

県民の皆様には統計を身近に感じていただくためのページです。

随時、色々な統計に関する話題・データを紹介します。

「モンティ・ホール問題」を御存じですか？～不思議な”確率”の話～

統計と深く関わりのある概念の一つに「確率」があります。「降水確率」や「正答(確率)」のように日常的に使用されている身近な「確率」ですが、「サイコロの出る目の確率はそれぞれ $1/6$ 」といった「古典的確率」のほかに、「事後確率(逆確率又はベイズ確率とも)」と呼ばれるものがあります。「事後確率」の解釈では、常識的(と感じる)答えとは異なる結果になることがあります。

今回はその一例として、アメリカ国内で本職の数学者まで巻き込んで大論争を引き起こした、「モンティ・ホール問題」を紹介したいと思います。

この問題は、元はアメリカのTV番組で実際に行われた懸賞ゲームでした。その内容は以下の通りです。

あなたの前には3つの部屋の扉があります。部屋のうち2つにはヤギが、1つには新車の鍵が入っています。あなたは3つの扉のうちの1つを選び、部屋の中の物(新車又はヤギ)を貰うことができます。



あなたが扉を選ぶと、司会者のモンティ・ホール氏は残る2つの部屋のうち1つの扉を開けます。開けた部屋の中には必ずヤギが入っています。



ここで、ホール氏からあなたに次のような提案がなされます。

「今、あなたが選んだ扉を、まだ開いていないもう一つの扉に変更することができます。あなたは扉を変更しますか？」

最初にこの問題の回答を示したのはコラムニストのマリリン・ボス・サヴァントでした。彼女は1990年に自身のコラムの読者から質問を受け、「扉を変更したほうが扉を変更しない場合に比べて当選確率が2倍になる」と答えました。すると、全米から間違いを指摘する投書が1万通(うち約千通は数学等の博士号取得者)も届きました。

反論者たちの回答は、「扉を変えても変えなくても当選確率は2分の1で等しい」というものでした。サヴァントはその後2回、手法を変えて説明しますが、彼女が「プロの数学者ではない」ことなどを理由に受け入れられません。

しかし、すでに普及しつつあったパーソナルコンピューターで数百回ものシミュレーションを行うなどした結果、サヴァントの主張が証明されたのです。

では、なぜ扉を変更したほうが変更しない場合に比べて、当選確率が2倍になるのでしょうか。以下でその理由を見ていくことにしましょう。

モンティ・ホール問題の条件を整理すると、以下の3つです。

- (1)車のキーは1つだけ。
- (2)ホール氏の開ける扉には必ずヤギが入っている。
- (3)変更できるのは残った扉のみ。

一番左の扉をA、真ん中をB、残りをCとして、最初にAの扉を選択したものとしてみます。

条件(1)については、おおよその印象通り、各扉とも1/3の確率で当選します。

条件(2)、(3)についてA・B・Cの当選確率を見ていくと、

ア Aに車のキーが入っていた場合、条件(2)でホール氏はそれぞれ1/2の確率でB又はCの扉を開けることができますが、どちらの扉が残っていても扉の選択を変更すれば必ず当選しません。よって、条件(2)の確率は無視できることとなり、扉を変更しない場合の当選確率は1、変更した場合の当選確率は0です。

イ Bに車のキーが入っていた場合、条件(2)でホール氏は選択済みのAと当選しているBを開けることができません。よってホール氏が開ける扉はCのみであり、残る扉は必ずBとなるため、扉を変更した場合には必ず当選します。よって扉を変更しない場合の当選確率は0、変更した場合の当選確率は1となります。

ウ Cに車のキーが入っていた場合、イと同様に残る扉が必ずCとなり、扉を変更した場合には必ず当選します。よって扉を変更しない場合の当選確率は0、変更した場合の当選確率は1となります。

条件(1)の確率に条件(2)・(3)のアからウの確率を掛けると、

扉を変更しない場合の当選確率 $= 1/3 \times 1 + 1/3 \times 0 + 1/3 \times 0 = 1/3$

扉を変更した場合の当選確率 $= 1/3 \times 0 + 1/3 \times 1 + 1/3 \times 1 = 2/3$

となります。最初にB又はCの扉を選択した場合であっても同様のことが言えます。

ということで、「扉を変更したほうが、変更しない場合に比べて当選確率が2倍になる」ことが正しいと判ります。

「事後確率」はベイズ統計学という分野で用いられます。ベイズ統計学及びその基礎となるベイズの定理は、20世紀後半に強力な計算機＝コンピューターが発展・普及したことにより多方面に利用されるようになりました。身近なところではYouTubeやamazonの「おすすめ」機能などに利用されています。

今回は、ちょっと不思議な「事後確率」の話でした。では、また、次回まで。



(参考)Wikipedia「モンティ・ホール問題(<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%A2%E3%83%B3%E3%83%86%E3%82%A3%E3%83%BB%E3%83%9B%E3%83%BC%E3%83%AB%E5%95%8F%E9%A1%8C>)」他