第3章

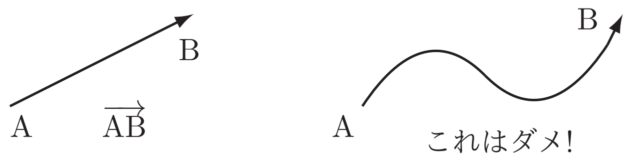
ベクトル

3.1　ベクトルの定義と演算

3.1.1　ベクトルの定義と表し方

定義 (ベクトル)

平面または空間において、A を始点、B を終点とする有向線分を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であらわす。



有向線分について、その位置を問題にしないで、その大きさと向きだけを考えたとき、これを**ベクトル**という。
また、始点と終点が同じ場合を**零ベクトル**といい、$\mathbf{o}$ で表す。

ベクトルの表し方

O を原点とし、有効線分を用いた $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ や $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のように始点と終点を書く方法や、ベクトル記号 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, ..., $\overrightarrow{z}$ のように矢印を用いて書く方法がある。今後は

$$\mathbf{a,\ b,\ c,\ ...,\ x,\ y,\ z,\ ...}$$

のように太文字で表した方法を多く用いるが、黒板やノートでは 白抜き

$$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}, ..., \mathbb{x}, \mathbb{y}, \mathbb{z}, ...$$

を用いる。(毎回、塗りつぶすのが大変なので)

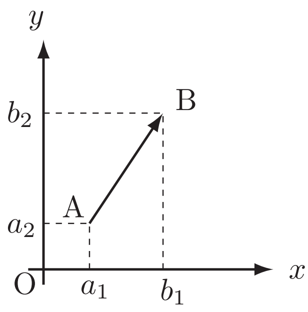
♠ **注意!**　ベクトルの $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ などと実数の a, b, c は明確に区別すること！！

成分を用いたベクトルの表し方

ベクトルの表し方は成分を用いて表すこともある。平面上 (空間内) の座標を用いて、始点から終点までの増加分を記述する方法である。
例えば、点 A の座標が (a_1, a_2) であり、点 B の座標が (b_1, b_2) であったとする。このとき、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ と表す。したがって、

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

である。



♠ **注意!**　縦ベクトルと横ベクトルは、混乱がない場合にはどちらを利用しても良い。例えば

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2, 1) \quad や \quad \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

と表す。

しかし、(ベクトルの演算など) どちらか一方でなければならないときは、区別が必要である。また、演算などで、

$$(3, -1) + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

のような表記は望ましくない。

ベクトルの次元と成分

成分を用いてベクトルを表したとき、例えば、空間内のベクトルを (a, b, c) のように 3 つの数で表したとき、ベクトルの成分の左から第 1 成分、第 2 成分、第 3 成分 または x 成分、y 成分、z 成分 と言う。縦ベクトルの場合は上から順となる。

成分が 2 つのベクトルは2 次元ベクトル 、成分が 3 つのベクトルは3 次元ベクトルという。

例 $\mathbf{a} = (2, 1)$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ とすると、$\mathbf{a}$ は第 1 成分が 2, 第 2 成分が 1 の 2 次元ベクトルで $\mathbf{b}$ は第 1 成分が 3, 第 2 成分が -2, 第 3 成分が 7 の 3 次元ベクトルである。

♠ **注意!**　表記 $(1, 2)$ や $(3, 1, 4)$ は座標を意味する場合と (位置) ベクトルを表す場合がある。

3.1.2　ベクトルの和、差、定数倍

定義 (ベクトルの相等 1)

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が平行移動で移りあうとき、2 つのベクトルは等しいという。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

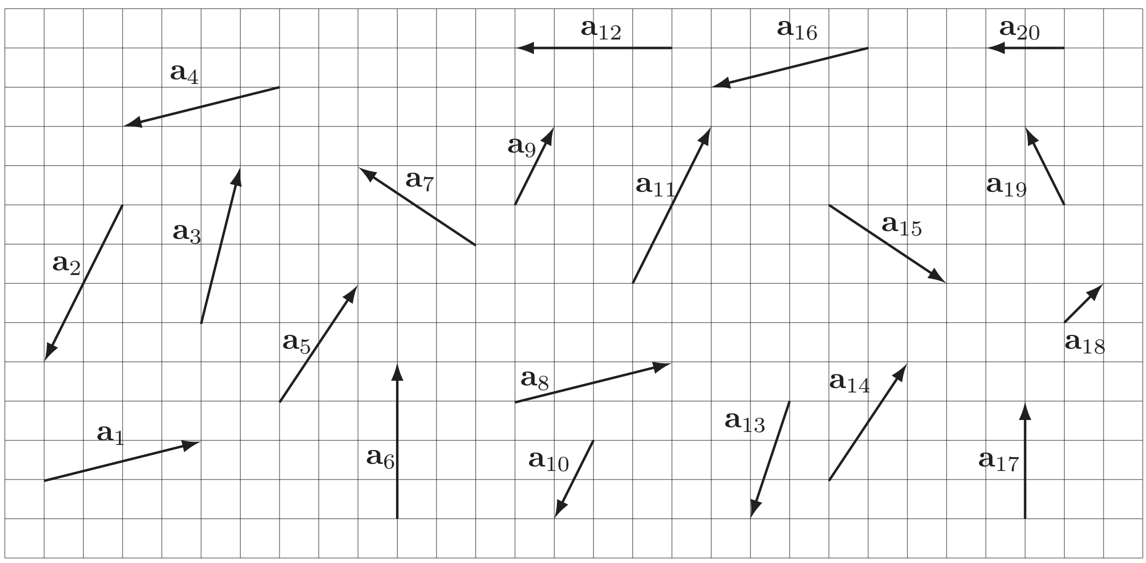
定義 (ベクトルの相等 2)

2 つの 2 次元ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ に対して、$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ なら 2 つのベクトルは等しい。

♡ **point**　3 次元ベクトルの場合も同様に定義することができる。

また、列ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ でも同様に定義される。

例 **3.1.1.** 以下のベクトルに対して、等しいベクトルを見つける。例えば、$\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_8$ が等しい。



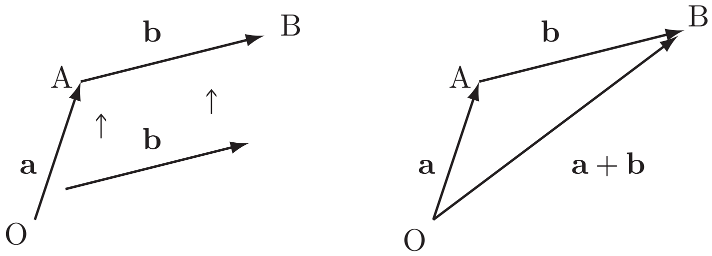
$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_8$ のほかには、$\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_{16}$, $\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_{14}$ が同じベクトルである。

定義 (ベクトルの和 1)

O を原点とし、平面または空間の 2 つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \mathbf{a}$, $\underline{\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathbf{b}}$ となるように点 A, B を選び、

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と定義する。このとき、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の和という。



定義 (ベクトルの和 2)

2 つの 2 次元ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ に対して、和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ を

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

で定める。

♡ **point**　$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ なら $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ である。

定義 (ベクトルの定数倍 1)

ベクトル $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ と定数 $k \in \mathbb{R}$ に対して、$\mathbf{a}$ の**定数倍** $k\mathbf{a}$ を

$k > 0$ ならば、$\mathbf{a}$ と同じ向きで、大きさが k 倍のベクトル、
$k < 0$ ならば、$\mathbf{a}$ と反対向きで、大きさが $|k|$ 倍のベクトル、
$k = 0$ ならば、零ベクトル

と定義する。
$\mathbf{a} = \mathbf{o}$ ならば、すべての実数 k に対して $k\mathbf{a} = \mathbf{o}$ と定義する。

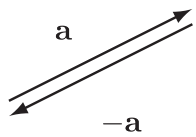
♣ **補足**　定数倍のことを**スカラー倍**とも言う。

定義 (ベクトルの定数倍 2)

2 次元ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ と実数 k に対して、定数倍 $k\mathbf{a}$ は $k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2)$ で定める。

♡ **point**　縦ベクトルの場合も同様に定義される。

特に $k=-1$ のとき、(-1) 倍の $\mathbf{a}$ は



$$\text{”}\mathbf{a}\ \text{と反対向きで大きさが同じベクトル”}$$

であり、$(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$ とあらわす。

♠ **注意!**　ベクトルの和の定義より $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{o}$ をみたす。

例 **3.1.2.** 例 3.1.1. において、$\mathbf{a}_1=-\mathbf{a}_4$ であり、$\mathbf{a}_2=2\mathbf{a}_{10}$ である。

例 **3.1.3.** ベクトル $\mathbf{a}=(1,3)$, $\mathbf{b}=(-2,2)$ に対して、和や定数倍を考える。

(1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(1,3)+(-2,2)=(1-2,3+2)=(-1,5)$

(2) $-3\mathbf{a}=-3(1,3)=(-3,-9)$

(3) $3\mathbf{a}+\mathbf{b}=3(1,3)+(-2,2)=(1,11)$

定義 (ベクトルの差 1)

ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に対して差 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ を

$$\mathbf{b}-\mathbf{a}=\mathbf{b}+(-\mathbf{a})$$

で定義する。

定義 (ベクトルの差 2)

2 つの 2 次元ベクトル $\mathbf{a}=(a_1,a_2),\mathbf{b}=(b_1,b_2)$ に対して、差 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-1)\mathbf{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$$

で定める。

♡ **point**　縦ベクトルの場合も同様に定義される。

ベクトルの平行

2 つのベクトル $\mathbf{a},\mathbf{b}$ $(\mathbf{a}\neq\mathbf{o},\mathbf{b}\neq\mathbf{o})$ が平行であるとき、$\mathbf{a}/\!/\mathbf{b}$ と書く。
2 つのベクトル $\mathbf{a}\neq\mathbf{o},\mathbf{b}\neq\mathbf{o}$ が平行であるための条件は

$$\mathbf{a}=k\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}/\!/\mathbf{b}$$

である。(条件より $k\neq0$ である。$k<0$ も可。)

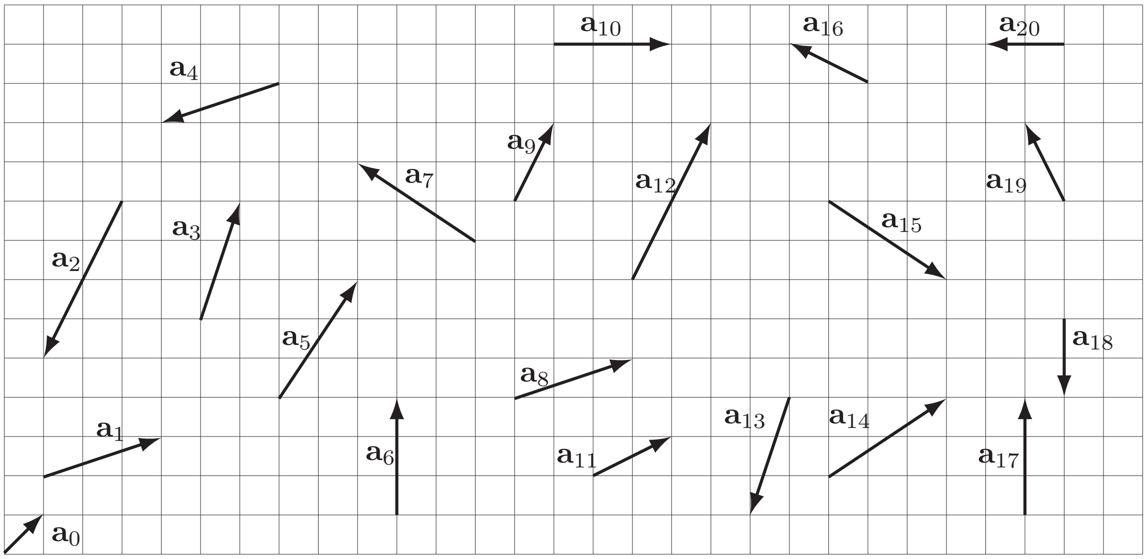
例 **3.1.4.** 例 3.1.1. において、$\mathbf{a}_1=-\mathbf{a}_4$ であり、$\mathbf{a}_2=2\mathbf{a}_{10}$ であった。よって、

$$\mathbf{a}_1/\!/\mathbf{a}_4,\quad\mathbf{a}_2/\!/\mathbf{a}_{10}$$

が解る。

3.1.3　演習問題 VI

問題 3.1.1. 以下のマス目において、右および上を正の方向とし、1 マスを縦横 1 とする。すなわち $\mathbf{a}_0$ を成分表示すると $(1,1)$ となる。



(1) 以下のベクトルをそれぞれ成分で表せ。

(i) $\mathbf{a}_1$　(ii) $\mathbf{a}_2$　(iii) $\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_4$　(iv) $2\mathbf{a}_5 - 3\mathbf{a}_6$

(2) 成分表示が 以下の表示となるものをそれぞれ選べ。

(i) $(2,3)$　(ii) $(3,0)$　(iii) $(0,-2)$　(iv) $(-2,1)$

(3) 以下の等式を満たすベクトル $\mathbf{x}$ を成分表示し、$\mathbf{a}_0$ から $\mathbf{a}_{20}$ のうちから選べ。

(i) $\mathbf{x}+2\mathbf{a}_9 = \mathbf{o}$　(ii) $\mathbf{a}_{10}+\mathbf{x} = 2\mathbf{a}_{11}$　(iii) $\mathbf{a}_{12}-\mathbf{x} = -2\mathbf{a}_{13}$　(iv) $2\mathbf{x}+\mathbf{a}_{18} = -\mathbf{a}_{20}$

(4) $\mathbf{a}_0$ から $\mathbf{a}_{20}$ のうち、同じベクトルの組を全て答えよ。

(5) $\mathbf{a}_0$ から $\mathbf{a}_{20}$ のうち、平行なベクトルの組を全て答えよ。

問題 3.1.2. マス目の決まりは問題 8.1 と同じものとする。すなわち $\mathbf{a}_0 = (1,1)$ となる。

3 つのベクトルを $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$、$\mathbf{y} = \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4$、$\mathbf{z} = -\mathbf{b}_5 + 2\mathbf{b}_6$ で定めるとき、$\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ を作図せよ。ただし、位置 (始点) は自由に選んでよい。