カルマンフィルタとその応用

情報システム数理学Ⅱ　水田 敏崇

2006 年 2 月 16 日

1　序

本修士論文では, ノイズを含んだ時系列信号の観測モデルを数式化し, 離散時間確率システムのフィルタリング問題を考察した. 線形モデルについて, 最小 2 乗推定量と同様の計算方法を用いて非ガウス型モデルのカルマン・フィルタを導いた. また非線形ガウス型モデルについての事後確率密度を最大とする推定量を, 2 点境界値問題の解として構成した.

2　フィルタリング

時間パラメータ k は $\{0,1,2,\cdots\}$ 上を動くものとする. n 次元確率ベクトルの列 $\{x(k)\}$ が信号過程であるとは, 時刻 $k+1$ における信号 $x(k+1)$ が直前の過去における信号 $x(k)$ に雑音が加わって定まる確率過程で次のように与えられるものをいう.

$$x(k+1) = f(x(k),k) + G(k)w(k)$$

但し, f は $\mathbb{R}^n \times \{0,1,2,\cdots\} \to \mathbb{R}^n$ なるベクトル値関数, $w(k)$ は雑音を表す m 次元確率ベクトルの列, $\{G(k)\}$ は $n \times m$ 定行列であり, $m \leqq n$ とする. また, $x(0)$ はガウス型のランダムベクトルであり, $E\left[x(0)\right] = \bar{x}_0$, $E\left[x(0)x'(0)\right] = P(0)$ である. 次に, 信号 $\{x(k)\}$ の測定過程を

$$y(k) = h(x(k),k) + v(k)$$

で定義する. ここに, h は $\mathbb{R}^n \times \{0,1,2,\cdots\} \to \mathbb{R}^p$ なるベクトル値関数であり測定器に相当する. $v(k)$ は測定誤差を表す p 次元確率ベクトルの列である.

さらに, 雑音 $\{w(k)\}$, $\{v(k)\}$ はガウス型のランダムベクトルであり平均は

$$E\left[w(j)\right] = 0\ ,\ E\left[v(j)\right] = 0$$

共分散は

$$\begin{aligned} E\left[w(j)w'(k)\right] &= Q(k)\delta_{jk} \\ E\left[v(j)v'(k)\right] &= R(k)\delta_{jk} \\ E\left[w(j)v'(k)\right] &= 0 \end{aligned}$$

で与えられるものとする. ただし, δ_{jk} はクロネッカーのデルタ, w' は転置行列である.

時刻 k までの観測量 $y_0,\cdots,y_k$ が得られたときに, システムの状態 x_k を推定する. フィルタリングとは, 測定値 $y_0,\cdots,y_k$ から最適な推定量 $\hat{x}_k$ を与える関数

$$\hat{x}_k = F_k(y_0,\cdots,y_k)$$

を理論的に決定することである.

3　カルマン・フィルタ

時間パラメータ k は $\{0,1,2,\cdots\}$ 上を動くものとする. 本章では, n 次元確率ベクトルの列 $\{x(k)\}$ が信号過程であり, 次で与えられるものを扱う.

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k$$

但し, $\{A_k\}$: $n \times n$ 定数行列の列, u_k は雑音を表す r 次元確率ベクトルの列, $\{B(k)\}$ は $n \times r$ 定行列であり, $m \leqq n$ とする. また, 信号 $\{x(k)\}$ の測定過程が,

$$y_k = C_k x_k + w_k$$

で与えられているものを扱う. ここに, $\{C_k\} : m \times n$ 定数行列の列 とする. w_k は測定誤差を表す m 次元確率ベクトルの列である.

さらに, 雑音 $\{u(k)\}$, $\{w(k)\}$ はランダムベクトルであり平均は

$$E\left[u_j\right] = \bar{u}_j\ ,\ E\left[w(j)\right] = w_j$$

共分散は

$$\begin{aligned} E\left[u(j)u'(k)\right] &= U_k\delta_{jk} \\ E\left[w(j)w'(k)\right] &= W_k\delta_{jk} \\ E\left[u(j)w'(k)\right] &= 0 \end{aligned}$$

とする. また, $\{u_k\}$ と $\{w_k\}$ は互いに独立な確率過程であり, x_0 は $\{u_k\}$, $\{w_k\}$ と独立である.
時刻 k までの観測量 $y_0,\cdots,y_k$ が得られたときに, 時刻 k' におけるシステムの状態 $x_{k'}$ を推定する.

定理 3.1 信号 x_k の最小二乗推定量 $\hat{x}_k$ は,

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + P_k C_k' W_k^{-1}\{y_k - (C_k\tilde{x}_k + \bar{w}_k)\}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_k = A_{k-1}\hat{x}_{k-1} + B_{k-1}\bar{u}_{k-1}\\
&P_k = (M_k^{-1} + C_k W_k^{-1} C'k)^{-1}\\
&M_k = A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}' + B_{k-1}U_{k-1}B_{k-1}'\\
&\tilde{x}_0 = \bar{x}_0\\
&M_0 = X_0
\end{aligned}$$

である.

こうして得られた $\hat{x}_k$ をカルマン・フィルタという.

4　極値問題によるアプローチ

4.1　事後確率と二点境界値問題

$x'Ax = \|x\|_A^2$ とする. 第 2 章で導入したシステムについて, 次が成り立つ.

定理 4.1 事後確率密度 $p_{x_k|y_k}(x_0,\cdots,x_k|y_0,\cdots,y_k)$ を最大にする推定量 $\hat{x}(0|n),\cdots,\hat{x}(n|n)$ は以下の方程式を満たす.

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k+1|n) &= f(\hat{x}(k|n),k) + G(k)Q(k)G'(k),\\
&\qquad k = 0,\cdots,n-1,\\
\lambda_n(k-1) &= F_x'(\hat{x}(k|n),k)\lambda_n(k)\\
&\qquad + H_x'(\hat{x}(k|n),k)R^{-1}(k)\\
&\qquad \cdot [y(k) - h(\hat{x}(k|n),k)],\ k = 1,\cdots,n,\\
\hat{x}(0|n) &= \bar{x}_0 + P(0)H_x'(\hat{x}(0|n),k)R^{-1}(0)\\
&\qquad \cdot [y(0) - h(\hat{x}(0|n),k)]\\
&\qquad + P(0)F_x'(\hat{x}(0|n),k)\lambda_n(0)\\
\lambda_n(n) &= 0
\end{aligned}$$

4.2　線形モデル

線形モデルの場合, 基本システムは以下で与えられる.

$$x(k+1) = F(k)x(k) + G(k)w(k),$$

$$y(k) = H(k)x(k) + v(k)$$

但し, $\{F_k\}: n\times n$ 定数行列の列, $\{H_k\}: p\times n$ 定数行列の列, これに 定理 4.1 を適用すれば, 境界値問題は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k+1|n) &= F(k)\hat{x}(k|n) + G(k)Q(k)G'(k)\lambda_n(k),\\
&\qquad\qquad k = 0,\cdots,n-1,\\
\lambda_n(k-1) &= F'(k)\lambda_n(k) + H'(k)R^{-1}(k)\\
&\qquad \cdot [y(k) - H(k)\hat{x}(k|n)],\quad k = 1,\cdots,n
\end{aligned}$$

境界条件は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\hat{x}(0|n) &= \bar{x}_0 + P(0)H'(0)R^{-1}(0)\\
&\qquad \cdot [y(0) - H(0)\hat{x}(0|n)] + P(0)F'(0)\lambda_n(0),
\end{aligned}$$

$$\lambda_n(n) = 0$$

境界値問題を解いて, $\hat{x}(0|n),\cdots,\hat{x}(k|n),\cdots,\hat{x}(n|n)$ を求めると以下が得られる.

定理 4.2 線形モデルの事後確率密度を最大にする推定量 $\hat{x}(0|n)\cdots\hat{x}(n|n)$ は,

$$\hat{x}(k|n) = \hat{x}(k|k) + C(k)F'(k)\lambda_n(k)$$

をみたす. ただし,

$$C(k) = [I + P(k)H'(k)R^{-1}(k)H(k)]^{-1}P(k)$$

$$P(k+1) = F(k)C(k)F'(k) + G(k)Q(k)G'(k),$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k|k) &= F(k-1)\hat{x}(k-1|k-1) + C(k)H'(k)R^{-1}(k)\\
&\qquad \cdot [y(k) - H(k)F(k-1)\hat{x}(k-1|k-1)]
\end{aligned}$$

$$\hat{x}(0|0) = \bar{x}_0 + C(0)H'(0)R^{-1}(0)\cdot[y(0) - H(0)\bar{x}_0]$$

である.

定理 4.3 定理 4.2 の推定量 $\hat{x}(0|0),\cdots,\hat{x}(n|n)$ はカルマン・フィルタに一致する.

参考文献

[1] 有本 卓, カルマンフィルター, 産業図書, (1977).

[2] Henry Cox,　On the Estimation of State Variables and Parameters for Noisy Dynamic Systems,　IEEE Transactions on Automatic Control, (1964), 5-12.

[3] Kazuhumi Ito and Kaiqi Xiong,　Gaussian Filters for Nonlininear Filtering Problems,　IEEE Transactions on Automatic Control, (2000), 910-927.