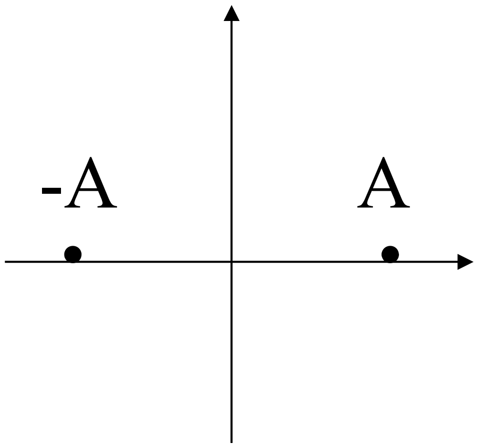
10. デジタル変復調と誤り率特性

10.1 2値PSKの誤り率特性の導出

送信信号

$$s(t) = A\cos\{2\pi f_c t + \theta(t)\}$$

$\theta(t)=0,\pi$



$$s(t) = \begin{cases} A\cos 2\pi f_c t & \text{:1を送信する場合} \\ -A\cos 2\pi f_c t & \text{:0を送信する場合} \end{cases}$$

狭帯域雑音(白色ガウス雑音:AWGN)

$$n(t) = x(t)\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t$$

$x(t)$、$y(t)$:ガウス変数

（雑音は一般にガウス分布で扱われる）

BPSK受信信号

$$s(t) = A\cos\{2\pi f_c t + \theta(t)\} + n(t)$$

$$= \{A\cos\theta(t) + x(t)\}\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t$$

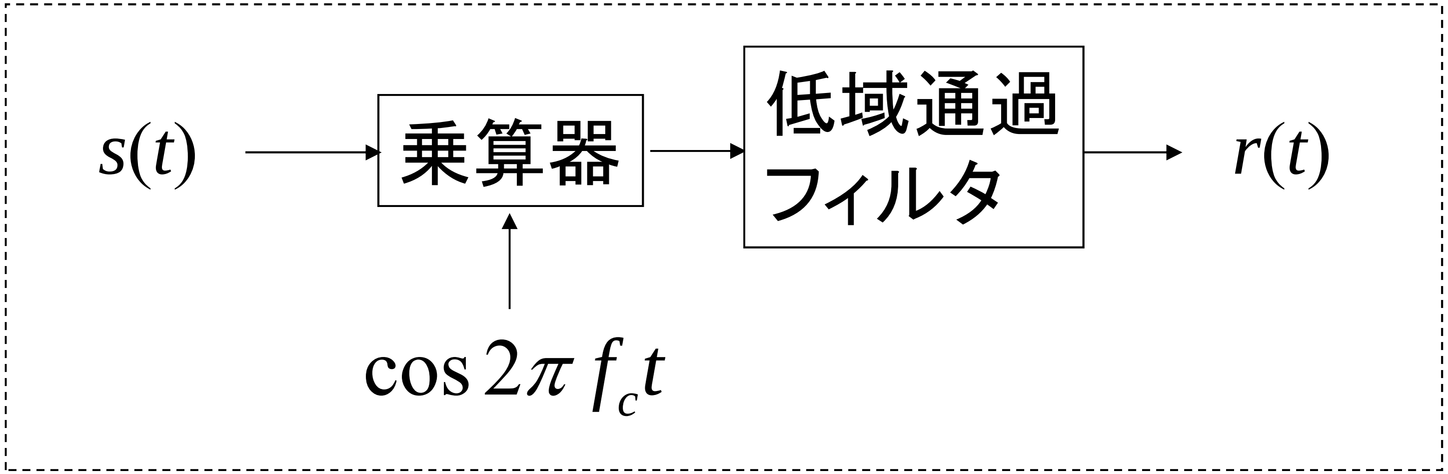
$\theta(t)=0,\pi$

同期検波後の信号

$$r(t) = s(t) \times \cos 2\pi f_c t$$

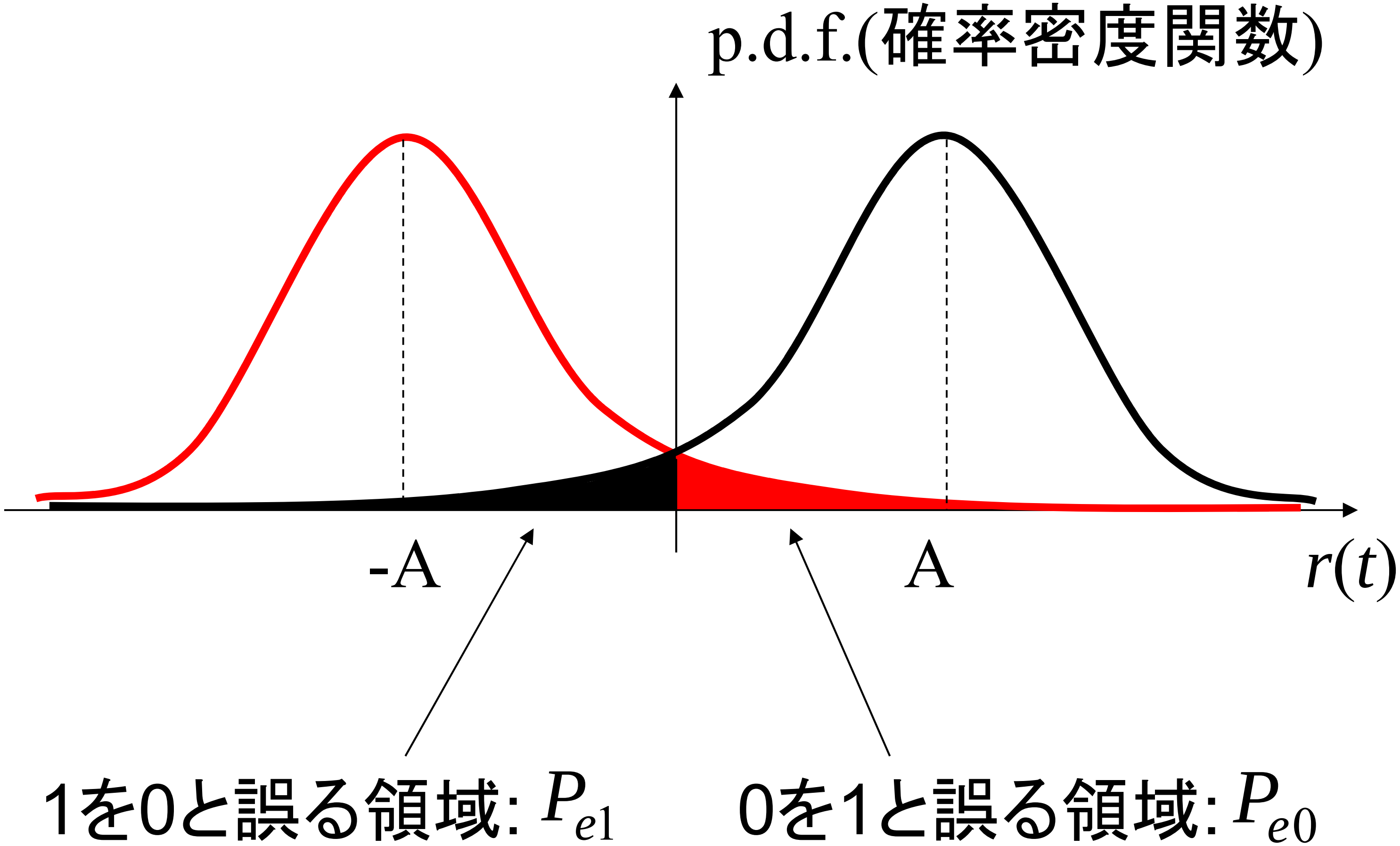
$$= \underbrace{A\cos\theta(t) + x(t)}_{\text{LPF出力}}$$

雑音の直交成分がなくなっていることに注目



同期検波器

$r(t)$の確率分布(ガウス雑音)



誤り率の計算

$$P_e = \frac{1}{2}P_{e1} + \frac{1}{2}P_{e0}$$

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2}dt$$

対称性と誤差補関数を用いると

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{(x(t)+A)^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{A^2}{2\sigma^2}}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma})$$

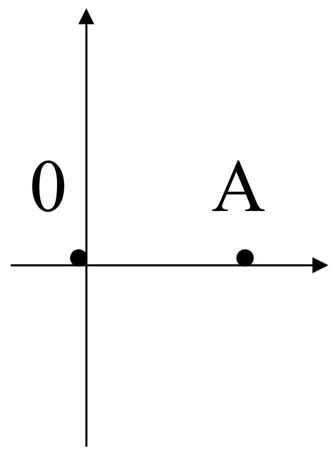
SNR

10.2 2値OOKの誤り率特性の導出

送信信号

$$s(t) = A \times d(t) \cos 2\pi f_c t$$

$d(t)=0,1$



$$s(t) = \begin{cases} A\cos 2\pi f_c t & :1を送信する場合 \\ 0 & :0を送信する場合 \end{cases}$$

光通信（パルス通信で用いられる）

狭帯域雑音(白色ガウス雑音:AWGN)

$$n(t) = x(t)\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t$$

$x(t)$、$y(t)$:ガウス変数

（雑音は一般にガウス分布で扱われる）

OOK受信信号

$$s(t) = A\times d(t)\cos 2\pi f_c t + n(t)$$

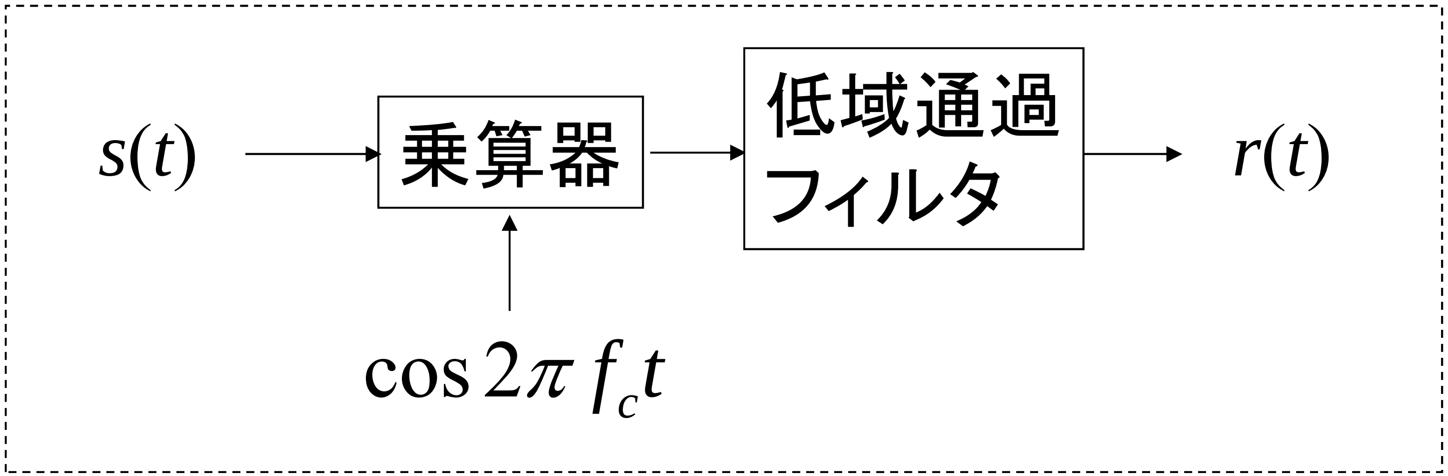
$$= \{A\times d(t) + x(t)\}\cos 2\pi f_c t - y(t)\sin 2\pi f_c t$$

$d(t)$=0,1

同期検波後の信号

$$r(t) = s(t) \times \cos 2\pi f_c t$$
$$= \underbrace{A \times d(t) + x(t)}_{\text{LPF出力}}$$

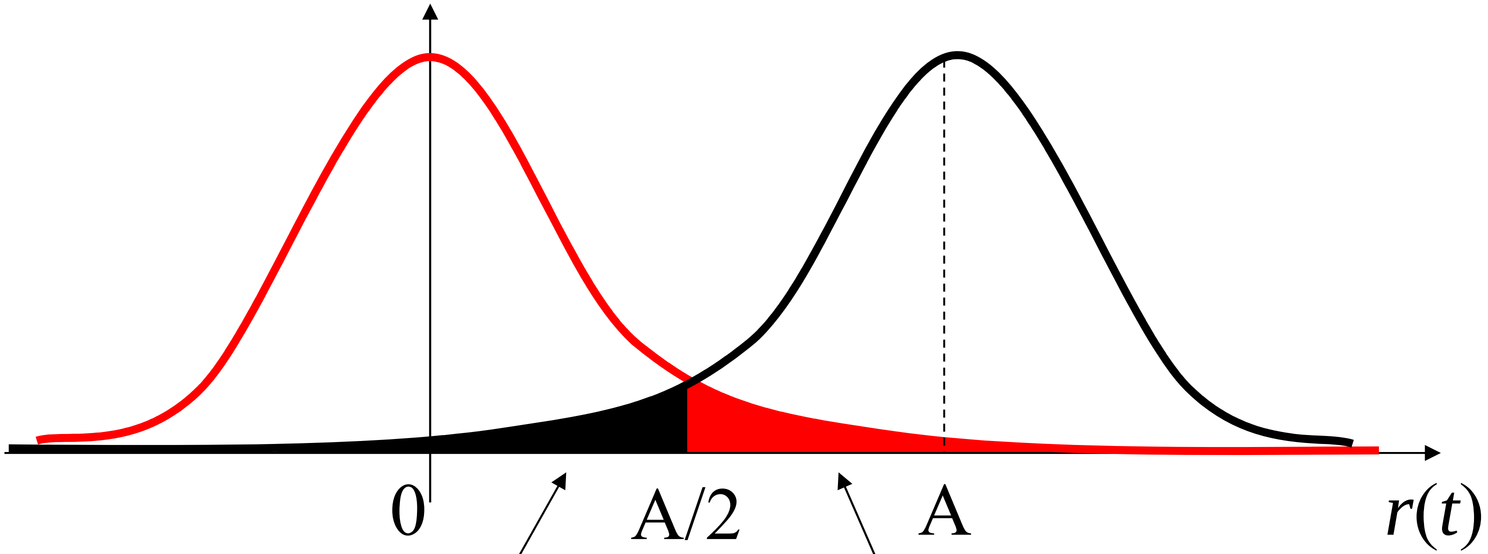
雑音の直交成分が
なくなっていることに注目



同期検波器

$r(t)$の確率分布（ガウス雑音）

p.d.f.(確率密度関数)



1を0と誤る領域: P_{e1}　　0を1と誤る領域: P_{e0}

誤り率の計算

$$\mathrm{erfc}\,x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt$$

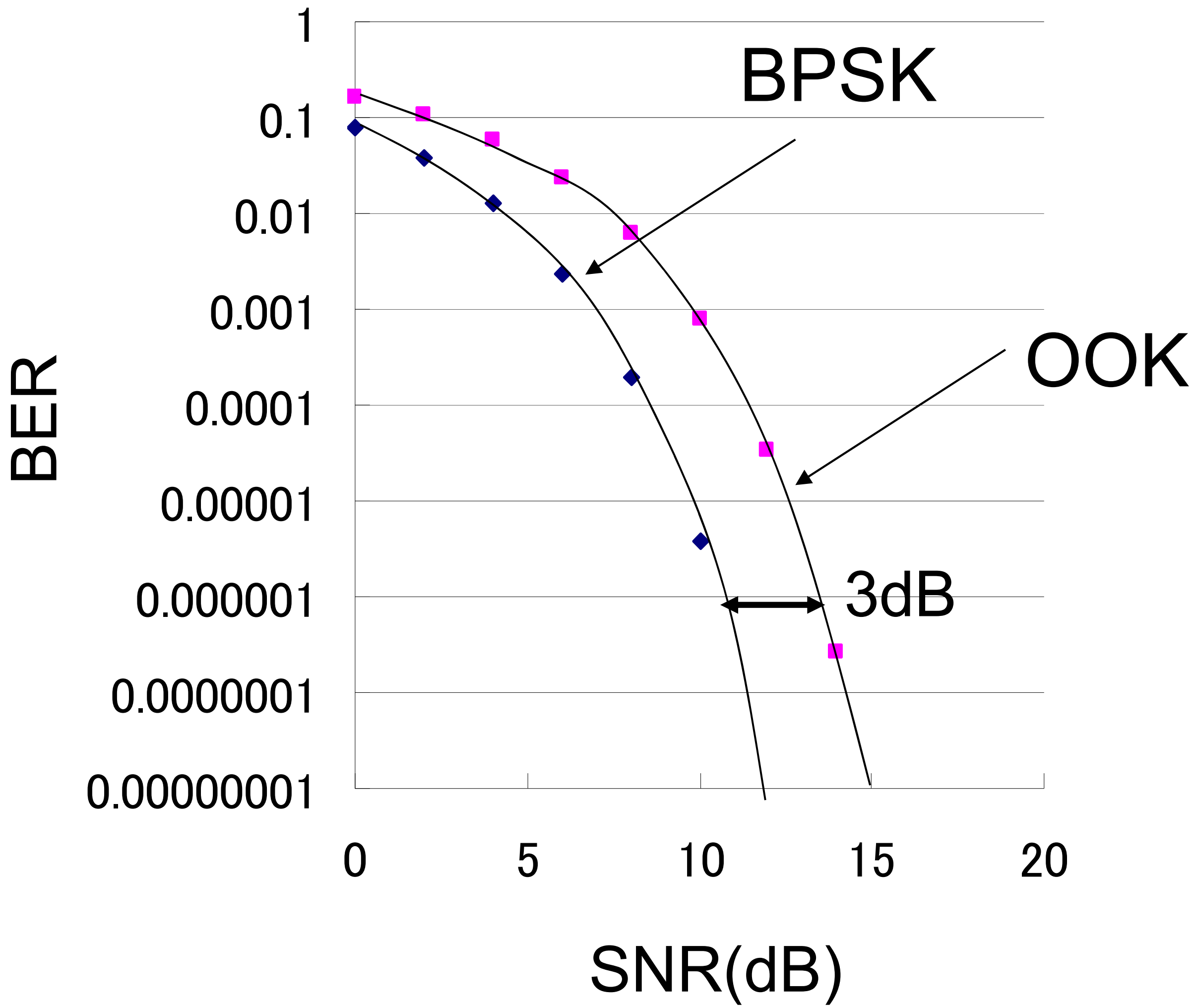
$$P_e = \frac{1}{2}P_{e1} + \frac{1}{2}P_{e0}$$

対称性と誤差補関数を用いると

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{A/2}^{\infty}\exp(-\frac{x(t)^2}{2\sigma^2})dx$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma}) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(\sqrt{\frac{A^2}{8\sigma^2}}) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(\sqrt{\frac{\gamma}{2}})$$

10.3 BER特性



BER
1
0.1
0.01
0.001
0.0001
0.00001
0.000001
0.0000001
0.00000001
0
5
10
15
20
SNR(dB)
BPSK
OOK
3dB

補足説明

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x(t)+A)^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

$t = \dfrac{x(t)+A}{\sqrt{2}\sigma}$ とすると積分範囲は $\dfrac{A}{\sqrt{2}\sigma} \sim \infty$ となる

また $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}$ より $dx = \sqrt{2}\sigma dt$

従って $P_e = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{A/\sqrt{2}\sigma}^\infty \exp(-t^2)\sqrt{2}\sigma dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{A/\sqrt{2}\sigma}^\infty \exp(-t^2)dt = \frac{1}{2}erfc\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$