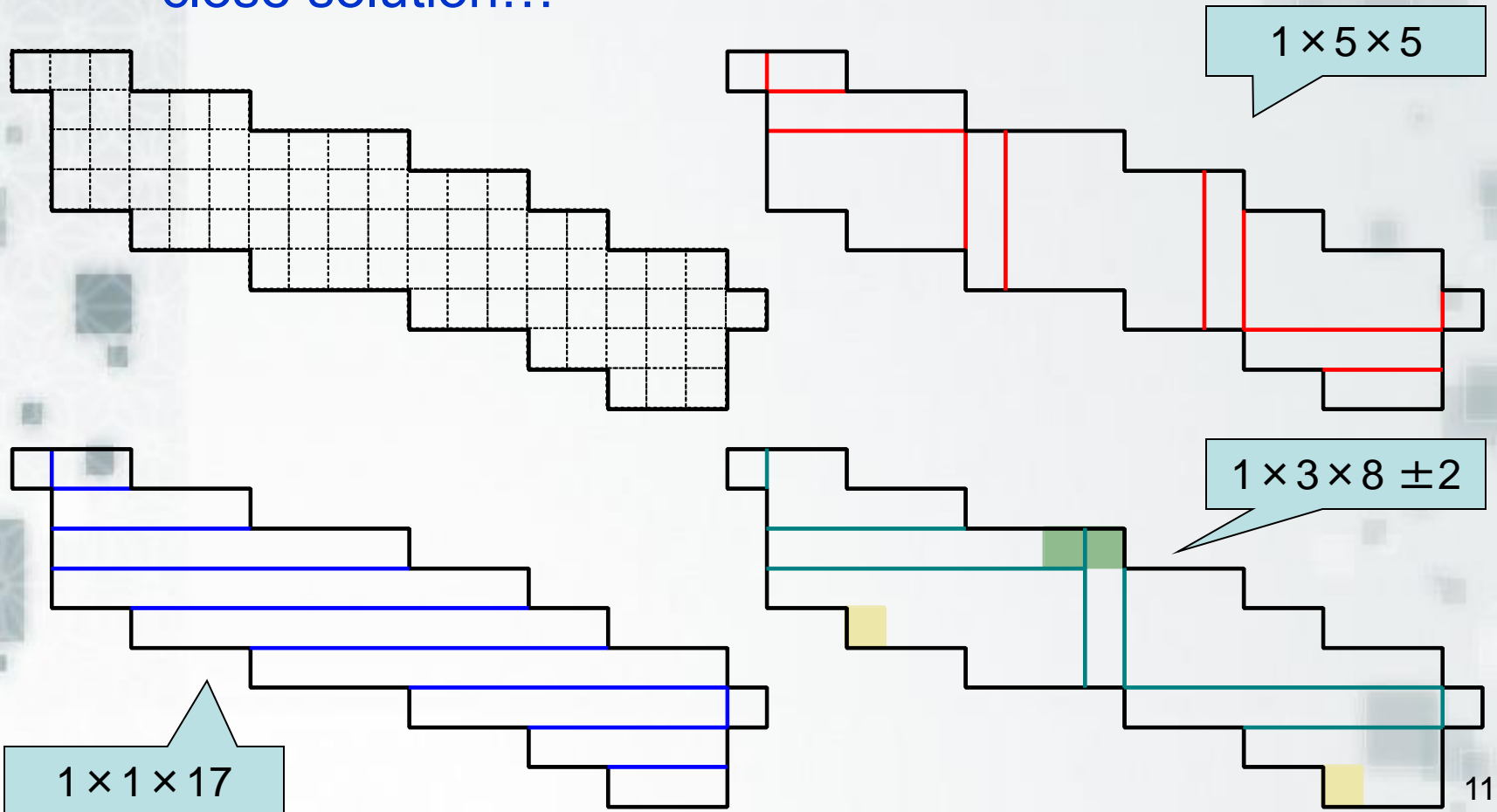
[Thm] There exists an infinitely many polygons...

[Proof]



Developments of *three* boxes(?)

- A polygon that can fold to three distinct boxes...?
 - close solution...



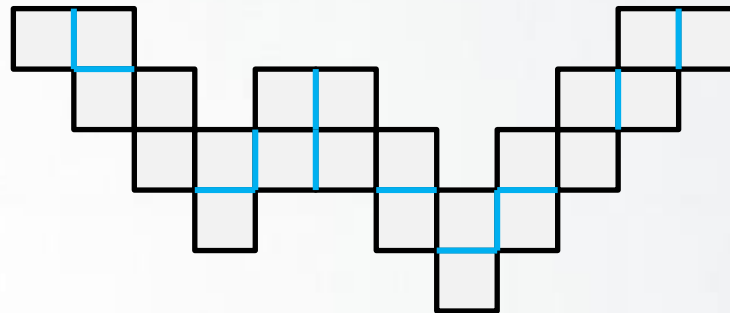
Developments of *three* boxes(?)

- In [Abel, Demaine, Demaine, Matsui, Rote, Uehara 2011],
- The number of developments that fold to $1 \times 1 \times 5$ box and $1 \times 2 \times 3$ box is 2263.
 - ◆ the latest algorithm runs in around 10 hrs.
 - Among them, there is only one **pearl** development...

Developments of *three* boxes(?)

➤ In [Abel, Demaine, Demaine, Matsui, Rote, Uehara 2011],

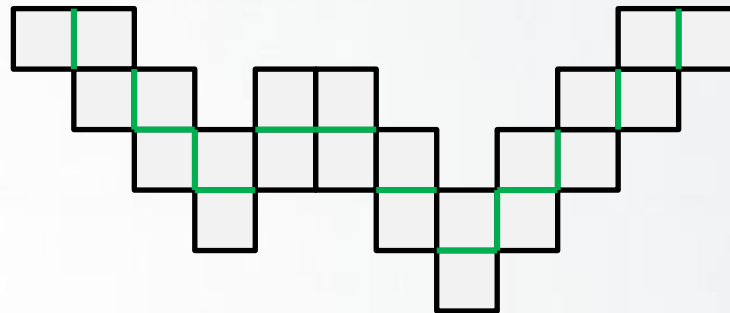
- The number of developments that fold to $1 \times 1 \times 5$ box and $1 \times 2 \times 3$ box is 2263.
- ◆ the latest algorithm runs in around 10 hrs.
- Among them, there is only one **pearl** development...



$1 \times 2 \times 3$

Developments of *three* boxes(?)

- In [Abel, Demaine, Demaine, Matsui, Rote, Uehara 2011],
- The number of developments that fold to $1 \times 1 \times 5$ box and $1 \times 2 \times 3$ box is 2263.
 - ◆ the latest algorithm runs in around 10 hrs.
 - Among them, there is only one **pearl** development...



$1 \times 1 \times 5$

Developments of three boxes(?)

In [Abel, Demaine, Demaine, Matsui, Rote, Uehara 2011],

おまけ問題:
3通り折ってみよう

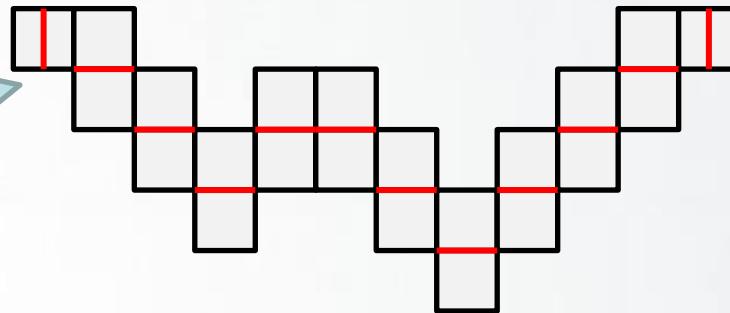
The number of developments that fold to $1 \times 1 \times 5$ box and $1 \times 2 \times 3$ box is 2263.

the latest algorithm runs in around 10 hrs.

Is the "box" *cheat* having volume 0?

Among them, there is only one **pearl** development...

If you don't like $\frac{1}{2}$, refine each square into 4 squares



Since each column has height 2 except both sides

$1 \times 11 \times 0$

!

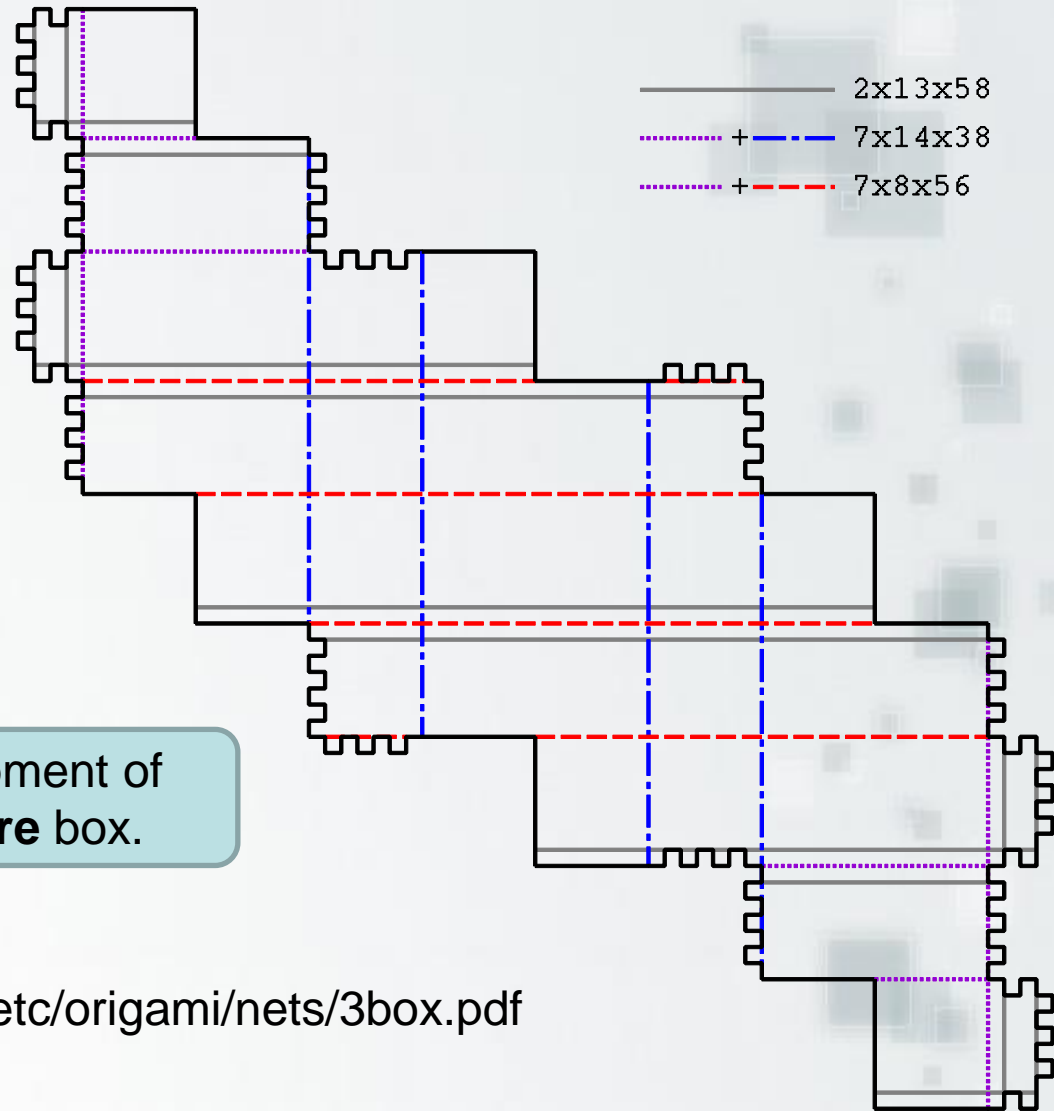
Developments of three boxes(!)

In February 2012,
Shirakawa (and I)
finally found that:

- There exists
- a polygon that
- folds to **3 boxes!!**

[Basic Idea] From a development of
2 boxes, we make **one more** box.

I put it at
<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>



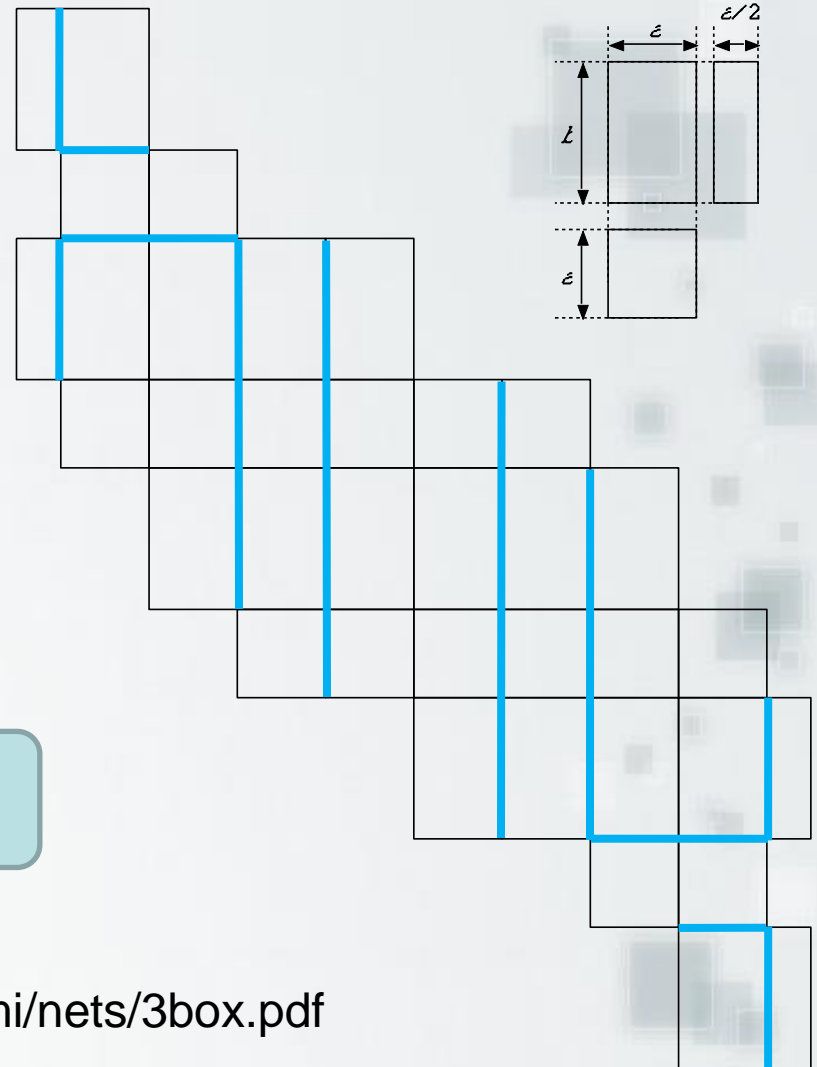
Developments of *three* boxes(!)

➤ In February 2012,
Shirakawa (and I)
finally found that:

- There exists
- a polygon that
- folds to **3 boxes!!**

[Basic Idea] From a development of
2 boxes, we make **one more** box.

I put it at
<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>



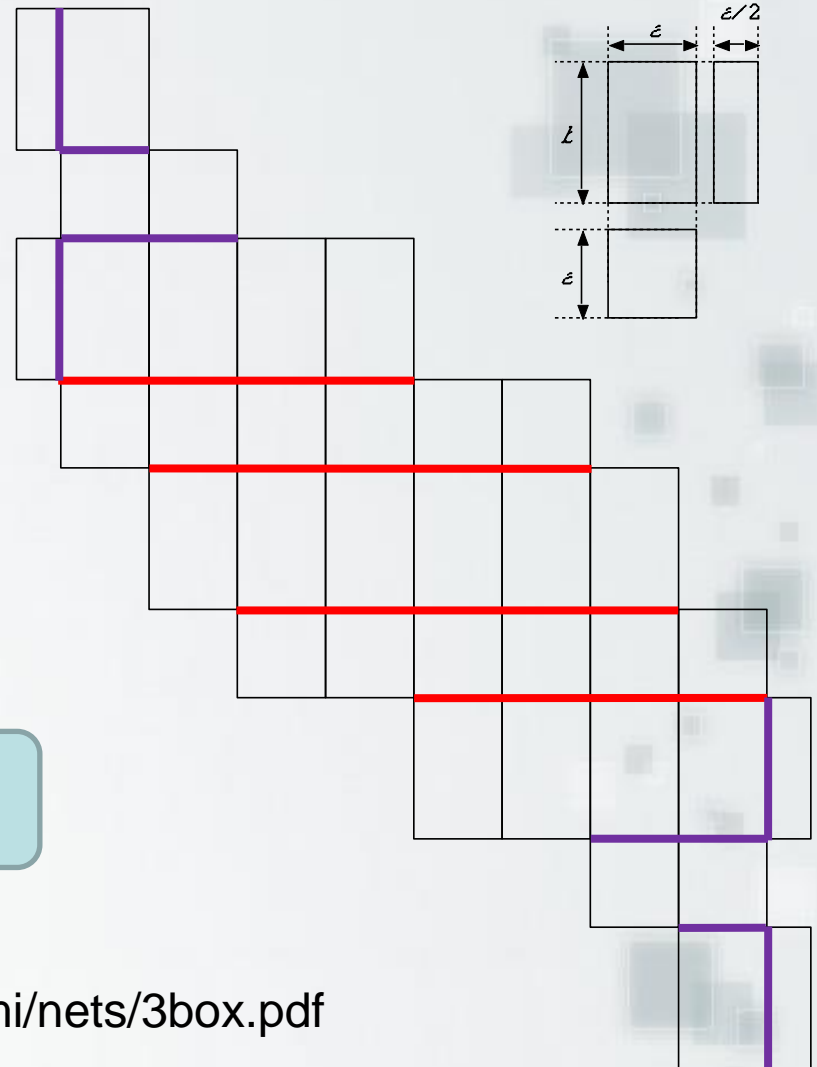
Developments of *three boxes*(!)

➤ In February 2012,
Shirakawa (and I)
finally found that:

- There exists
- a polygon that
- folds to **3 boxes**!!

[Basic Idea] From a development of
2 boxes, we make **one more** box.

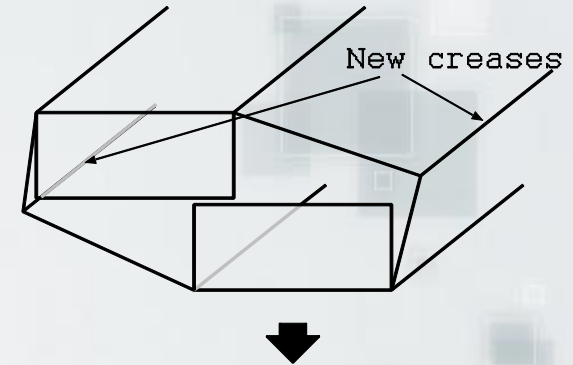
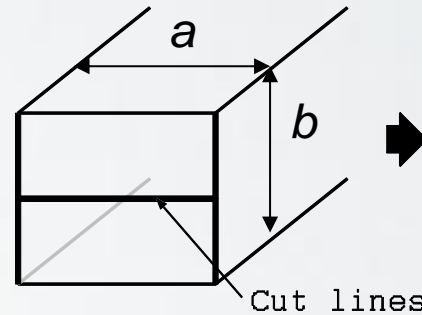
I put it at
<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>



Developments of *three* boxes(!)

In February 2012,
Shirakawa (and I)
finally found that:

- There exists a polygon that folds to **3 boxes!!**



One more box
is obtained by
this *squashing!*?

[Basic Idea] From a development of
2 boxes, we make **one more** box.

[No!!]
This works iff $a=2b$, i.e.,
from 1×2 square to 2×1 square

I put it at

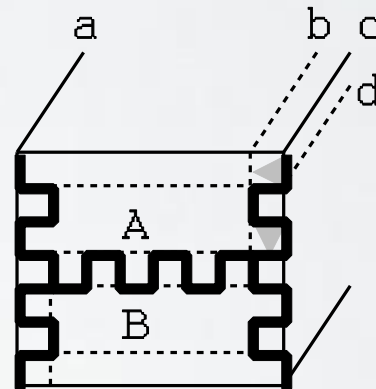
<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>

Developments of *three* boxes(!)

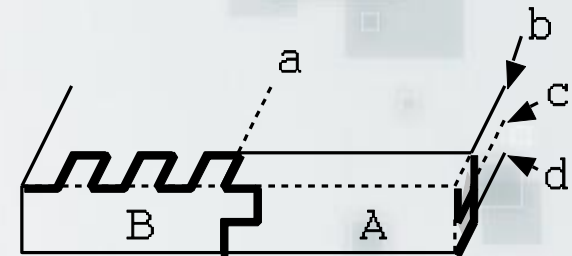
➤ In February 2012,
Shirakawa (and I)
finally found that:

- There exists
- a polygon that
- folds to **3 boxes!!**

[Basic Idea] From a development of
2 boxes, we make **one more** box.



(a)



(b)

[Yes... with a trick!]
This idea works;
move a part of
the lid to 4 *sides*!

I put it at

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>

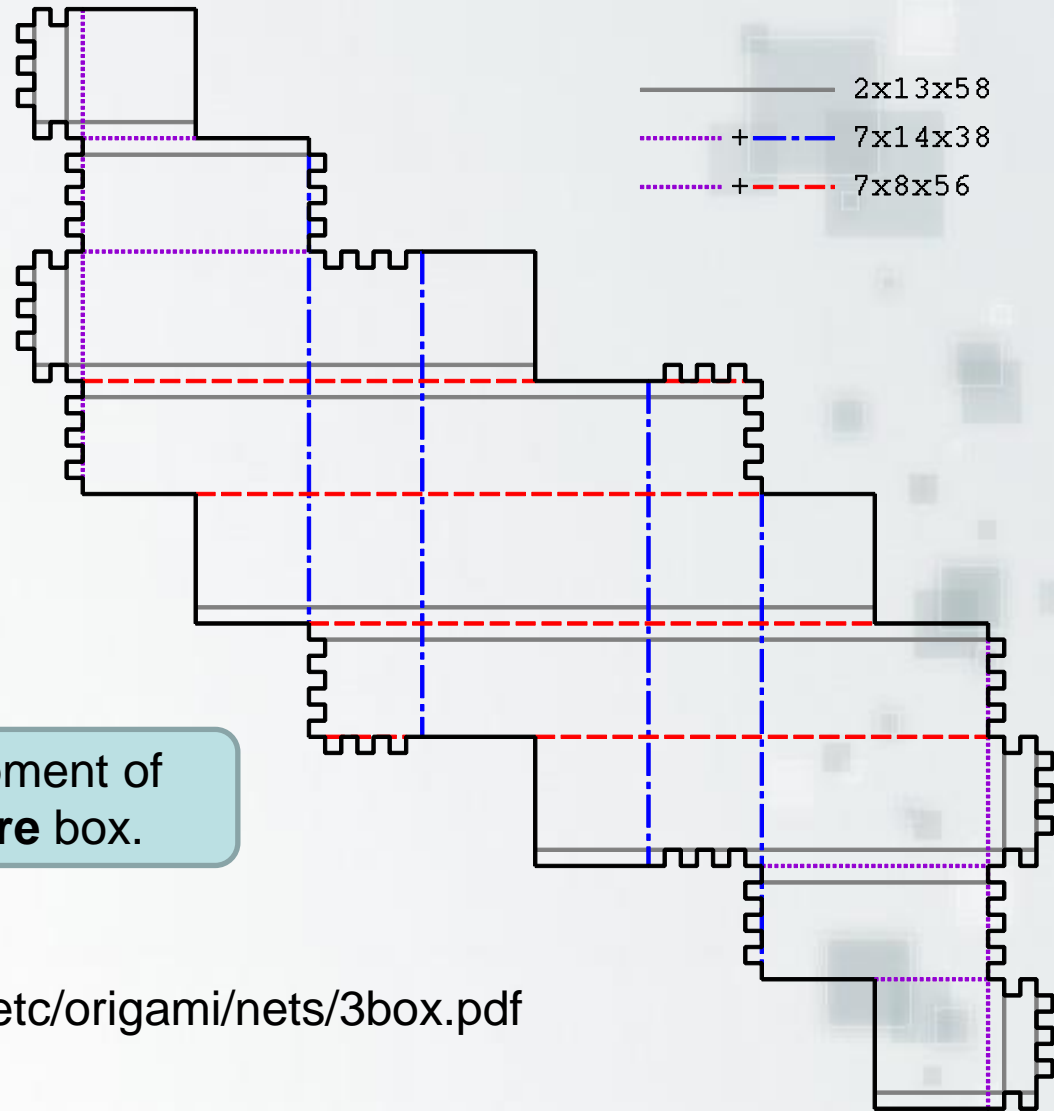
Developments of *three* boxes(!)

➤ In February 2012,
Shirakawa (and I)
finally found that:

- There exists
- a polygon that
- folds to **3 boxes!!**

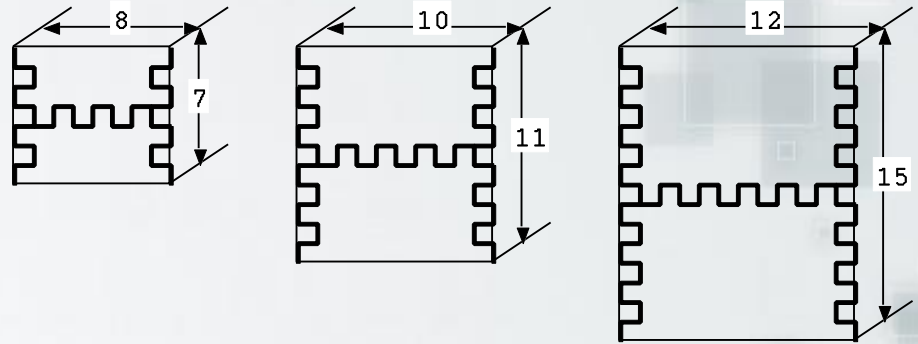
[Basic Idea] From a development of
2 boxes, we make **one more** box.

I put it at
<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>



Developments of *three boxes*(!)

In February 2012,
Shirakawa (and I)
finally found that:



- There exists a polygon that folds to **3 boxes**!!

[Theorem]
There exist an infinite number of polygons that fold into 3 different boxes.

- [Generalization]
- Basic box is flexible for the edge lengths.
 - Zig-zag pattern can be extended.

I put it at
<http://www.jaist.ac.jp/~uehara/etc/origami/nets/3box.pdf>

Future works

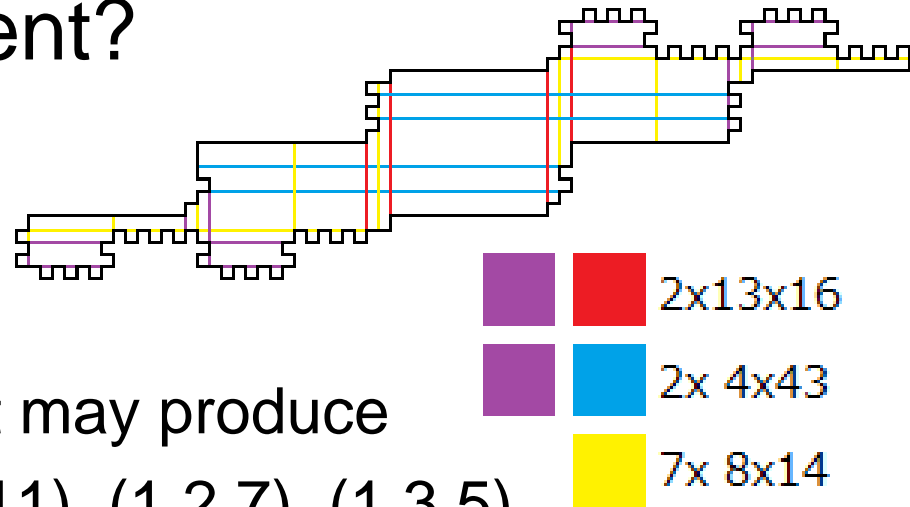
Smallest development?

The current “smallest” development requires **532** squares.

>> the smallest area **46** that may produce three boxes of size $(1,1,11)$, $(1,2,7)$, $(1,3,5)$.

(Remind:

2263 polygons of area **22** folding to $(1,1,5)$, $(1,2,3)$)

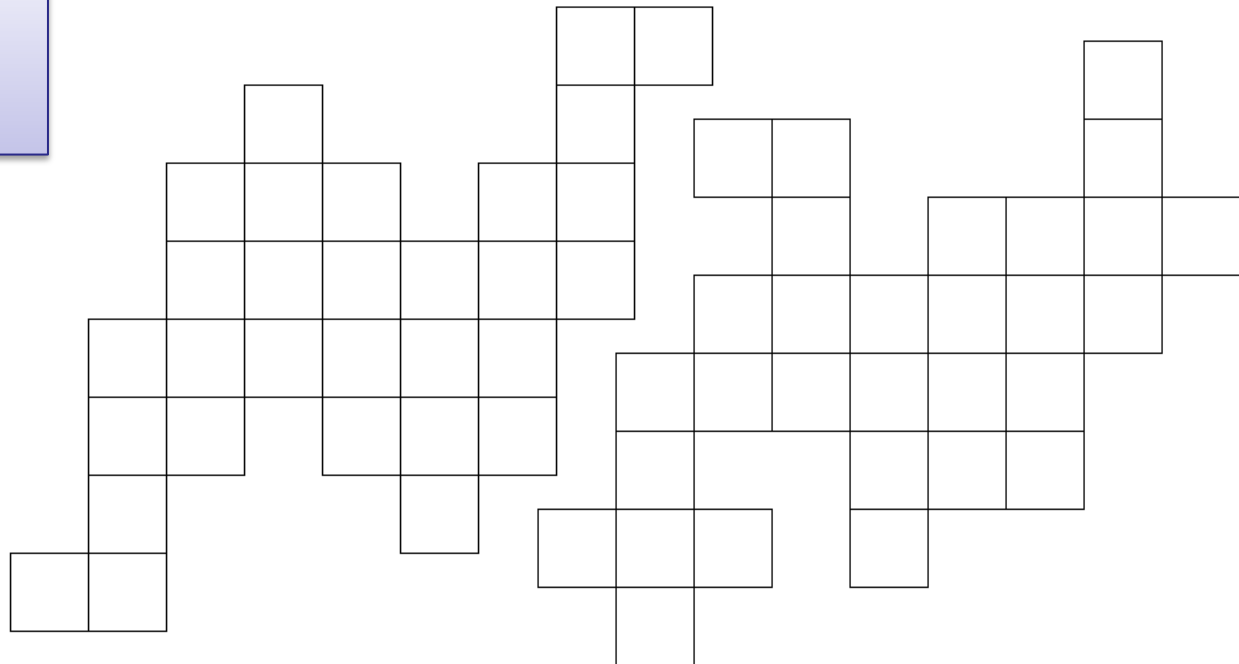


Is there a polygon that folds to 4 or more boxes?

2012年10月23日：白川さんからのメール

「面積30で、 $1 \times 1 \times 7$ と $\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$ の2通りの箱を折れる展開図を見つけました。この面積は $1 \times 3 \times 3$ も作れるので、斜めを許した場合3通りの箱が折れる最小のポリオミノになる可能性があります。」

おまけ問題：
2通り折ってみよう



Note:

Surface areas;

If you try to find for three boxes,

If you try to find for four boxes,

Area	Trios	Area	Trios
22	(1,1,5),(1,2,3)	46	(1,1,11),(1,2,7),(1,3,5)
30	(1,1,7),(1,3,3)	70	(1,1,17),(1,2,11),(1,3,8),(1,5,5)
34	(1,1,8),(1,2,5)	94	(1,1,23),(1,2,15),(1,3,11), (1,5,7),(3,4,5)
38	(1,1,9),(1,3,4)	118	(1,1,29),(1,2,19),(1,3,14), (1,4,11),(1,5,9),(2,5,7)

known results

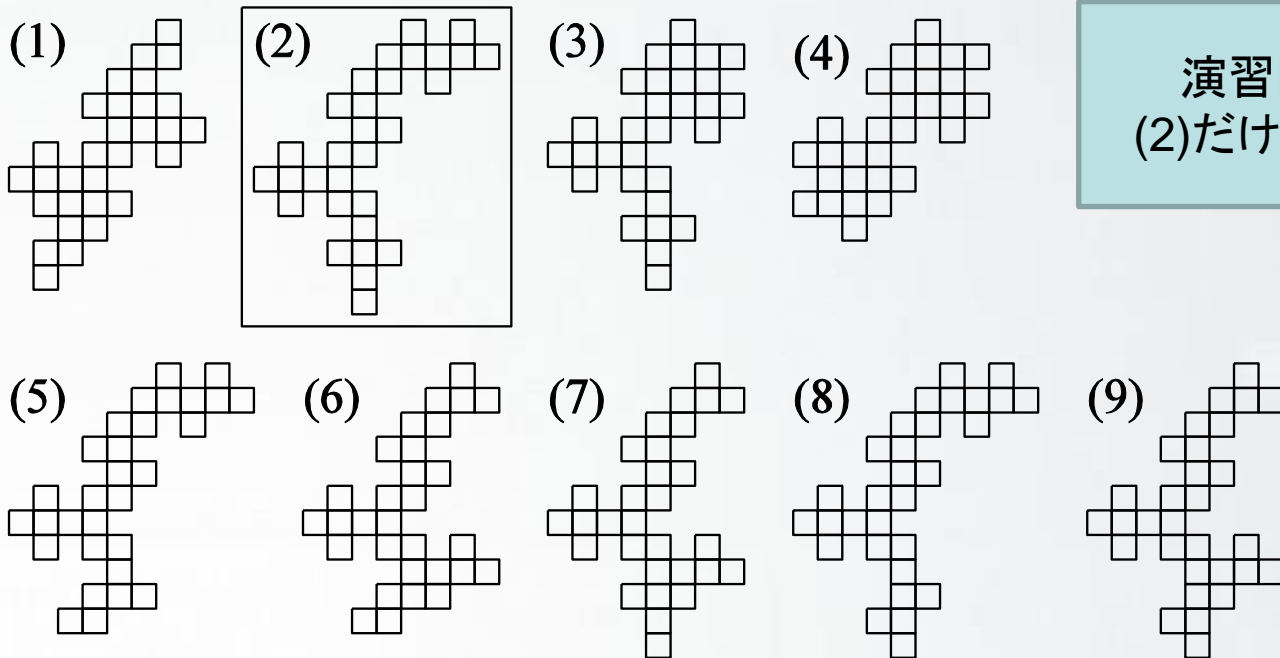
面積30は微妙な数字...

2011年当時の松井君のプログラム:

- 面積22の展開図を全探索:
 - $1 \times 1 \times 5$ と $1 \times 2 \times 3$ の箱を折る2263個の展開図
- 実行時間はパソコンで10時間

Dawei君の結果(2014年6月)

- 面積30の展開図の全探索に成功！(詳細は近日公開)
- 大雑把な結果
 - JAISTのスパコン(Cray XC 30)で二ヶ月
 - $1 \times 1 \times 7$ の箱と $1 \times 3 \times 3$ の箱が折れる共通の展開図は1076個
 - そのうち、 $\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$ の三つ目の箱が折れる展開図は9個



複数の凸多面体を折る 展開図の研究

上原 隆平

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科教授

第11回 組合せ最適化セミナー 二日目

2014年7月31日

演習問題

展開図の簡単な歴史

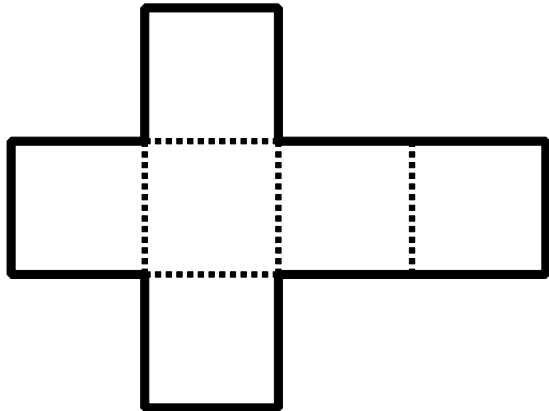
ポイント: 展開図に関してわかっていることは、ほとんどない

本研究の興味の対象:

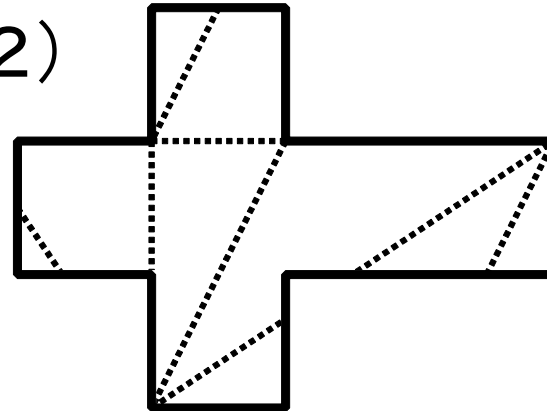
- 多角形Pが与えられたとき、Pから折ることのできる(凸)多面体Qの特徴づけ・アルゴリズム
- (凸)多面体Qが与えられたとき、展開して得られる多角形Pの特徴づけ・アルゴリズム

演習問題1: 何が折れるでしょう？

(1)



(2)



ちなみにこの「ラテンクロス」からは85通りで23種類の異なる多面体が折れることが知られている。

1. 展開図の基礎知識：演習問題2

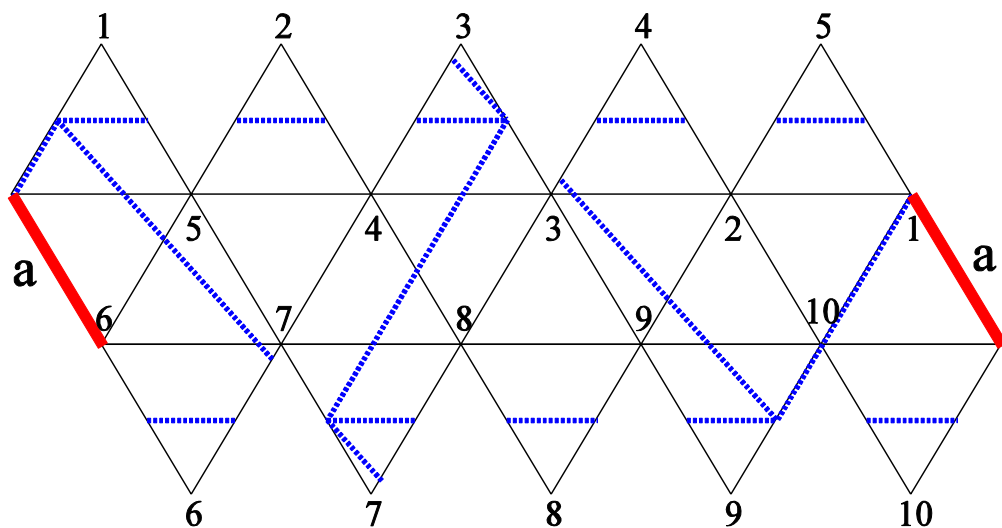
正多面体の一般展開図の最短カットの長さはいくら？

- 正4面体にはわりと美しい最適解があります
 - 最適解とその証明ができればなおよし
- 正8面体と正6面体
 - 最適解を見つけるのは、なんとかなると思う
 - 最適性を示すのは、手間がかかります
- 正20面体と正12面体
 - 最適解を見つけるのはちょっと大変かも

Introduction

惜しい! 例たち(上原2010)

演習問題3



正20面体 \Leftrightarrow 4単面体

以下の共通の展開図を
考えてみよ. どのくら
い正多面体に近い
か検討せよ.

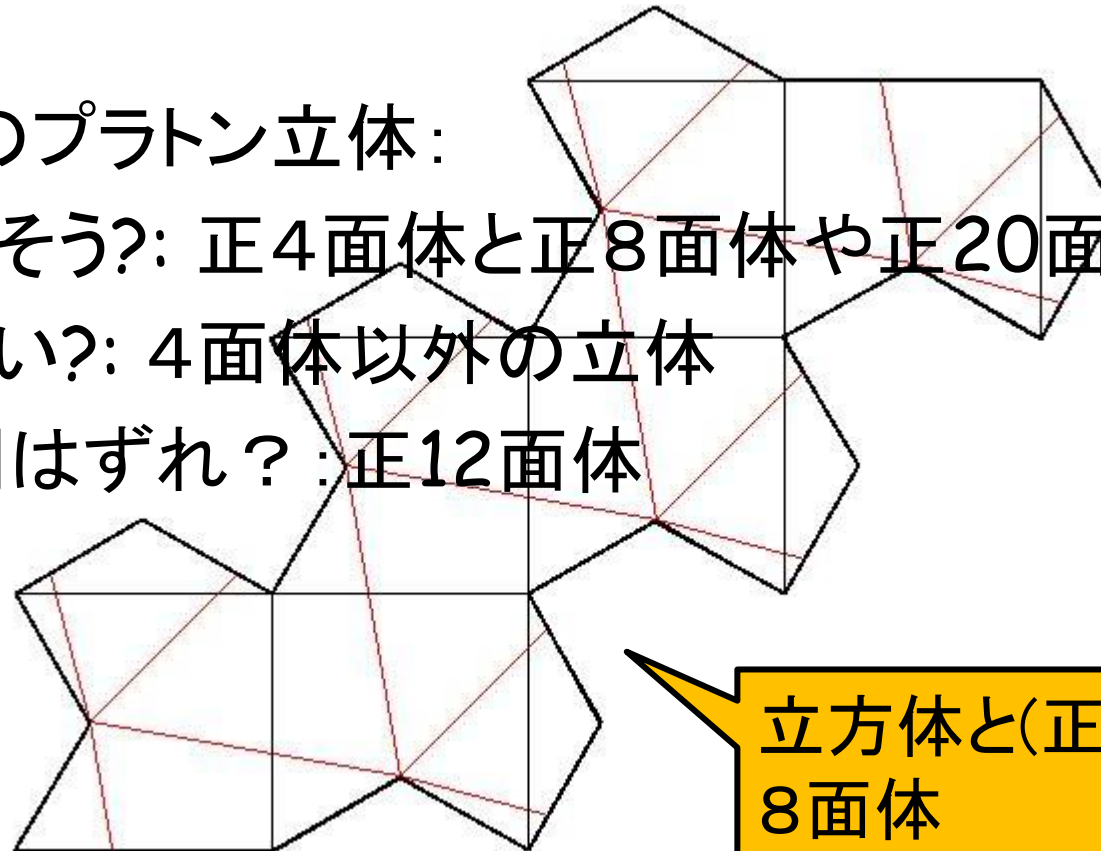
- 立方体 \Leftrightarrow 4単面体
- 八面体 \Leftrightarrow 4単面体

未解決問題

- [実験的な観測/予想] **定理** した「フラクタル曲線」は、 l_1 の値の連分数展開の係数によって決まる

- その他のプラトン立体:

- できそう?: 正4面体と正8面体や正20面体
- 難しい?: 4面体以外の立体
- 仲間はずれ?: 正12面体



このあたりなら、
多少はできそう

立方体と(正じゃないけど)
8面体

未解決問題

(一般化)ピラミッド問題

入力: 周囲にペタルのついた n 角形

問題1: ここから n 角錐(ピラミッド)が折れるか? **OK!**

問題2: ピラミッドにならない場合,

問題2-1: 凸多面体が折れるか? **Good!** $O(n^3)??$

問題2-2: 体積最大の立体が折れるか? **So so (改善の余地?)**

メタ問題2: 二つの問題の解は違うのか?

メタ²問題2: 二つの問題の解が同じになるのはどんなときか? **未解決問題**

底面が凸 n 角形
であることを使っ
てない

演習問題5: 凹 $>$ 凸となる具体例を示せ
未解決問題: メタ問題たちを解け

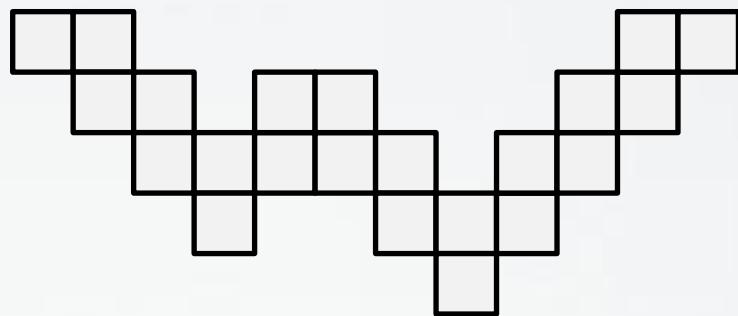
箱を折る問題：

➤ 演習問題6：

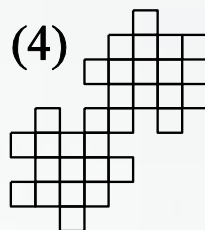
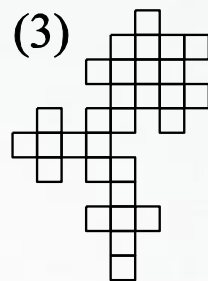
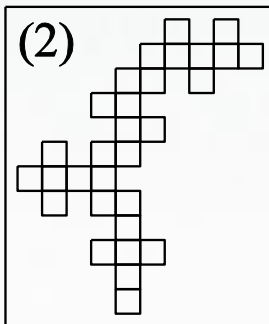
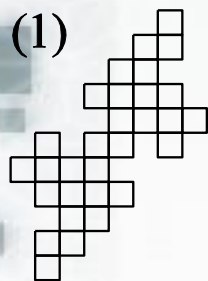
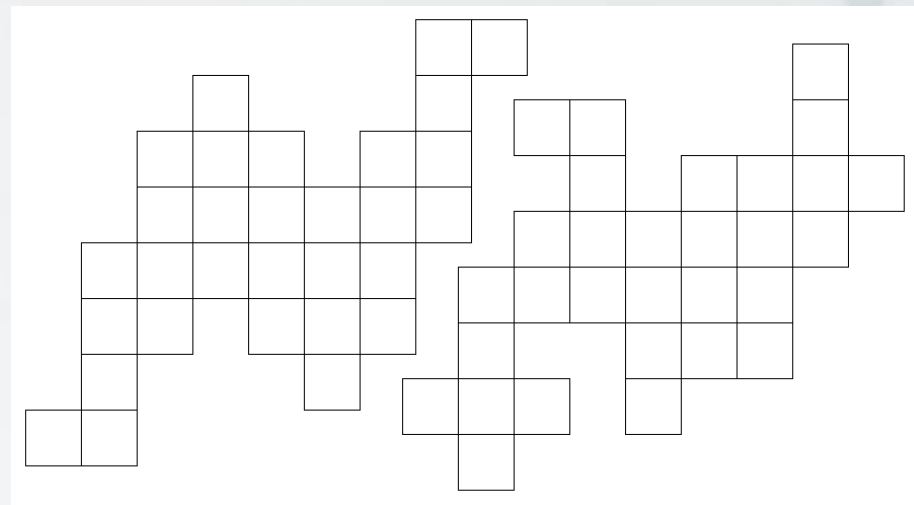
箱を折る展開図を構成するとき，暗に展開図の中に切込みが入ってないと仮定している．実は一般性を失うことなく，これを仮定してよい．なぜか？

おまけ問題たち：箱を折る

2通り. ただし斜めが必要



3通り. ただし一つはちょっとずるい



どれも3種類.
演習問題7:(2)だけどう特別なのか?

