11　行列式の定義と基本的な性質（補遺）

拙著「線形代数学講義」では，行列式に帰納的な定義（定義 10.1）を採用し，そこから多重線形性を証明してある（定理 10.3）．多くの教科書の採用している置換を使った定義 (11.2) 式を行列式の定義としてとらなかったのには 2 つ理由がある．

- 実際の行列式の計算，および行列式の性質を調べるのには (11.2) はほとんど役に立たない．定理 10.3 がわかればよい．[1]
- (11.2) で定義をするためには，置換群に関しての準備が必要で，ほとんどの学生にとって，一生のうち，この定義でしか置換を使わないのに，巡回置換や互換，符号などと教えても，教わっても学生にも教師にもあまり実りがない．もし，置換群が必要であれば，線形代数でなくて群論でやればよい．

それでも，自分が習ったやり方で教えたいという人はたくさんいるし，数学科などでは，ここで群論の露払いの意味も込めて置換をやっておきたいという気持ちもわかるので，(11.2) の定義で始めて定理 10.3 を証明することを目的として，この補遺を作ることにした．

置換

1 から n までの数字を並び替えたものを n 次の**置換**（あるいは順列）という．その並び替えのルールを

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

で表す．つまり 1 を i_1 に，2 を i_2 にといったような並び替えを表す．ここで，$i_1, \dots, i_n$ には $1, \dots, n$ が 1 回ずつ現れる．

---

1 行列式の計算だけに興味がある場合にはこの証明も省いてしまってよいだろうという気持ちもあるので，節の最後に証明をいれた．

例 11.9　$n=2$ のとき，$1,2$ の並び替えは 2 通りしかなくて

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$$

である．$n=3$ のときは 3 次の置換は

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

の 6 個ある．

一般に n 次の置換は $n!$ 個ある．n 次の置換全体の集合を S_n と書く．

どの文字も動かさない置換 $\begin{pmatrix}1 & \dots & n\\1 & \dots & n\end{pmatrix}$ を**恒等置換**といい 1_n で表す．

$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix}$ を置換とする．このとき $\sigma(j)=i_j$ と書く．例えば，$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ であれば，

$$\sigma(1)=3,\ \sigma(2)=2,\ \sigma(3)=1$$

である．このように，置換は集合 $\{1,\dots,n\}$ から，それ自身への写像で $j \neq k$ なら $\sigma(j) \neq \sigma(k)$ が成り立つものといってもよい [2]．

σ, τ がともに n 次の置換であるとすると，σ と τ の**積**とよばれる新しい n 次の置換 $\sigma\tau$ が

$$\sigma\tau(j) = \sigma(\tau(j))$$

により定まる．

例 11.10　$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix} \in S_3$ ならば，

$$\sigma\tau(1)=\sigma(\tau(1))=\sigma(1)=3,\quad \sigma\tau(2)=\sigma(\tau(2))=\sigma(3)=2,\quad \sigma\tau(3)=\sigma(\tau(3))=\sigma(2)=1.$$

よって，

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

---

2 このような写像を全単射写像とよぶ（第 20 節参照）．

左辺をよく見て右辺を計算できるようにせよ．

問 11.4　次の置換の積を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

問 11.5　3 次の置換 τ, σ で $\tau\sigma \neq \sigma\tau$ をみたすものを一組あげよ．

σ を置換とするとき，$\tau\sigma = \sigma\tau = 1_n$ をみたす置換 τ がきまる．τ としては σ の逆の対応をとればよい．τ を σ の**逆置換**といい σ^{-1} と表す．

例えば, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ なら, 下の行から上の行を読んで $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ が σ の逆置換である．

問 11.6　$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の逆置換を求めよ．

次の性質はこれらの定義からほぼ明らかであろう．

命題 11.11　$\sigma, \tau, \rho \in S_n$ とする．

(i) $\sigma(\tau\rho) = \sigma(\tau\rho)$ (結合法則)

(ii) $1_n\sigma = 1_n\sigma$

(iii) $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = 1_n$

補注 11.12　上のような性質をみたす集合を**群**とよぶ．S_n は重要な群なので n 次**対称群**という名前がついている．

定義 11.13. n 次の置換 σ が $\{1, \ldots, n\}$ のうち，$j_1, \ldots, j_k$ 以外を動かさず $\sigma(j_1) = j_2, \sigma(j_2) = j_3, \ldots, \sigma(j_k) = j_1$ となるとき，

$$\sigma = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$$

と書く．このような置換を長さ k の**巡回置換**という．

例 11.14　$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (1, 5, 3)$ が成り立つ．これは $(5, 3, 1)$ のように始まりをどこから書いても同じものを表すとする．順番をかえた $(3, 5, 1)$ は別の置換になる．

問 11.7　$\sigma = (1, 3, 5), \tau = (2, 4) \in S_5$ とする．次を計算せよ．ただし σ^k は σ の k 個の積を表す．

(1) $\sigma\tau$　(2) $\tau\sigma$　(3) σ^3　(4) σ^{20}　(5) τ^5

2 つの巡回置換は同じ文字を含まないとき，互いに素であるという.

例 11.15 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_6$ とする．σ を互いに素な巡回置換の積として表すことができる．それにはまずひとつ数字をとる．例えば 1 をとる. そして 1 の行き先を追跡する.

$$\sigma(1) = 6,\ \sigma(6) = 3,\ \sigma(3) = 1.$$

あとはこれの繰り返しになる．このことを $1 \mapsto 6 \mapsto 3 \mapsto 1$ と略記する．ここにでてこない数字，例えば 2 をとると，$2 \mapsto 5 \mapsto 2$ であとは繰り返し．いままででてこなかった 4 は σ では動かないから，

$$\sigma = (1, 6, 3)(2, 5)$$

と書ける．この表し方はいろいろある.

この例のやり方を一般的に実行すると次の命題が証明できる.

命題 11.16 任意の置換は互いに素な巡回置換の積で表される.

長さ 2 の巡回置換を**互換**という.

$$(j_1, j_2, \ldots, j_k) = (j_1, j_k)(j_1, j_{k-1}) \cdots (j_1, j_3)(j_1, j_2)$$

が成り立つので，次の命題がえられる.

命題 11.17 任意の置換は互換の積で表される.

問 11.8 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ を互換の積で表せ.

例えば，

$$(1, 3)(2, 4) = (1, 4)(3, 4)(1, 2)(1, 4)$$

が成り立つので，互換の積に書く方法はひとつには決まらない．しかしながら，次の定理が成り立つ.

定理 11.18 置換 σ を互換の積で表すときに必要な互換の個数が偶数か，奇数かは σ によって決まる．その個数が偶数個のとき，σ は**偶置換**であるといい，その個数が奇数個のとき，σ は**奇置換**であるという.

証明．$x_1, \ldots, x_n$ を変数とし，多項式

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

を考える．$\sigma \in S_n$ に対して，新しい多項式 Δ^σ を

$$\Delta^\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \Delta(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

で定義する．Δ の定義から，

$$\Delta^\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \pm\Delta(x_1, \ldots, x_n).$$

特に，$\sigma = (i, j)$ ならば，$j > i$ として，σ で動く可能性のあるところだけとりだすと，

$$P_1 = \prod_{t=j+1}^{n} (x_t - x_i)(x_t - x_j)$$

$$P_2 = (x_j - x_{j-1}) \cdots (x_j - x_{i+1})$$

$$P_3 = (x_j - x_i)$$

$$P_4 = (x_j - x_{i-1}) \cdots (x_j - x_1)$$

$$P_5 = \prod_{t=i+1}^{j-1} (x_t - x_i)$$

$$P_6 = (x_i - x_{i-1}) \cdots (x_i - x_1)$$

で，σ で送ると，

$$P_1 \to P_1, P_2 \to (-1)^{j-i-1} P_5, P_3 \to -P_3, P_4 \to P_6, P_5 \to (-1)^{j-i-1} P_2, P_6 \to P_4$$

となる．よって $\Delta^{(i,j)}(x_1, \ldots, x_n) = -\Delta(x_1, \ldots .x_n)$ がわかった．さて，σ が互換の積に 2 通りに書けているとする．

$$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_s = \rho_1 \cdots \rho_u.$$

このとき，

$$\Delta^\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^s \Delta(x_1, \ldots .x_n) = (-1)^u \Delta(x_1, \ldots .x_n).$$

よって s と u の偶奇は等しい．　□

置換 σ の**符号** $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma\text{が偶置換のとき} \\ -1 & \sigma\text{が奇置換のとき} \end{cases}$$

で定義する．この符号の定義が例 11.10 の定義と一致していることを $n=2,3$ の場合に確かめてみよ．

この定義から $\sigma, \tau \in S_n$ なら

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$$

が成り立つことがわかる．

上の定理がわかってしまえば，長さ k の巡回置換は $k-1$ 個の互換の積として表されることがわかっているので，巡回置換に直した時点で符号を計算することができる．

問 11.9 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 6 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ の符号を計算せよ．

定義 11.19. n 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ に対して，行列式 $\det A$ を

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

で定義する．

このように定義すれば，定理 10.3 は比較的簡単に証明できる．

定理 10.3 の証明. $\boldsymbol{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$ と書く．

(D1) $\boldsymbol{b}_i = \begin{bmatrix} b_{i1} & \dots & b_{in} \end{bmatrix}, \boldsymbol{c}_i = \begin{bmatrix} c_{i1} & \dots & c_{in} \end{bmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned}
|A| &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (b_{i\sigma(i)} + c_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots c_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{b}_i \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{c}_i \\ \vdots \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

(D2) $\boldsymbol{a}_i = c\begin{bmatrix} b_{i1} & \dots & b_{in} \end{bmatrix}$ ならば，

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (c b_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= c \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= c \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{b}_i \\ \vdots \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(D3) $\tau \in S_n$ とする．σ が n 次の置換をすべて動くとき，$\sigma\tau$ も S_n の元すべての置換を動くことにまず注意する．実際 $\sigma_1\tau = \sigma_2\tau$ ならば，τ^{-1} を右からかけると $\sigma_1 = \sigma_2$ がでる．

$\tau = (i, j)$ とすると，

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) a_{1\sigma\tau(1)} \cdots a_{i\sigma\tau(i)} \cdots a_{i\sigma\tau(j)} \cdots a_{n\sigma\tau(n)} \\ &= \sum_{\tau\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \operatorname{sgn}(\tau) \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

移項すれば，$\begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix} = 0$ がわかる．

(D4) $A = E$ とする．$\sigma \neq 1_n$ なら，必ずある i に対して，$a_{i\sigma(i)} = 0$. よって，E 行列式は 1_n に対応する項，すなわち対角成分だけが残って，

$$|E| = 1 \cdots 1 = 1.$$

□

略解

11.4 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

11.5 例えば $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

11.6 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

11.7 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) 1_3 (4) $(1,5,3)$ (5) $(2,4)$

11.8 $(1,3,6)(2,7,5,4) = (1,6)(1,3)(2,4)(2,5)(2,7)$

11.9 与えられた置換を巡回置換の積で書くと $(1,2,7)(4,6,5)$ だから，$(3-1)+(3-1) = 4$ 個の互換の積にかける．よって偶置換だから符号は $+1$.