信号処理論第二
第9回 (12/4)

情報理工学系研究科システム情報学専攻
猿渡 洋
hiroshi_saruwatari@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

信号処理論第二　講義予定(金曜2眼)

- 9/25: 第1回
- 10/02: 第2回
- 10/09: 第3回
- 10/16: 第4回
- 10/23: 第5回
- 10/30: 第6回
- 11/06: 第7回
- 11/27: 第8回
- 12/04: 第9回
- 12/11: 第10回
- 12/18: 第11回
- 12/25: 第12回
- 1/08: 第13回
- 01/22: 期末試験(予定)

※2020年度は全て90分講義とする(10時25分～11時55分)

講義内容

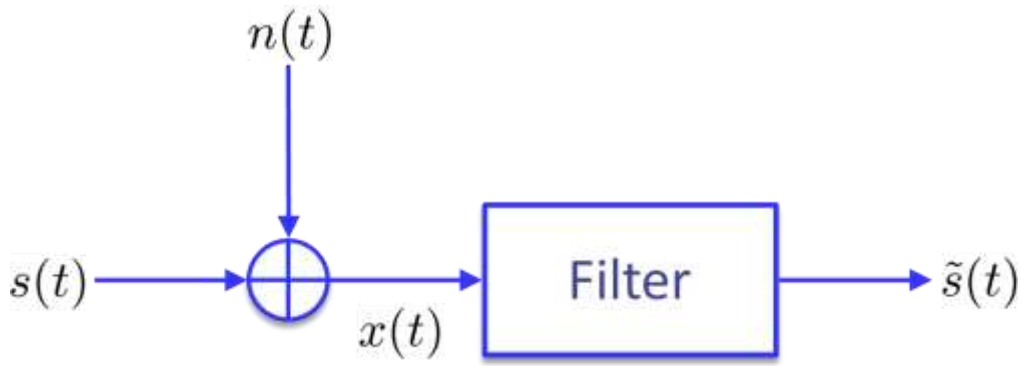
- δ関数再考
- δ関数を含む関数のフーリエ変換
- 相関関数とスペクトル
- 線形システム
- 特性関数
- 正規不規則信号
- 線形自乗平均推定
- ウィーナーフィルタ
- ヒルベルト変換
- カルマンフィルタ

講義資料と成績評価

- 講義資料
  - システム1研HP http://www.sp.ipc.i.u-tokyo.ac.jp/ からダウンロードできるようにしてあります
- 成績評価
  - 学期末試験

線形推定法：確率過程の推定（Wienerフィルタ）

復習



- 線形推定器

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

  - 観測データ $x(t-\tau)$ の線形結合で推定信号をモデル化

- 平均二乗誤差最小（MMSE）規範

$$J[h(t)] = \mathbb{E}[|\tilde{s}(t) - s(t)|^2]$$

  - J を最小にする $h(t)$ を求めることがここでの問題

直交原理によるWiener-Hopf積分方程式の導出

復習

- 直交原理1： $\boxed{\mathbb{E}[\{s(t) - \hat{s}(t)\}x(t-\tau)] = 0}$

誤差と観測値の直交性

$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha$ とすると，

$E[\{s(t) - \hat{s}(t)\}x(t-\tau)] = 0$ より，

$$E\left[\left\{s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha\right\} x(t-\tau)\right] = 0$$

$$E[\{s(t)x(t-\tau)\}] = E\left[\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha\right\} x(t-\tau)\right]$$

$$\therefore R_{sx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha$$

時刻 t 以降の観測情報が使えない場合，
$\tau > 0$ という条件が必要

Wiener-Hopf積分方程式の解法

復習

- $h(t)$ が非因果的なフィルタの場合

$$R_{sx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - \alpha) h(\alpha) d\alpha$$

両辺をFourier変換

$$S_{sx}(\omega) = S_{xx}(\omega) H(\omega) \longrightarrow H(\omega) = \frac{S_{sx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}$$

- $R_{sn}(\tau) = 0$ の場合

$$R_{sx}(\tau) = R_{ss}(\tau), \quad R_{xx}(\tau) = R_{ss}(\tau) + R_{nn}(\tau)$$

$$\boxed{H(\omega) = \frac{S_{ss}(\omega)}{S_{ss}(\omega) + S_{nn}(\omega)}}$$

非因果的Wienerフィルタ

非因果的Wienerフィルタ

復習

- $h(t)$ が非因果的なフィルタの場合

$$\boxed{H(\omega)=\frac{S_{ss}(\omega)}{S_{ss}(\omega)+S_{nn}(\omega)}}$$

非因果的Wienerフィルタ

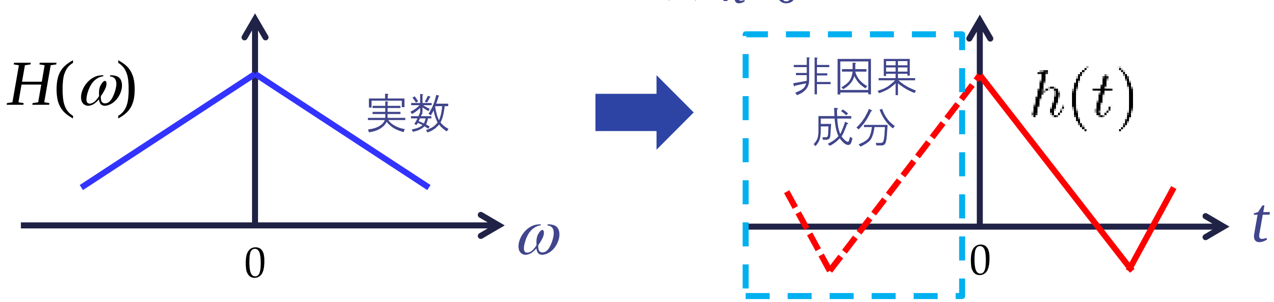
- 非因果的であることの証明

$H(\omega)$ は実数かつ偶関数

$$\Rightarrow\ h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{-j\omega t}d\omega=h(-t)$$

$\Rightarrow$ $h(t)$も実数かつ偶関数

$\Rightarrow$ 非零な非因果成分（$h(t)|_{t<0}$）を必ず含む



Wiener-Hopf積分方程式の解法 (因果性)

- $$y(\tau) = R_{sx}(\tau) - \int_0^\infty R_{xx}(\tau - \alpha)h(\alpha)d\alpha$$
  - $y(\tau) = 0 \ (\tau > 0)$ 反因果性関数(anticausal function)
  - $h(\tau) = 0 \ (\tau < 0)$ 因果性関数(causal function)

  となる $y,\ h$ を見つければ良い

- y の導入により $\tau > 0$ の条件はもう考えなくて良い

Laplace変換を用いた因果性の表現

- y, h を見つけるる問題をLaplace変換で表現

  - y, h のLaplace変換を $Y(p)$, $H(p)$ とすると

$$Y(p) = S_{sx}(-jp) - S_{xx}(-jp)H(p)$$

$$\begin{cases} Y(p) \quad \mathrm{Re}[p] < 0 & \text{で解析的（極がない）} \\ H(p) \quad \mathrm{Re}[p] > 0 & \text{で解析的（極がない）} \end{cases}$$

なる $Y(p)$, $H(p)$ を見つける問題と等価

ただしここでは

$S_{ab}(\omega)$　（←これがgiven）
$\Rightarrow$ フーリエ変換とラプラス変換間で $j\omega \rightarrow p$
$\Rightarrow S_{ab}(-jp)$

Laplace変換

- Laplace変換　（通常はf(t)=0, t<0 を考える）

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

- 逆Laplace変換

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

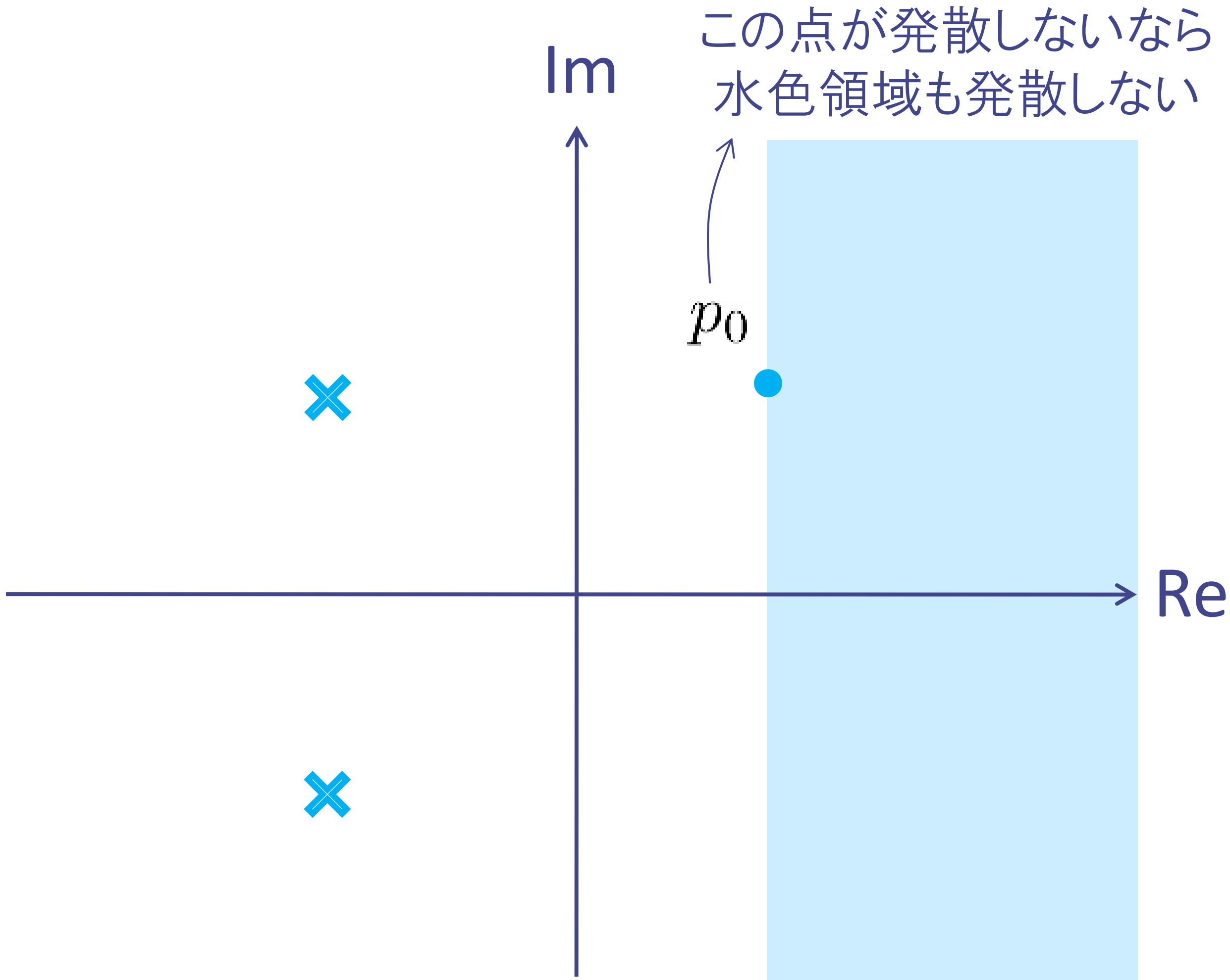
右側/左側Laplace変換

- $F(p) = F_{\mathrm{right}}(p) + F_{\mathrm{left}}(p)$ $\quad p = \sigma + j\omega$
  - 右側Laplace変換 $\underline{F_{\mathrm{right}}(p)} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t$

    因果性関数のLaplace変換
  - 左側Laplace変換 $F_{\mathrm{left}}(p) = \int_{-\infty}^{0} e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t$

- $p = p_0$ が右側Laplace変換の収束領域にあるならば $\mathrm{Re}(p) \geq \mathrm{Re}(p_0)$ となる p はすべて収束領域内（ $F_{\mathrm{right}}(p)$ の全ての極の実部は $\mathrm{Re}(p_0)$ より小）

右側Laplace変換の収束領域



BIBO安定性

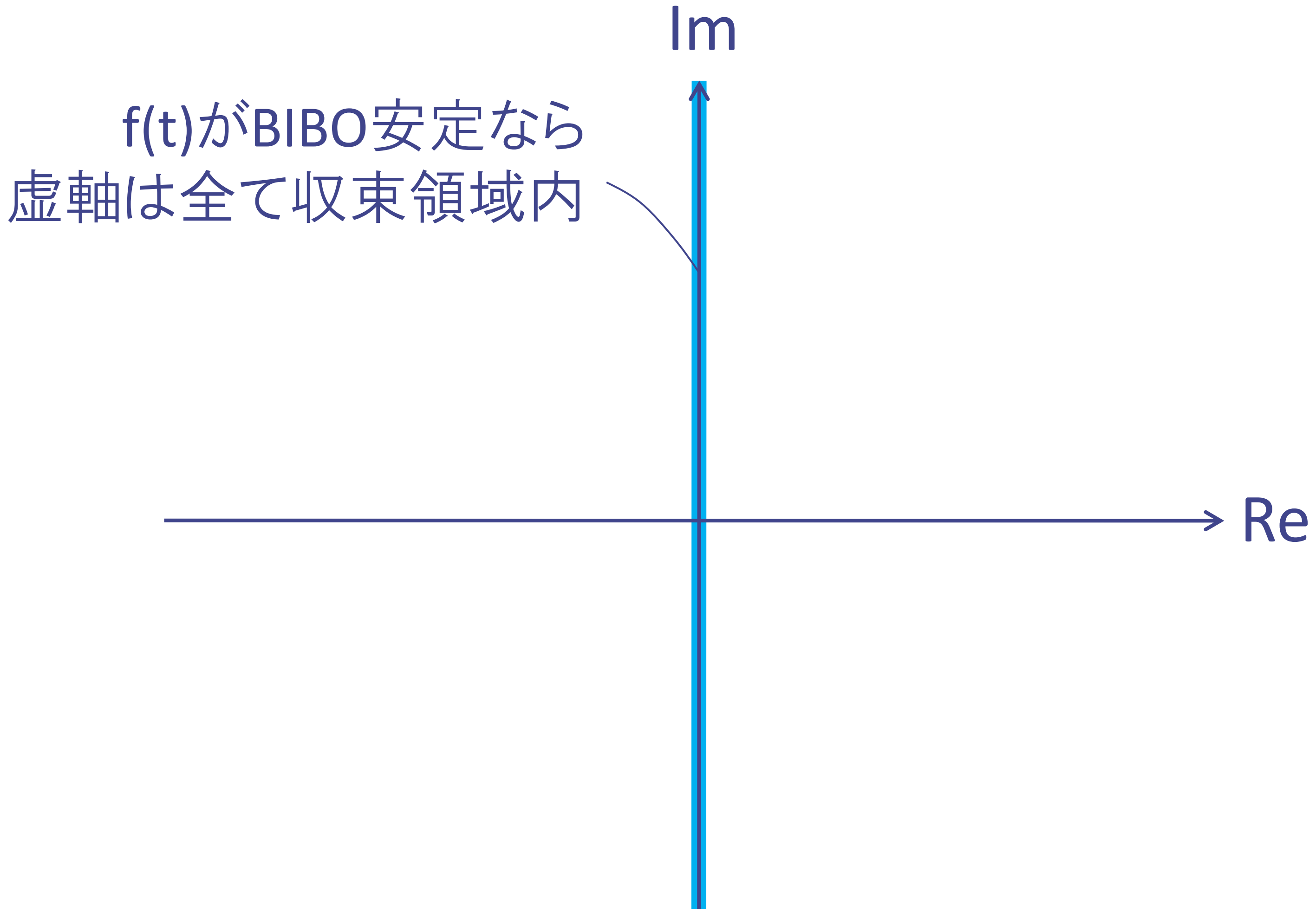
- フィルタ $f(t)$ がBIBO(Bounded Input, Bounded Output)安定であるための必要十分条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t \leq C$$

- $f(t)$ がBIBO安定であれば $f(t)$ のLaplace変換の収束領域には s 平面の虚軸が含まれる

$$\underbrace{\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t)\mathrm{d}t\right|}_{f(t)\text{ の虚軸でのLaplace変換}} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|e^{-j\omega t} f(t)|}_{|e^{-j\omega t}|\cdot|f(t)| = 1\cdot|f(t)|}\mathrm{d}t \leq C$$

BIBO安定性



Laplace変換と因果性

- f(t)が因果性関数ならば

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$
$$= \int_0^\infty \underline{f(t)e^{-\sigma t}} e^{-j\omega t}dt$$

p=p0で発散しないならば，Re[p]>Re[p0]となるようなpでも発散しない

- f(t)がBIBO安定ならば

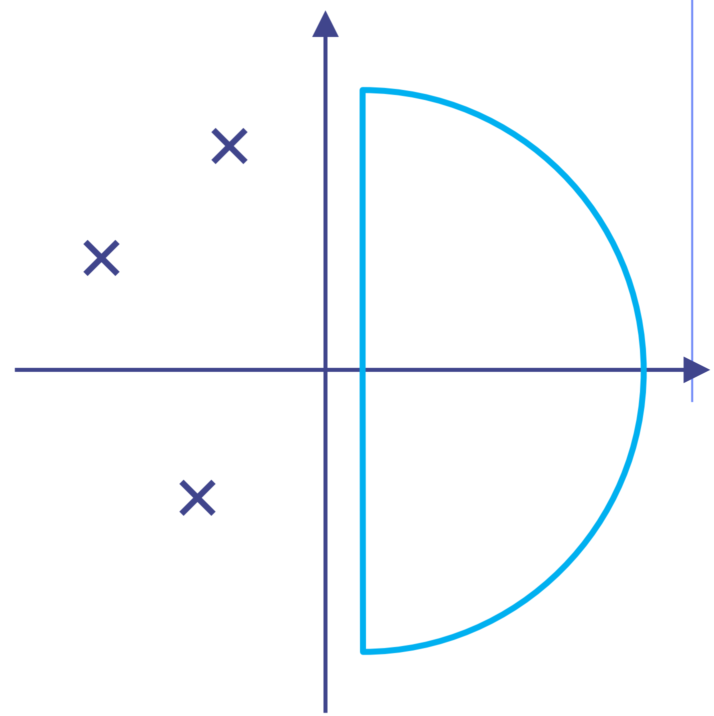
$$\left| \int f(t)e^{-j\omega t}dt \right| \le \int |f(t)e^{-j\omega t}|dt \le C$$

pが虚軸上にある場合F(p)は発散しない

Laplace変換と因果性

- $f(t)$がBIBO安定で因果的なフィルタであるならば、$F(p)$の極はすべて左半平面（虚軸は含まない）に存在する

Laplace変換と因果性



- F(p) が右半平面で解析的とすると, 右図の積分路に沿った積分値は0（Cauchyの積分定理より）

$R \to \infty$ のとき $f(t)$

$$\int_{c-jR}^{c+jR} F(p)e^{pt}dp$$

$$+\int_{\pi/2}^{-\pi/2} F(Re^{j\theta})e^{Rt\cos\theta + jRt\sin\theta}Re^{j\theta}jd\theta = 0$$

- $t<0$ に対し, $R \to \infty$ のとき第二項 $\to 0$ より第一項 $\to 0$

$$\because \lim_{R\to\infty} Re^{-R} = \lim_{R\to\infty}\frac{R}{e^R} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{e^R} = 0$$

Laplace変換と因果性

- $F(p)$ が右半平面で解析的（極をもたない）ならば，
  $f(t)$はBIBO安定で因果的なフィルタ

W-H方程式の解法:（Ｉ）スペクトル分解

- W-H方程式： $Y(p) = S_{sx}(-jp) - S_{xx}(-jp)H(p)$

（Ｉ） $S_{xx}(-jp) = A^{+}(p)A^{-}(p)$

$$\begin{cases} A^{+}(p),\ \dfrac{1}{A^{+}(p)} : \mathrm{Re}[p] > 0 \text{ で解析的（極と零が左半平面）} \\ A^{-}(p),\ \dfrac{1}{A^{-}(p)} : \mathrm{Re}[p] < 0 \text{ で解析的（極と零が右半平面）} \end{cases}$$

スペクトル分解について

- パワースペクトル密度は偶関数

$$S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega) \longrightarrow S_{xx}(\omega) = \frac{A(\omega^2)}{B(\omega^2)}$$

$$\longrightarrow S_{xx}(-jp) = \frac{A(-p^2)}{B(-p^2)}$$

$p = a$ が根なら
$p = -a$ も根

例） $S_{xx}(-jp) = \dfrac{-p^2+1}{p^4-2p^2+4}$

分子の根： $-1, 1$
分母の根： $\pm 1.2247 \pm j0.7071$

W-H方程式の解法:（Ｉ）スペクトル分解

- $Y(p) = S_{sx}(-jp) - A^{+}(p)A^{-}(p)H(p)$

$$\therefore \frac{Y(p)}{A^{-}(p)} = \frac{S_{sx}(-jp)}{A^{-}(p)} - A^{+}(p)H(p)$$

W-H方程式の解法:（Ⅱ）部分分数分解

- $$\frac{Y(p)}{A^-(p)} = \underline{\frac{S_{sx}(-jp)}{A^-(p)}} - A^+(p)H(p)$$

（Ⅱ）$$\frac{S_{sx}(-jp)}{A^-(p)} = \underbrace{B^+(p)}_{\text{極が左半平面}} + \overbrace{B^-(p)}^{\text{極が右半平面}}$$

$$\begin{cases} B^+(p) & : \mathrm{Re}[p] > 0 \text{ で解析的} \\ B^-(p) & : \mathrm{Re}[p] < 0 \text{ で解析的} \end{cases}$$

W-H方程式の解法:（Ⅱ）部分分数分解

- $$\frac{Y(p)}{A^-(p)} = B^+(p) + B^-(p) - A^+(p)H(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{Y(p)}{A^-(p)} - B^-(p)} = \boxed{B^+(p) - A^+(p)H(p)}$$

$\mathrm{Re}[p] < 0$で解析的　　　$\mathrm{Re}[p] > 0$で解析的

左辺の逆Laplace変換は反因果性関数
右辺の逆Laplace変換は因果性関数
⇒従って両辺は0ということ！

W-H方程式の解法:（Ⅲ）Hの決定,（Ⅳ）Yの決定

- $$\frac{Y(p)}{A^-(p)} - B^-(p) = 0$$
  $$B^+(p) - A^+(p)H(p) = 0$$

（Ⅲ）$H(p) = \dfrac{B^+(p)}{A^+(p)}$

$\mathrm{Re}[p] > 0$で解析的

（Ⅳ）$Y(p) = A^-(p)B^-(p)$

$\mathrm{Re}[p] < 0$で解析的

平均二乗誤差

- 以上のように $Y(p)$ を決めたときの平均二乗誤差

$$
\begin{aligned}
I &= \mathbb{E}\left[\left|s(t) - \int_0^\infty x(t-\alpha)h(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right|^2\right] \\
&= R_{ss}(0) - 2\mathbb{E}\left[s(t)\int_0^\infty x(t-\alpha)h(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right] \\
&\qquad\qquad + \mathbb{E}\left[\int_0^\infty\int_0^\infty x(t-\alpha)x(t-\beta)h(\alpha)h(\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\right] \\
&= R_{ss}(0) - 2\int_0^\infty R_{sx}(\alpha)h(\alpha)\mathrm{d}\alpha + \int_0^\infty\int_0^\infty R_{xx}(\alpha-\beta)h(\alpha)h(\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \\
&= R_{ss}(0) - 2\int_0^\infty R_{sx}(\alpha)h(\alpha)\mathrm{d}\alpha + \int_0^\infty R_{sx}(\alpha)h(\alpha)\mathrm{d}\alpha \\
&= R_{ss}(0) - \int_0^\infty R_{sx}(\alpha)h(\alpha)\mathrm{d}\alpha
\end{aligned}
$$

$$R_{sx}(t) = R_{xx}(t) * h(t)$$

因果性Wienerフィルタ設計の例

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

- $S_{ss}(\omega) = \dfrac{K}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\alpha > 0)$
- $S_{nn}(\omega) = N \quad (N > 0)$
- $S_{sn}(\omega) = 0$ の場合

$$\longrightarrow S_{xx}(\omega) = S_{ss}(\omega) + N, \quad S_{sx}(\omega) = S_{ss}(\omega)$$

$$S_{sx}(\omega) = S_{ss}(\omega) = \frac{K}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$R_{sx}(\tau) = R_{ss}(\tau) = \frac{K}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}$$

（Ｉ）スペクトル分解

$$\boxed{S_{xx}(-jp) = A^+(p)A^-(p)}$$

$$S_{xx}(-jp) = \frac{K}{\alpha^2 - p^2} + N = \frac{K + N(\alpha^2 - p^2)}{\alpha^2 - p^2}$$

$$= N\frac{\beta^2 - p^2}{\alpha^2 - p^2} = N\frac{p+\beta}{p+\alpha}\frac{p-\beta}{p-\alpha}$$

ただし $\beta^2 = \alpha^2 + \frac{K}{N}$

$\gamma \neq 0$

$$\boxed{\therefore\ A^+(p) = \frac{N}{\gamma}\frac{p+\beta}{p+\alpha}, \quad A^-(p) = \gamma\frac{p-\beta}{p-\alpha}}$$

（Ⅱ）部分分数分解

$$\boxed{\frac{S_{sx}(-jp)}{A^-(p)} = B^+(p) + B^-(p)}$$

$$\frac{S_{sx}(-jp)}{A^-(p)} = \frac{-K(p-\alpha)}{(p^2-\alpha^2)\gamma(p-\beta)} = \frac{-K}{\gamma(p+\alpha)(p-\beta)}$$

$$= \frac{N}{\gamma}\left(\frac{\beta-\alpha}{p+\alpha} + \frac{\alpha-\beta}{p-\beta}\right)$$

$$\boxed{B^+(p) = \frac{N}{\gamma}\frac{\beta-\alpha}{p+\alpha}, \quad B^-(p) = \frac{N}{\gamma}\frac{\alpha-\beta}{p-\beta}}$$

（Ⅲ）Hの決定

$$\boxed{H(p) = \frac{B^+(p)}{A^+(p)}}$$

$$H(p) = \frac{N}{\gamma}\frac{\beta-\alpha}{p+\alpha}\cdot\frac{\gamma}{N}\frac{p+\alpha}{p+\beta}$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{p+\beta}$$

$$h(t) = (\beta-\alpha)e^{-\beta t}U(t)$$

（Ⅳ）Yの決定

$$\boxed{Y(p) = A^-(p)B^-(p)}$$

$$Y(p) = \gamma\frac{p-\beta}{p-\alpha}\cdot\frac{N}{\gamma}\frac{\alpha-\beta}{p-\beta}$$

$$= \frac{N(\alpha-\beta)}{p-\alpha}$$

(V)平均二乘誤差

$$\boxed{I = R_{ss}(0) - \int_0^\infty R_{sx}(t)\,h(t)\,dt}$$

$$S_{sx}(\omega) = S_{ss}(\omega) = \frac{K}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$R_{sx}(\tau) = R_{ss}(\tau) = \frac{K}{2\alpha}e^{-\alpha|t|}$$

(V) $E\left[|e|^2\right]$

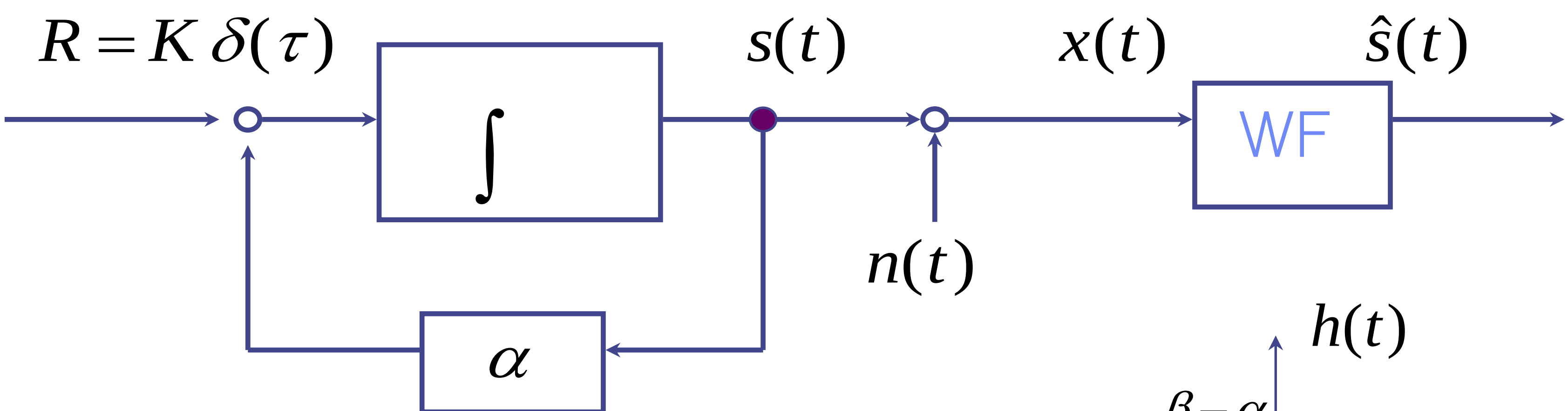
$$= \frac{K}{2\alpha} - \int_0^\infty \frac{K}{2\alpha}e^{-\alpha t}(\beta-\alpha)e^{-\beta t}dt$$

$$= \frac{K}{2\alpha} - \frac{K(\beta-\alpha)}{2\alpha}\frac{1}{\alpha+\beta}$$

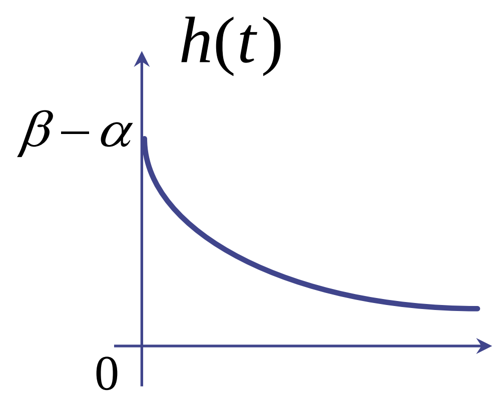
$$= \frac{K(\alpha+\beta)-K(\beta-\alpha)}{2\alpha(\alpha+\beta)} = \frac{K}{\alpha+\beta}$$

因果性Wienerフィルタ設計例のまとめ

$$S_{ss}(\omega) = \frac{K}{\alpha^2 + \omega^2} \qquad R_{ss}(\tau) = \frac{K}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}$$



$$R_{nn} = N\,\delta(\tau)$$



$$\beta^2 = \alpha^2 + \frac{K}{N}$$

$$h(t) = (\beta - \alpha)\, e^{-\beta t}\, U(t)$$

非因果性･因果性Wienerフィルタの誤差の「差」

例題における非因果的Wienerフィルタ

$$H(\omega) = \frac{K}{K + N(\alpha^2 + \omega^2)} = \frac{K/N}{\beta^2 + \omega^2}$$

$$\because \quad \beta^2 = \alpha^2 + \frac{K}{N}$$

$$\boxed{I_{\mathrm{noncausal}} = \frac{K}{2\beta} \leq \frac{K}{\alpha + \beta} (= I_{\mathrm{causal}})}$$

因果的Wienerフィルタの二乗平均誤差は、非因果的Wienerフィルタのそれよりも大きい（因果性を満たすための制約条件による誤差増分と見なすことができる）