放物線の頂点における曲率半径

伊藤（いとう）　亘央（のぶお）

§1. はじめに

放物線の頂点を含む微小な部分は円の弧のように見える。そこで，放物線における頂点を含む微小な部分について，半径がどのくらいの円の弧に近似されるのかを考察したい。

§2. 放物線の頂点における『曲率半径』の定義

放物線の頂点における『曲率半径』を次のように定義する。

放物線の頂点をＰ，この放物線上のＰと異なる点をＱとする。2点Ｐ，Ｑを通りＰにおいてこの放物線に接する円の半径を r とする。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{\mathrm{Q}\to\mathrm{P}} r$ を頂点Ｐにおける『曲率半径』と呼ぶこととする。

この定義は，放物線における頂点を含む微小な部分が“円の弧”に近似されると考えたときのその円の半径という意味になる。

§3. 放物線 $y=ax^2$ の頂点における曲率半径

まず，放物線 $y=ax^2$ の原点Ｏにおける曲率半径を求める。

$a>0$ とする。

y 軸の正の部分に中心をもち，原点Ｏで x 軸に接する半径 r の円 $x^2+(y-r)^2=r^2$ と放物線 $y=ax^2$ との共有点のうち，原点Ｏと異なるものの１つをＱとし，Ｑの x 座標を α とする。

α は $x^2+(ax^2-r)^2=r^2$ の解の１つであるから，

$\alpha^2+a^2\alpha^4-2ar\alpha^2=0$，$\alpha\neq 0$ より

$$a^2\alpha^2+(1-2ar)=0$$

よって $\displaystyle r=\frac{a^2\alpha^2+1}{2a}=\frac{a\alpha^2}{2}+\frac{1}{2a}$

ここで，$\mathrm{Q}\to\mathrm{O} \iff \alpha\to 0$ であるから，放物線 $y=ax^2$ の原点Ｏにおける曲率半径は

$$\lim_{\mathrm{Q}\to\mathrm{O}} r=\lim_{\alpha\to 0} r=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{a\alpha^2}{2}+\frac{1}{2a}\right)=\frac{1}{2a}\ (a>0)$$

次に $a<0$ とする。

y 軸の負の部分に中心をもち，原点Ｏで x 軸に接する半径 r の円 $x^2+(y+r)^2=r^2$ と放物線 $y=ax^2$ との共有点のうち，原点Ｏと異なるものの１つをＲとし，Ｒの x 座標を β とすると，先と同様の計算により，

$$\lim_{\mathrm{R}\to\mathrm{O}} r=\lim_{\beta\to 0} r=-\frac{1}{2a}\ (a<0)$$

を得る。

以上をまとめると，放物線 $y=ax^2$ の原点Ｏにおける曲率半径は $\dfrac{1}{2|a|}$ である。

例えば，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の頂点を含む微小な部分は，半径１の円の弧に近似される。

§4. 放物線の頂点における曲率半径

一般の放物線 $y=ax^2+bx+c$ については，放物線 $y=ax^2$ と合同であるから，頂点における曲率半径は§3. で得たものに同じ $\dfrac{1}{2|a|}$ である。したがって，まとめると次のことがいえる。

『放物線 $y=ax^2+bx+c$ の頂点を含む微小な部分は，半径 $\dfrac{1}{2|a|}$ の円の弧に近似される。』

（愛知県　名古屋国際中学校・高等学校）